С. М. КРАСНИТСКИЙ, асп.
Киевский институт инженеров гражданской авиации

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ СТАТИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В некоторых вопросах теории стационарных гауссовских процессов (эквивалентность мер, прогнозирование) встречаются уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = a(t), \qquad t \in T, \tag{1}$$

где $\varphi(\lambda)$ — искомая функция, $f(\lambda)$ — спектральная плотность процесса, T — интервал числовой оси, $a(t)$ — заданная функция [1—3].

Если $f(\lambda)$ является положительной дробно-рациональной функцией, то решение уравнения (1) сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [2, 3].

Некоторые задачи статистики случайных полей (например, задача об определении плотности эквивалентных мер, соответствующих двум однородным гауссовским полям) приводят к рассмотрению следующего аналога уравнения (1):

$$\int_{R^n} e^{-i\langle\lambda, t\rangle}\varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = a(t), \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in T \subset R^n, \tag{2}$$

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, $\langle\lambda, t\rangle = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n$, R^n — n-мерное евклидово пространство.

В настоящей работе показано, что, при определенных условиях, решение уравнения (2) также может быть получено, если известно решение некоторого линейного дифференциального уравнения.

Для упрощения записи будет рассматриваться случай $n = 2$, в котором уравнение (2) принимает вид

$$\int_{R^2} e^{-i\langle\lambda, t\rangle}\varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = a(t), \quad t = (t_1, t_2) \in T \subset R^2. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения.

1. Пусть $F(\lambda_1, \lambda_2)$ — некоторая функция переменных λ_1 и λ_2. Функция переменной λ_1 (переменной λ_2), полученная из $F(\lambda_1, \lambda_2)$ путем фиксирования переменной λ_2 (λ_1), будет обозначаться $F_{\lambda_2}(\lambda_1)$ $(F_{\lambda_1}(\lambda_2))$.

2. Пусть $f(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2$ — неотрицательная функция, интегрируемая по всему R^2, T — некоторое подмножество R^2.

Символ $L_T(f)$ будет обозначать пространство функций $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in R^2$, являющееся замыканием по норме $\left[\int_{R^2} |\varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda\right]^{\frac{1}{2}}$ все[x] линейных комбинаций вида $\sum_{k=1}^{m} c^{(k)} e^{i\langle \lambda, t^{(k)}\rangle}$, где $c^{(1)}, \ldots, c^{(m)}$ — комплексные числа, $t^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}) \in T$.

3. Пусть $[0, \tau]$ — отрезок числовой оси. Символом $L_{[0,\tau]}(f_{\lambda_2}(\lambda_1))$ будем обозначать пространство функций $\psi(\lambda_1)$, $\lambda_1 \in (-\infty, \infty)$, являющееся замыканием по норме

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda_1)|^2 f_{\lambda_2}(\lambda_1)\, d\lambda_1\right]^{\frac{1}{2}}$$

линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{m} c^{(k)} e^{i\lambda_1 s^{(k)}}$, где $c^{(1)}, \ldots, c^{(m)}$ — комплексные числа, $s^{(1)}, \ldots, s^{(m)} \in [0, \tau]$.

Символ $L_{[0,\tau]}(f_{\lambda_1}(\lambda_2))$ будет иметь соответствующий смысл.

4. Пусть

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{P(\lambda_1, \lambda_2)}{Q(\lambda_1, \lambda_2)}, \tag{4}$$

где $P(\lambda_1, \lambda_2)$ и $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ — положительные многочлены от λ_1 и λ_2. Показатели старших степеней λ_j, $j = 1, 2$ в $P(\lambda_1, \lambda_2)$ и $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ будут обозначаться, соответственно, p_j и q_j, $j = 1, 2$.

