Г. Л. КУЛИНИЧ, доц.
Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

В предлагаемой работе рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_\alpha(t) = b_\alpha(t, \xi_\alpha(t))\,dt + d\eta_\alpha(t), \qquad \alpha > 0, \tag{1}$$

где α — параметр, $b_\alpha(t, x) = (b_\alpha^{(i)}(t, x),\ i = \overline{1, m})$ — не случайная функция ($0 \leqslant t \leqslant 1$, $x \in R^m$), удовлетворяющая условию Липшица по x при каждом α равномерно по t, $\eta_\alpha(t) = (\eta_\alpha^{(i)}(t), i = \overline{1, m})$ — случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P) компоненты которого $\eta_\alpha^{(i)}(t)$ являются одномерными непрерывными с вероятностью единица мартингалами относительно неубывающего по t семейства σ-алгебр $F_\alpha(t) \subset F$, и для которых существуют неубывающие с вероятностью 1 случайные процессы $\langle\eta_\alpha^{(i)}(t)\rangle$, $i = \overline{1, m}$ такие, что

$$M([\eta_\alpha^{(i)}(t) - \eta_\alpha^{(i)}(s)]^2/F_\alpha(s)) = M(\langle\eta_\alpha^{(i)}(t)\rangle - \langle\eta_\alpha^{(i)}(s)\rangle/F_\alpha(s))$$

с вероятностью 1 для всех $t \geqslant s \geqslant 0$. Показано, что сам процесс или определенная функция от него $f_\alpha(\xi_\alpha(t))$ при $\alpha \to 0$ слабо сходятся к определенному случайному процессу, который описывает некоторую диффузию частицы в многослойной среде.

Предельное поведение решения $\xi_\alpha(t)$ уравнения (1) рассматривалось при $a_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\, a\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ в работе [5], когда $\eta_\alpha(t)$ — винеровский процесс, а в работе [6] — когда производная $\dot\eta_\alpha(t)$ — стационарный в широком смысле процесс.

Рассмотрим сначала уравнение (1) в одномерном случае и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $\xi_\alpha(t)$ — решение уравнения (1), когда $b_\alpha(t, x)$ — одномерная функция $x \in R^1$, $\eta_\alpha(t)$ — одномерный мартингал, $\xi_\alpha(0) = x_0$. Если:

1) существует непрерывная функция $a_\alpha(x)$ такая, что

$$|b_\alpha(t, x) - a_\alpha(x)| \leqslant \psi_\alpha(t),$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0 \psi_\alpha(s)\,ds = 0, \qquad \left|\int_0^x a_\alpha(u)\,du\right| \leqslant C$$

и равномерно по x в любой конечной области функция

$$f_\alpha(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u a_\alpha(v)\,dv\right\} du \to f(x) \tag{2}$$

при $\alpha \to 0$, где $f(x)$ — непрерывная возрастающая функция;

2) существует ограниченная функция $\sigma^2(x) \geqslant \delta_0 > 0$ непрерывная всюду, за исключением, быть может, точек $x = a_k$, $k = \overline{1, l}$, в которых она имеет разрыв первого рода и

$$\int_0^x \sigma^2(u)\,[f'_\alpha(u)]^{-1}\,du \to f(x)$$

при $\alpha \to 0$ равномерно по x в любой конечной области;

3) $\boldsymbol{M}\,|\eta_\alpha(t)|^6 < \infty, \quad \boldsymbol{M}\,|\langle\eta_\alpha(t)\rangle|^3 \leqslant C$

и вариация $\bigvee\limits_0^1 \Big[\langle\eta_\alpha(t)\rangle - t\Big] \to 0$ при $\alpha \to 0$ так, что и

$$\sup_x |a_\alpha(x)|^3\,\boldsymbol{M}\left(\bigvee_0^1 [\langle\eta_\alpha(t)\rangle - t]\right)^3 \to 0$$

при $\alpha \to 0$;

$$4)\ \int_0^1 \boldsymbol{P}\{\xi_\alpha(s) = a_k\}\,ds = 0, \qquad k = \overline{1, l}, \quad \alpha > 0,$$

то случайный процесс $\xi_\alpha(t)$ при $\alpha \to 0$ слабо сходится к процессу $\varphi(\zeta(t))$, где $\varphi(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, а процесс $\zeta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta(t) = f(x_0) + \int_0^t \sigma(\varphi(\zeta(s)))\,dw(s),$$