Лемма 1. Пусть $T = [0, \tau] \times (-\infty, \infty)$, функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$ удовлетворяет равенству (4) и является интегрируемой по всему пространству R^2. Если при этом функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит пространству $L_T(f)$, то для почти всех λ_2 функция $\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)$ представима в виде:

$$\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1) = M_{\lambda_2}(\lambda_1) + (1 + i\lambda_1)^{\frac{q_1 - p_1}{2}} \int_0^{\tau} e^{i\lambda_1 s} c_{\lambda_2}(s)\, ds, \tag{5}$$

где $M_{\lambda_2}(\lambda_1)$ — многочлен степени не выше, чем $2^{-1}(q_1 - p_1) - 1$, а $c_{\lambda_2}(s)$ интегрируема с квадратом по s на $[0, \tau]$.

Доказательство. По определению пространства $L_T(f)$ существует последовательность $\varphi_m(\lambda)$ вида

$$\varphi_m(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} c^{(mk_l)} e^{i\langle \lambda, t^{(mk_l)}\rangle}, \quad t^{(mk_l)} \in T,$$

такая, что

$$\int_{R^2} |\varphi_m(\lambda) - \varphi(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda \xrightarrow[m \to \infty]{} 0. \tag{6}$$

Интеграл в левой части (6) перепишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(\lambda_2)\, d\lambda_2,$$

где

$$\psi_m(\lambda_2)=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_m(\lambda_1,\ \lambda_2)-\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)|^2 f_{\lambda_2}(\lambda_1)\,d\lambda_1.$$

Соотношение (6) означает, что последовательность $\psi_m(\lambda_2)$ сходится к нулю в среднем. Выделяя из нее подпоследовательность $\psi_{m_p}(\lambda_2)$, сходящуюся к нулю почти всюду, получаем, что для почти всех λ_2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{m_p} d_{\lambda_2}^{(m_pk_l)}e^{i\lambda_1 t_1^{(m_pk_l)}}-\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)\right|^2 f_{\lambda_2}(\lambda_1)\,d\lambda_1 \xrightarrow[m_p\to\infty]{} 0, \tag{7}$$

где $d_{\lambda_2}^{(m_pk_l)}=c^{(m_pk_l)}e^{i\lambda_2 t_2^{(m_pk_l)}}$.

Соотношение (7) показывает, что для почти всех λ_2 функция $\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)$ принадлежит пространству $L_{[0,\tau]}(f_{\lambda_2}(\lambda_1))$. В свою очередь, для почти каждого λ_2 множество $L_{[0,\tau]}(f_{\lambda_2}(\lambda_1))$ состоит из функций, представимых в виде (5), т. к. при выполнении равенства (4) к функции $f_{\lambda_2}(\lambda_1)$ при почти всех λ_2 применима лемма 3 [4].

Лемма 2. Пусть $T=[0,\ \tau_1]\times(-\infty,\ \infty)$, функция $f(\lambda_1,\ \lambda_2)$ удовлетворяет равенству (4) и является интегрируемой по всему R^2. Если при этом функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит $L_T(f)$, то для почти всех λ_j, $j=1,\ 2$, справедлива формула

$$\varphi_{\lambda_j}(\lambda_k)=M_{\lambda_j}(\lambda_k)+(1+i\lambda_k)^{2^{-1}(q_k-p_k)}\int_0^{\tau_k} e^{i\lambda_k s}c_{\lambda_j}(s)\,ds,$$

где $j=1,\ 2$; $k=1,\ 2$; $j\neq k$, $M_{\lambda_j}(\lambda_k)$ — многочлен степени не выше, чем $2^{-1}(q_k-p_k)-1$, $c_{\lambda_j}(s)$ интегрируема с квадратом по s на $[0,\ \tau_k]$.

Доказательство такое же, как и в лемме 1.

Лемма 3. Пусть функция $g_\alpha(z)$, зависящая от параметра α, представима при некоторых его значениях в виде

$$g_\alpha(z)=\int_0^{\tau} e^{izs}c_\alpha(s)\,ds, \qquad 0<\tau<\infty,$$

где $\int_0^{\tau}|c_\alpha(s)|^2ds<\infty$. Если z стремится к бесконечности, оставаясь в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, то при этих значениях $\alpha g_\alpha(z)\to\to 0$ равномерно относительно $\arg z$ $(0\leqslant\arg z\leqslant\pi)$.

Для проверки этого утверждения можно воспользоваться рассуждениями, доказывающими лемму 7 [2, гл. III, § 7].

Предположим, что $T=[0,\ \tau_1]\times[0,\ \tau_2]$, $0<\tau_j<\infty$, $j=1,\ 2$, а функция $f(\lambda_1,\ \lambda_2)$ интегрируема по всему R^2 и представима в виде

$$f(\lambda_1,\ \lambda_2)=\frac{P(\lambda_1,\ \lambda_2)}{|Q_1(i\lambda_1)|^2\,|Q_2(i\lambda_2)|^2}. \tag{8}$$

В равенстве (8) $Q_j(z)$, $j=1, 2$, — многочлены степени q_j, $j=1, 2$ с действительными коэффициентами, все корни которых лежат в левой полуплоскости [2, гл. I, § 10].

Относительно $P(\lambda_1, \lambda_2)$ предполагается, что это положительный многочлен от λ_1 и λ_2, такой, что величины $[P(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $\lambda_k^{p_k} P[(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $k = 1, 2$ и $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}[P(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$ ограничены. Будем также считать, что функция $a(t_1, t_2)$, $t_1\ t_2) \in T$ из уравнения (3) обладает всеми непрерывными частными производными до

$$\frac{\partial^{2q_1-p_1+2q_2-p_2}}{\partial t_1^{2q_1-p_1}\partial t_2^{2q_2-p_2}} a(t_1, t_2)$$

включительно. Определим функцию $u(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in T$ как решение дифференциального уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}, \ i\frac{\partial}{\partial t_2}\right) x(t_1, t_2) = a(t_1, t_2) \tag{9}$$

с граничными условиями

$$Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\frac{\partial^{j_k}}{\partial t_k^{j_k}} x(t_1, t_2) = 0 \quad \text{при } t_k \leqslant 0, \ -\infty < t_l < \infty,$$

$$Q_k\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)\frac{\partial^{j_k}}{\partial t_k^{j_k}} x(t_1, t_2) = 0 \quad \text{при } t_k \geqslant \tau_k, \ -\infty < t_l < \infty, \tag{10}$$

$$k = 1, 2; \quad l \neq k, \ j_k = \overline{0, \frac{1}{2}p_k - 1}.$$

При сделанных предположениях относительно T, $f(\lambda_1, \lambda_2)$ и $a(t_1, t_2)$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Решение уравнения (3), принадлежащее пространству $L_T(f)$, является преобразованием Фурье некоторой обобщенной функции; эта функция представляет из себя сумму двух функционалов, первый из которых является обычной функцией, равной

$$\prod_{k=1}^{2} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial t_k}\right) u(t_1, t_2)$$

в T и нулю все T, а второй — финитный функционал, сосредоточенный на границе T.

Доказательство. Определим функцию $x(t_1, t_2)$ равенством

$$x(t) = \int_{R^2} e^{-i\langle\lambda, t\rangle} \frac{\varphi(\lambda)}{\prod_{k=1}^{2} |Q_k(i\lambda_k)|^2} d\lambda, \qquad t = (t_1, t_2), \tag{11}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \langle\lambda, t\rangle = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2, \quad \varphi(\lambda) \in L_T(f).$$

Функция $x(t)$ определена для всех $t = (t_1, t_2) \in R^2$, поскольку, ввиду предположения об ограниченности $[P(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, интеграл в (11) по абсолютной величине не превосходит

$$\text{const}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)|\frac{P(\lambda_1,\ \lambda_2)}{\prod\limits_{k=1}^{2}|Q_k(i\lambda_k)|^2}\,d\lambda_1 d\lambda_2,$$

а $\varphi(\lambda)$ принадлежит $L_T(f)$. Более того, функция $x(t_1,\ t_2)$ обладает всеми непрерывными частными производными до

$$\frac{\partial^{\sum\limits_{k=1}^{2}\left(q_k+\frac{1}{2}p_k-1\right)}}{\partial t_1^{q_1+\frac{1}{2}p_1-1}\,\partial t_2^{q_2+\frac{1}{2}p_2-1}}\,x(t_1,\ t_2)$$