где $w(t)$ — винеровский процесс, и условию

$$\int_0^1 \boldsymbol{P}\{\zeta(s) = f(a_k)\}\,ds = 0, \qquad k = \overline{1, l}.$$

Для доказательства нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Если функция $u(t, x)$ и производные $u'_t(t, x)$ $u'_x(t, x)$ непрерывны, а производная $u''_{xx}(t, x)$ терпит разрывы первого рода в точках $x = a_k$, $k = \overline{1, l}$, то для процесса $u(t, \xi_\alpha(t))$ имеет место соотношение, аналогичное формуле Ито:

$$u(t, \xi_\alpha(t)) = u(0, x_0) + \int_0^t [u'_s(s, \xi_\alpha(s)) + u'_x(s, \xi_\alpha(s))\,b_\alpha(s, \xi_\alpha(s))]\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t u''_{xx}(s, \xi_\alpha(s))\,d\langle\eta_\alpha(s)\rangle + \int_0^t u'_x(s, \xi_\alpha(s))\,d\eta_\alpha(s), \tag{3}$$

где последний интеграл определен в [8] и в специальном случае в [2].

Поскольку формула (3) имеет место если непрерывна и $u''_{xx}(t, x)$, то доказательство леммы легко получить путем сглаживания функции $u(t, x)$ в окрестности точек $x = a_k$, а потом, учитывая условие 4) теоремы, проделать предельный переход.

Лемма 2. Пусть процесс $g(t)$ измерим относительно σ-алгебры $F_\alpha(t)$ при каждом t и ограничен неслучайной постоянной. Тогда для стохастического интеграла

$$\gamma(t) = \int_0^t g(s)\, d\eta_\alpha(s)$$

справедливо неравенство

$$M|\gamma(t)|^{2+\delta} \leqslant C_\delta M\left(\int_0^t g^2(s)\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \tag{4}$$

для любого $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, а C_δ — постоянная, зависящая только от δ.

Доказательство. Так же, как и в случае стохастических интегралов по винеровскому процессу [1], можно показать, что $\gamma(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 мартингал. Докажем неравенство для ступенчатых функций. Пусть $g(s)$ равно $g(s_i)$ при $s_i \leqslant s < s_{i+1}$, где $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n+1} = t$. Тогда, учитывая условие $M|\eta_\alpha(t)|^6 < \infty$ и ограниченность $g(s)$, имеем $M|\eta_\alpha(t)|^{3(1+\delta)} < \infty$. Поэтому

$$M\int_0^t |\gamma(s)|^{2(1+\delta)} g^2(s)\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle \leqslant M \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\gamma(s)|^{2(1+\delta)} \int_0^t g^2(s)\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left(M \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\gamma(s)|^{3(1+\delta)}\right)^{\frac{2}{3}} \left(M\left[\int_0^t g^2(s)\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle\right]^3\right)^{\frac{1}{3}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\left[\frac{3(1+\delta)}{2+3\delta}\right]^{3(1+\delta)} M|\gamma(t)|^{3(1+\delta)}\right)^{\frac{2}{3}} \left(M[\langle\eta_\alpha(t)\rangle - \langle\eta_\alpha(0)\rangle]^3\right)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

и, следовательно,

$$M\int_0^t |\gamma(s)|^{1+\delta}[\operatorname{sign}\gamma(s)]\, g(s)\, d\eta_\alpha(s) = 0.$$

Используя формулу (3) для процесса $|\gamma(t)|^{2+\delta}$, получим

$$M|\gamma(t)|^{2+\delta} = \frac{(2+\delta)(1+\delta)}{2} M\int_0^t |\gamma(s)|^\delta g^2(s)\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2+\delta)(1+\delta)}{2}\left(M \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\gamma(s)|^{2+\delta}\right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \left(M\left[\int_0^t g^2(s)\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle\right]^{\frac{2+\delta}{2}}\right)^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Отсюда и из неравенства для мартингалов

$$M \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\gamma(s)|^{2+\delta} \leqslant \left(\frac{2+\delta}{1+\delta}\right)^{2+\delta} M |\gamma(t)|^{2+\delta}$$

следует соотношение (4) для ступенчатых функций $g(s)$. С помощью предельного перехода легко получить доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Обозначим

$$\zeta_\alpha(t) = f_\alpha(\xi_\alpha(t)), \quad \gamma_\alpha(t) = \int_0^t f'_\alpha(\xi_\alpha(s))\, d\eta_\alpha(s),$$

$$\beta_\alpha(t) = \frac{1}{2}\int_0^t f''_\alpha(\xi_\alpha(s))\, d[\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s],$$

$$\delta_\alpha(t) = \int_0^t f'_\alpha(\xi_\alpha(s))\,[b_\alpha(s, \xi_\alpha(s)) - a_\alpha(\xi_\alpha(s))]\, ds,$$

где $f_\alpha(x)$ задана соотношением (2).