включительно. В самом деле, пусть $0\leqslant r_k\leqslant\frac{1}{2}p_k,\quad k=1,\ 2,$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda_1|^{q_1+r_1-1}|\lambda_2|^{q_2+r_2-1}\frac{|\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)|}{\prod\limits_{k=1}^{2}|Q_k(i\lambda_k)|^2}\,d\lambda_1 d\lambda_2=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\lambda_1|^{q_1-1}|\lambda_2|^{q_2-1}}{|Q_1(i\lambda_1)||Q_2(i\lambda_2)|}\cdot\frac{|\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)||\lambda_1|^{r_1}|\lambda_2|^{r_2}}{|Q_1(i\lambda_1)||Q_2(i\lambda_2)|}\,d\lambda_1 d\lambda_2\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\lambda_1|^{2q_1-2}|\lambda_2|^{2q_2-2}}{|Q_1(i\lambda_1)|^2|Q_2(i\lambda_2)|^2}\,d\lambda_1 d\lambda_2\right]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)|^2\frac{|\lambda_1|^{2r_1}|\lambda_2|^{2r_2}}{|Q_1(i\lambda_1)|^2|Q_2(i\lambda_2)|^2}\,d\lambda_1 d\lambda_2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Первый интеграл представляет из себя произведение двух сходящихся однократных интегралов. Далее, из ограниченности $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$ и $\lambda_1^{p_1}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$ следует ограниченность $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{2r_2}\,[P(\lambda_1,\lambda_2)]^{-1}$: если $|\lambda_2|\leqslant 1$, то эта величина не превосходит $\lambda_1^{p_1}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$, а если $|\lambda_2|>1$, то она не больше, чем $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$. Аналогично, из ограниченности $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$ и $\lambda_2^{p_2}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$ следует ограниченность $\lambda_1^{2r_1}\lambda_2^{p_2}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$. Наконец, из ограниченности $\lambda_k^{p_k}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$ и $[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$ следует ограниченность $\lambda_k^{2r_k}\,[P(\lambda_1,\ \lambda_2)]^{-1}$, $k=1,\ 2$. Отсюда, так же, как и при доказательстве существования функции $x(t_1,\ t_2)$, убеждаемся в сходимости второго интеграла.

Считая, что $\varphi(\lambda_1,\lambda_2)$ является решением (3), применим к функции $x(t_1,\ t_2)$ оператор $P\left(i\frac{\partial}{\partial t_1},\ i\frac{\partial}{\partial t_2}\right)$. Получим следующее соотношение

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial t_1},\ i\frac{\partial}{\partial t_2}\right)x(t_1,\ t_2)=a(t_1,\ t_2),\ (t_1,\ t_2)\in T.$$

Для вывода граничных условий (10) рассмотрим выражен

$$Q_1\left(-\frac{\partial}{\partial t_1}\right)\frac{\partial^{j_1}}{\partial t_1^{j_1}}x(t_1,\ t_2),\qquad j_1=\overline{0,\ \frac{1}{2}p_1-1}.$$

Его можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda_2 t_2}}{|Q_2(i\lambda_2)|^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda_1 t_1}\varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)\frac{(-i\lambda_1)^{j_1}}{Q_1(-i\lambda_1)}d\lambda_1\right]d\lambda_2.$$

Нужно показать, что при $t_1\leqslant 0$ и всех t_2 это выражение рав нулю. Для этого достаточно убедиться в том, что при любом и всех отрицательных t_1 внутренний интеграл равен нулю для по ти всех λ_2. Этот факт следует из лемм 2 и 3 и известной леммы Жо дана.

Аналогично устанавливаются остальные соотношения в (1

Рассмотрим теперь $x(t_1,\ t_2)$ как обобщенную в смысле Швар функцию и применим к ней оператор

$$\prod_{k=1}^{2}Q_k\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial t_k}\right).$$

При этом получается равенство

$$y(t_1,\ t_2)\equiv\prod_{k=1}^{2}Q_k\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial t_k}\right)x(t_1,\ t_2)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2)}\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2,$$

откуда видно, что $\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)$ является преобразованием Фу функции $y(t_1,\ t_2)$. Для того, чтобы убедиться в том, что характ этой функции таков, как утверждается в теореме, поступим следу щим образом. В области $\{(t_1,\ t_2):t_1<\tau_1,\ t_2<\tau_2\}$ рассмотрим фу цию

$$v_1(t_1,\ t_2)=Q_2\left(-\frac{\partial}{\partial t_2}\right)Q_1\left(-\frac{\partial}{\partial t_1}\right)x(t_1,\ t_2).$$

Функция $v_1(t_1,\ t_2)$ является обычной. Действительно, если p_1 и положительны, то она, по доказанному выше, даже непрерывн Если же по крайней мере одно p_k, $k=1,\ 2$, равно 0, то можно во пользоваться тем, что при наших условиях функция

$$\lambda_1^{r_1}\lambda_2^{r_2}\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2)\left[\prod_{k=1}^{2}|Q_k(i\lambda_k)|^2\right]^{-1},\qquad 0\leqslant r_k\leqslant q_k,\quad k=1,\ 2$$

интегрируема с квадратом на R^2. Применяя к $v_1(t_1,\ t_2)$ рассужд ния, используемые при выводе (10), получаем, что эта функция р на 0, если $(t_1)\ t_2,\ \overline{\in}\ T$.

Из только что рассмотренных свойств функции $v_1(t_1,\ t_2)$ следу что в рассматриваемой области функция $y(t_1,\ t_2)$ равна сумме фу ционала, сосредоточенного на левой и нижней сторонах прямоугольника T и обычной функции равной 0 вне T и

$$\prod_{k=1}^{2} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right) Q_k\left(-\frac{\partial}{\partial t_k}\right) u(t_1, t_2)$$

в T. Вводя, далее, функции

$$v_2(t_1, t_2) = Q_2\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) Q_1\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) x(t_1, t_2)$$

в области $\{(t_1, t_2): t_1 > 0, t_2 > 0\}$,

$$v_3(t_1, t_2) = Q_2\left(-\frac{\partial}{\partial t_2}\right) Q_1\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) x(t_1, t_2)$$

в области $\{(t_1, t)_2: t_1 < \tau_1, t_2 > 0\}$,

$$v_4(t_1, t_2) = Q_2\left(\frac{\partial}{\partial t_2}\right) Q_1\left(-\frac{\partial}{\partial t_1}\right) x(t_1, t_2)$$

в области $\{(t_1, t_2) : t_1 > 0, t_2 < \tau_2\}$ и проводя те же рассуждения, что и с функцией $v_1(t_1, t_2)$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Если при некотором k, $1 \leqslant k \leqslant 2$, $p_k = 0$, то считается, что в (10) соответствующие условия отсутствуют. Если $p_1 = p_2 = 0$, то уравнение (9) вырождается в тождество

$$x(t_1, t_2) = \text{const} \cdot a(t_1, t_2).$$

Замечание 2. Если функция $u(t_1, t_2)$ известна, то «обобщенная составляющая» функции $y(t_1, t_2)$ и ее преобразование Фурье, в принципе, легко вычисляются (см., например, [5]).

Пусть $T = [0, \tau] \times (-\infty, \infty)$, функция $f(\lambda)$ интегрируема по всему R^2 и удовлетворяет равенству (4). Предполагается, что величины $[P(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $\lambda_k^{p_k}[P(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $k = 1, 2$; $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}[P(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $[Q(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $\lambda_k^{p_k}[Q(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$, $k = 1, 2$; $\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}[Q(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$ являются ограниченными. Относительно функции $a(t_1, t_2)$ предполагаем, что при каждом $t_1 \in [0, \tau]$ она интегрируема с квадратом по t_2 на $(-\infty, \infty)$ и, кроме того, обладает следующим свойством.

Определим функцию $b(t_1, \lambda_2)$ равенством

$$b(t_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_2 t_2} a(t_1, t_2)\, dt_2, \quad \lambda_2 \in (-\infty, \infty).$$

Будет предполагаться, что функция $b(t_1, \lambda_2)$, $t_1 \in [0, \tau]$ обладает при каждом λ_2 всеми непрерывными производными по t_1 до $\frac{\partial^{q_1 - p_1}}{\partial t_1^{q_1 - p_1}} b(t_1, \lambda_2)$ включительно (обозначение 4).