Поскольку функция $f_\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то для процесса $\zeta_\alpha(t)$ справедлива формула (3). Поэтому из соотношения

$$f'_\alpha(x)\, a_\alpha(x) + \frac{1}{2} f''_\alpha(x) = 0$$

получаем

$$\zeta_\alpha(t) = f_\alpha(x_0) + \gamma_\alpha(t) + \beta_\alpha(t) + \delta_\alpha(t),$$

а из неравенств

$$|\beta_\alpha(t)| \leqslant C \sup_x |a_\alpha(x)| \bigvee_0^1 [\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s],$$

$$|\delta_\alpha(t)| \leqslant C \int_0^t \psi_\alpha(s)\, ds$$

и условий теоремы, имеем

$$\zeta_\alpha(t) = f_\alpha(x_0) + \gamma_\alpha(t) + 0(1), \tag{5}$$

где 0 (1) — величины, стремящиеся к 0 при $\alpha \to 0$.

Легко видеть, что

$$M[\zeta_\alpha(t)]^2 \leqslant C, \quad M[\zeta_\alpha(t+\Delta) - \zeta_\alpha(t)]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\Delta + M \bigvee_t^{t+\Delta} [\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s]\right] + 0(1) = C\Delta + 0(1),$$

$$M[\eta_\alpha(t)]^2 \leqslant C, \quad M[\eta_\alpha(t+\Delta) - \eta_\alpha(t)]^2 \leqslant C\Delta + 0(1).$$

Поэтому (см. [1]) процесс $(\zeta_\alpha(t), \eta_\alpha(t), \langle\eta_\alpha(t)\rangle)$ обладает свойством компактности, т. е. для любой последовательности $\alpha'_n \to 0$

существует подпоследовательность $\alpha_n \to 0$ и процесс $(\hat{\zeta}_{\alpha_n}(t), \hat{\eta}_{\alpha_n}(t), \langle\hat{\eta}_{\alpha_n}(t)\rangle)$ с теми же конечномерными распределениями, что и процесс $(\zeta_{\alpha_n}(t), \eta_{\alpha_n}(t), \langle\eta_{\alpha_n}(t)\rangle)$ и $\hat{\zeta}_{\alpha_n}(t) \to \zeta(t)$, $\hat{\eta}_{\alpha_n}(t) \to w(t)$, $\langle\hat{\eta}_{\alpha_n}(t)\rangle \to t$ по вероятности при $\alpha_n \to 0$, где $\zeta(t)$ и $w(t)$ — некоторые случайные процессы. Следовательно, на основании (5)

$$\hat{\zeta}_{\alpha_n}(t) = f_{\alpha_n}(x_0) + \hat{\gamma}_{\alpha_n}(t) + 0(1), \tag{6}$$

где

$$\hat{\gamma}_{\alpha_n}(t) = \int_0^t f'_{\alpha_n}(\varphi_{\alpha_n}(\hat{\zeta}_{\alpha_n}(s)))\, d\hat{\eta}_{\alpha_n}(s),$$

а $\varphi_{\alpha_n}(x)$ — функция, обратная к $f_{\alpha_n}(x)$.

Покажем, что

$$\int_0^t [f'_\alpha(\xi_\alpha(s))\, d\langle\eta_\alpha(s)\rangle]^2 - \int_0^t \sigma^2(\xi_\alpha(s))\, ds \xrightarrow{P} 0 \tag{7}$$

при $\alpha \to 0$. Для этого возьмем одно из решений уравнения

$$\Phi'_\alpha(x)\, a_\alpha(x) + \frac{1}{2}\Phi''_\alpha(x) = [f'_\alpha(x)]^2 - \sigma^2(x),$$

а именно,

$$\Phi_\alpha(x) = 2\int_0^x f'_\alpha(u)\left[f_\alpha(u) - \int_0^u \sigma^2(v)\,[f'_\alpha(v)]^{-1} dv\right] du.$$