Далее, поскольку $Q_{\lambda_2}(\lambda_1)$ — положительный многочлен, то его можно представить в виде квадрата абсолютной величины некоторого другого многочлена [2], причем последний можно выбрать либо так, чтобы все его корни лежали в верхней полуплоскости, либо так, чтобы все они лежали в нижней полуплоскости. В первом случае будем писать

$$Q_{\lambda_2}(\lambda_1) = |Q^+_{\lambda_2}(\lambda_1)|^2,$$

а во втором

$$Q_{\lambda_2}(\lambda_1) = |Q^-_{\lambda_2}(\lambda_1)|^2.$$

Очевидно, можем считать, что

$$Q^-_{\lambda_2}(\lambda_1) = \overline{Q^+_{\lambda_2}}(\lambda_1). \tag{12}$$

Знак сопряжения в правой части (12) имеет следующий смысл: если

$$Q^+_{\lambda_2}(\lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\lambda_2)\lambda_1^k,$$

то

$$\overline{Q^+_{\lambda_2}}(\lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k(\lambda_2)}\lambda_1^k.$$

Определим функцию $u(t_1, \lambda_2)$, $t_1 \in [0, \tau]$, $\lambda_2 \in (-\infty, \infty)$ как решение уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}, \lambda_2\right) v(t_1, \lambda_2) = b(t_1, \lambda_2) \tag{13}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} Q^+_{\lambda_2}\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}\right)\frac{\partial^m}{\partial t_1^m} v(t_1, \lambda_2) &= 0 \qquad \text{при } t_1 = 0+0, \\ Q^-_{\lambda_2}\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}\right)\frac{\partial^m}{\partial t_1^m} v(t_1, \lambda_2) &= 0 \qquad \text{при } t_1 = \tau-0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$m = \overline{0, \tfrac{1}{2}p_1 - 1}.$$

При сделанных выше допущениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Решение $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ уравнения (3), принадлежащее пространству $L_T(f)$, является преобразованием Фурье некоторой обобщенной функции $y_{\lambda_2}(t_1)$. Для каждого λ_2 эта функция равна нулю вне $[0, \tau]$ и (обычной) функции

$$Q^-_{\lambda_2}\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}\right) Q^+_{\lambda_2}\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}\right) u(t_1, \lambda_2)$$

в $(0, \tau)$, а на границе отрезка $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau$ является линейной комбинацией δ-функций и их производных.

Доказательство. Определим, как и выше, функцию $x(t_1, t_2)$ равенством

$$x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_2 t_2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1}\varphi(\lambda_1, \lambda_2)\frac{d\lambda_1}{Q(\lambda_1, \lambda_2)}\right] d\lambda_2.$$

Тем же путем, что и в теореме 1, можно убедиться, что функция $x(t_1, t_2)$ имеет все непрерывные частные производные, по крайней мере до $\frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial t_1^{p_1}\partial t_2^{p_2}} x(t_1, t_2)$ включительно. Пусть $0 \leqslant r_j \leqslant p_j$, $j = 1, 2$. Имеем

$$\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}} x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_2 t_2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1}\varphi(\lambda_1, \lambda_2)\frac{(-i\lambda_1)^{r_1}(-i\lambda_2)^{r_2}}{Q(\lambda_1, \lambda_2)}d\lambda_1\right]d\lambda_2. \tag{15}$$

Ввиду сделанных предположений относительно многочлена $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ функция $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)(-i\lambda_1)^{r_1}(-i\lambda_2)^{r_2}[Q(\lambda_1, \lambda_2)]^{-1}$ интегрируема с квадратом в R^2. Из справедливости равенства (15) следует, что этим же свойством обладает функция

$$\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}} x(t_1, t_2), \qquad 0 \leqslant r_j \leqslant p_j, \quad j = 1, 2.$$

Поэтому для почти всех t_1 эта функция интегрируема с квадратом по t_2 на $(-\infty, \infty)$. Отсюда, если обозначить через $v(t_1, \lambda_2)$ преобразование Фурье по t_2 функции $x(t_1, t_2)$, то получим

$$\frac{\partial^{r_1}}{\partial t_1^{r_1}} v(t_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1}\frac{\varphi(\lambda_1, \lambda_2)(-i\lambda_1)^{r_1}}{Q(\lambda_1, \lambda_2)}d\lambda_1, \qquad 0 \leqslant r_1 \leqslant p_1.$$

Из последнего равенства и (15) следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_2 t_2}\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}} x(t_1, t_2)\,dt_2 = (-i\lambda_1)^{r_1}\frac{\partial^{r_1}}{\partial t_1^{r_1}} v(t_1, \lambda_2). \tag{16}$$

Поскольку функция $x(t_1, t_2)$ удовлетворяет уравнению

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}, \; i\frac{\partial}{\partial t^2}\right) x(t_1, t_2) = a(t_1, t_2), \tag{17}$$

то, выполняя в (17) преобразование Фурье по t_2 и учитывая (16), получаем

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}, \; \lambda_2\right) v(t_1, \lambda_2) = b(t_1, \lambda_2), \tag{18}$$

где

$$v(t_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1}\frac{\varphi(\lambda_1, \lambda_2)}{Q(\lambda_1, \lambda_2)}d\lambda_1.$$

Поскольку $v(t_1, \lambda_2)$ можно записать еще в виде

$$v(t_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1}\frac{\varphi(\lambda_1, \lambda_2)}{|Q^{+}_{\lambda_2}(\lambda_1)|^2}d\lambda_1$$

или

$$v(t_1,\ \lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1} \frac{\varphi(\lambda_1, \lambda_2)}{|Q_{\lambda_2}^{-}(\lambda_1)|^2}\, d\lambda_1,$$

то, пользуясь леммой 1 и рассуждая так же, как и в [2], получаем граничные условия (14). Рассмотрим $v_{\lambda_2}(t_1)$ (обозначение 1) как обобщенную в смысле Шварца функцию и применим к ней оператор

$$Q_{\lambda_2}^{-}\left(i\, \frac{\partial}{\partial t_1}\right) Q_{\lambda_2}^{+}\left(i\, \frac{\partial}{\partial t_1}\right).$$

Используя равенство (12), видим, что

$$y_{\lambda_2}(t_1) \equiv Q_{\lambda_2}^{-}\left(i\, \frac{\partial}{\partial t_1}\right) Q_{\lambda_2}^{+}\left(i\, \frac{\partial}{\partial t_1}\right) v_{\lambda_2}(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda_1 t_1} \varphi_{\lambda_2}(\lambda_1)\, d\lambda_1.$$

Фиксируя λ_2 и применяя рассуждения [2], завершаем доказательство теоремы.

Автор благодарит А. В. Скорохода за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М., «Наука», 1970.
2. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы, М., Физматгиз, 1963.
3. Розанов Ю. А. Гауссовские бесконечномерные распределения.— Тр. математического института им. Стеклова C VIII, 1968.
4. Розанов Ю. А. К вопросу об эквивалентности вероятностных мер, отвечающих гауссовским стационарным процессам.— Теория вероятности и ее применение, 8, № 3, 1963.
5. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., «Наука», 1965.

S. M. Krasnitsky

ON AN INTEGRAL EQUATION OF RANDOM FIELDS STATISTICS

Summary

The equation

$$\int\limits_{R^2} e^{-i\langle\lambda,t\rangle} \varphi(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = a(t),\ t \in T$$

is studied, where unknown function $\psi(\lambda)$ belongs to some functional space and $a(t)$, $t \in T$ is known function. It is supposed R^2 is the 2-dimentional Euclidian space, T is some subset of R^2,

$\lambda = (\lambda_1 \lambda_2) \in R^2 t = (t_1, t_2) \in T$, $\langle \lambda,\ t \rangle = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$, $f(\lambda) = P(\lambda) \mid Q(\lambda)$ where $P(\lambda)$ and $Q(\lambda)$ are some positive polynomials of λ.

Поступила в редколлегию 27.XII 1971.