Поскольку функции $\Phi_\alpha(x)$ и $\Phi'_\alpha(x)$ непрерывны при каждом α, а $\Phi''_\alpha(x)$ имеет разрывы первого рода в точках a_k, $k = \overline{1, l}$, то по лемме I для процесса $\Phi_\alpha(\xi_\alpha(t))$ справедливо соотношение (3). Поэтому

$$\int_0^t ([f'_\alpha(\xi_\alpha(s))]^2 - \sigma^2(\xi_\alpha(s)))\, ds = \Phi_\alpha(\xi_\alpha(t)) - \Phi_\alpha(x_0) -$$
$$- \int_0^t \Phi'_\alpha(\xi_\alpha(s))\, d\eta_\alpha(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''_\alpha(\xi_\alpha(s))\, d\,[\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s] -$$
$$- \int_0^t \Phi'_\alpha(\xi_\alpha(s))\,[b_\alpha(s, \xi_\alpha(s)) - a_\alpha(\xi_\alpha(s))]\, ds. \tag{8}$$

Из условий теоремы следует, что $\Phi_\alpha(x)$ и $\Phi'_\alpha(x)$ стремятся к 0 равномерно по $|x| \leqslant C$ для любой постоянной C при $\alpha \to 0$. Кроме того,

$$|\Phi_\alpha(x)| \leqslant Cf^2_\alpha(x), \quad |\Phi'_\alpha(x)| \leqslant C\,|f_\alpha(x)|,$$
$$\zeta^2_\alpha(t) \leqslant C\,[1 + \gamma^2_\alpha(t) + \beta^2_\alpha(t) + \delta^2_\alpha(t)].$$

Значит,

$$M\,|\Phi_\alpha(\xi_\alpha(t))| \leqslant M\,|\Phi_\alpha(\xi_\alpha(t))|\,\chi_{|\xi_\alpha(t)|\leqslant C_1} + C\,[P\,\{|\xi_\alpha(t)| > C_1\} +$$

$$+ M\beta_\alpha^2(t) + M\delta_\alpha^2(t) + (M\,|\gamma_\alpha(t)|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}}(P\,\{|\xi_\alpha(t)| > C_1\})^{\frac{\delta}{2+\delta}}].$$

Учитывая равномерную ограниченность по α выражения $M\,|\gamma_\alpha(t)|^{2+\delta}$ и очевидное соотношение $M\,\xi_\alpha^2(t) \leqslant CM\,\zeta_\alpha^2(t)$, получим

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}}\, M\,|\Phi_\alpha(\xi_\alpha(t))| \leqslant \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, а из произвольности ε следует

$$\Phi_\alpha(\xi_\alpha(t)) \xrightarrow{P} 0 \qquad (9$$

при $\alpha \to 0$. Аналогично можно показать, что $\Phi_\alpha'(\xi_\alpha(t)) \xrightarrow{P} 0$ при $\alpha \to 0$. Поэтому

$$\int_0^t \Phi_\alpha'(\xi_\alpha(s))\,[b_\alpha(s,\ \xi_\alpha(s)) - a_\alpha(\xi_\alpha(s))]\,ds \xrightarrow{P} 0, \qquad (9$$

а из соотношения

$$M\left[\int_0^t \Phi_\alpha'(\xi_\alpha(s))\,d\eta_\alpha(s)\right]^2 = M\int_0^t [\Phi_\alpha'(\xi_\alpha(s))]^2\,d\langle\eta_\alpha(s)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t M\,[\Phi_\alpha'(\xi_\alpha(s))]^2\,ds + M\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\Phi_\alpha'(\xi_\alpha(s))|^2 \bigvee_0^t [\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s] \leqslant$$

$$\leqslant 0(1) + CM\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\gamma_\alpha(s)|^2 \bigvee_0^t [\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s] +$$

$$+ CM\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\beta_\alpha^2(s) \bigvee_0^t [\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s] \leqslant 0(1) +$$

$$+ C_1\,[(M\,|\gamma_\alpha(t)|^3)^{\frac{2}{3}} + (M\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\beta_\alpha(s)|^3)^{\frac{2}{3}}]\left(M\left[\bigvee_0^1 (\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s)\right]^3\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 0(1),$$

и

$$\int_0^t \Phi_\alpha'(\xi_\alpha(s))\,d\eta_\alpha(s) \xrightarrow{P} 0 \qquad (10)$$

при $\alpha \to 0$. Так как $|\Phi_\alpha''(x)| \leqslant C\,[1 + |x a_\alpha(x)|]$, то

$$\left|\int_0^t \Phi_\alpha''(\xi_\alpha(s))\,d\,[\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\Phi_\alpha''(\xi_\alpha(s))| \bigvee_0^1 [\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s] \leqslant$$

$$\leqslant 0(1) + C_1 \sup_x |a_\alpha(x)| \bigvee_0^1 [\langle \eta_\alpha(s)\rangle - s](1 + \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\gamma_\alpha(s)| +$$

$$+ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\beta_\alpha(s)| + \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |\delta_\alpha(s)|) \xrightarrow{P} 0 \tag{11}$$

при $\alpha \to 0$. Из (8) — (11) получаем (7). Следовательно,

$$\int_0^t [f'_{\alpha_n}(\varphi_{\alpha_n}(\hat{\zeta}_{\alpha_n}(s)))]^2 d\langle \hat{\eta}_{\alpha_n}(s)\rangle - \int_0^t \sigma^2(\varphi_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(s)))\, ds \to 0 \tag{12}$$

по вероятности при $\alpha_n \to 0$. По условию 1) теоремы имеем

$$\varphi_{\alpha_n}(\hat{\zeta}_{\alpha_n}(t)) \to \varphi(\zeta(t))$$

по вероятности при $\alpha_n \to 0$, где $\varphi(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, а для того, чтобы

$$\int_0^t \sigma^2(\varphi_{\alpha_n}(\hat{\zeta}_{\alpha_n}(s)))\, ds \to \int_0^t \sigma^2(\varphi(\zeta(s)))\, ds \tag{13}$$

по вероятности, достаточно показать, что

$$\int_0^t \boldsymbol{P}\{\varphi(\zeta(s)) = a_k\}\, ds = 0, \qquad k = \overline{1,\ l}. \tag{14}$$

Для этого введем функцию

$$Q_\alpha(x) = 2\int_0^x f'_\alpha(u)\left[\int_0^u q(v)\,[f'_\alpha(v)]^{-1}\, dv\right] du,$$

где $q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция равная 1 при $|x - a_k| \leqslant \varepsilon$ и 0 при $|x - a_k| > \varepsilon + \varepsilon_1$.

Так как функция $Q_\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то на основании (3)

$$\boldsymbol{M}\int_0^t q(\xi_\alpha(s))\, ds = \boldsymbol{M} Q_\alpha(\xi_\alpha(t)) - Q_\alpha(x_0) -$$

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{M}\int_0^t Q''_\alpha(\xi_\alpha(s))\, d[\langle \eta_\alpha(s)\rangle - s] + \boldsymbol{M}\int_0^t Q'_\alpha(\xi_\alpha(s))\ [b_\alpha(s,\ \xi_\alpha(s)) -$$

$$- a_\alpha(\xi_\alpha(s))]\, ds.$$

Очевидно,

$$|Q_\alpha(x)| \leqslant C|f_\alpha(x)|(\varepsilon + \varepsilon_1), \quad |Q''_\alpha(x)| \leqslant C[q(x) + |a_\alpha(x)|(\varepsilon + \varepsilon_1)],$$

$$\chi_{|x - a_k| \leqslant \varepsilon} \leqslant q(x).$$

Поэтому

$$\int_0^t \boldsymbol{P}\{|\xi_\alpha(s) - a_k| \leqslant \varepsilon\}\, ds \leqslant C[\varepsilon + \varepsilon_1](1 + 0(1)) +$$

$$+ C\boldsymbol{M}\left|\int_0^t q(\xi_\alpha(s))\, d[\langle\eta_\alpha(s)\rangle - s].\right.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{\alpha\to 0}} \int_0^t \boldsymbol{P}\{|\xi_\alpha(s) - a_k| < \varepsilon\} \leqslant C[\varepsilon + \varepsilon_1]$$

и следовательно,

$$\int_0^t \boldsymbol{P}\{|\varphi(\zeta(s)) - a_k| < \varepsilon\}\, ds \leqslant C[\varepsilon + \varepsilon_1].$$

Из произвольности ε и ε_1 следует (14). Из (6) вытекает, что $\hat{\zeta}_{\alpha_n}(t) \to \zeta(t) - f(x_0)$ при $\alpha_n \to 0$. На основании свойств стохастическ интегралов

$$\boldsymbol{M}(\hat{\gamma}_{\alpha_n}(t)/\hat{F}_{\alpha_n}(s)) = \hat{\gamma}_{\alpha_n}(s), \quad \boldsymbol{M}([\gamma_{\alpha_n}(t) - \gamma_{\alpha_n}(s)]^2/\hat{F}_{\alpha_n}(s)) =$$

$$= \boldsymbol{M}\left(\int_s^t [f'_{\alpha_n}(\varphi_{\alpha_n}(\hat{\zeta}_{\alpha_n}(s)))]^2\, d\langle\hat{\eta}_{\alpha_n}(s)\rangle/\hat{F}_{\alpha_n}(s)\right), \qquad t \geqslant s \geqslant 0$$

с вероятностью I, а на основании леммы 2

$$\boldsymbol{M}|\hat{\gamma}_{\alpha_n}(t)|^3 \leqslant C$$

и

$$\boldsymbol{M}|\hat{\gamma}_{\alpha_n}(t(t+\Delta) - \hat{\gamma}_{\alpha_n}(t)|^{2+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant C_\delta \boldsymbol{M}\left(\int_t^{t+\Delta} [f'_{\alpha_n}(\xi_{\alpha_n}(s))]^2\, d\langle\eta_{\alpha_n}(s)\rangle\right)^{\frac{2+\delta}{2}} \leqslant C\Delta^{\frac{2+\delta}{2}} + 0(1)$$

для некоторого $0 < \delta < 1$. Переходя в этих соотношениях к преде при $\alpha_n \to 0$, получим, что процесс $\zeta(t)$ непрерывный с вероятност I мартингал и

$$\boldsymbol{M}([\zeta(t+\Delta) - \zeta(t)]^2/\hat{F}(t)) = \boldsymbol{M}\left(\int_t^{t+\Delta} \sigma^2(\varphi(\zeta(s)))\, ds/\hat{F}(t)\right)$$

с вероятностью I. Поэтому [3]

$$\zeta(t) = f(x_0) + \int_0^t \sigma(\varphi(\zeta(s)))\, dw(s), \qquad (1$$

где $w(t)$ — некоторый винеровский процесс. Итак, мы показали, что конечномерные распределения процесса $f_{\alpha_n}(\zeta_{\alpha_n}(t))$ при $\alpha_n \to 0$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\zeta(t)$. Так как условия (14) и (15) однозначно определяют процесс $\zeta(t)$ [4], то из произвольности последовательности α_n' следует слабая сходимость процесса $f_\alpha(\xi_\alpha(t))$ к процессу $\zeta(t)$. Следовательно, теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\xi_\alpha(t) = (\xi_\alpha^{(i)},\ i = \overline{1,\ m})$ — решение уравнения (1), $\xi_\alpha(0) = (x_0^{(i)},\ i = \overline{1,\ m})$.

Если существуют функции от одной переменной $a_\alpha^{(i)}(x_i)$, $i = \overline{1,\ m}$ такие, что

$$|b_\alpha^{(i)}(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_m) - a_\alpha^{(i)}(x_i)| \leqslant \psi_i(t)$$

и

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^t \psi_i(s)\,ds = 0, \qquad i = \overline{1,\ m},$$

а для каждой из них и каждой компоненты процессов $\xi_\alpha(t)$ и $\eta_\alpha(t) = (\eta_\alpha^{(i)}(t),\ i = \overline{1,\ m})$ выполняются условия теоремы 1 при соответствующих функциях $f^{(i)}(x_i)$, $[\sigma^{(i)}(x_i)]^2$, $i = \overline{1,\ m}$, кроме того, $M\eta_\alpha^{(i)}(t)\,\eta_\alpha^{(j)}(t) \to 0$ при $\alpha \to 0$ для $i \neq j$, то процесс $\xi_\alpha(t)$ слабо сходится при $\alpha \to 0$ к процессу $(\varphi^{(i)}(\zeta^{(i)}(t)),\ i = \overline{1,\ m})$ где $\varphi^{(i)}(x_i)$ — функции, обратные к соответствующим функциям $f^{(i)}(x_i)$, процессы $\zeta^{(i)}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\zeta^{(i)}(t) = f^{(i)}(x_0^{(i)}) + \int_0^t \sigma^{(i)}(\varphi^{(i)}(\zeta^{(i)}(s))\,dw^{(i)}(s),$$

где $w^{(i)}(t)$ — независимые одномерные винеровские процессы, и условию

$$\int_0^1 \boldsymbol{P}\{\zeta^{(i)}(s) = f^{(i)}(a_k^{(i)})\}\,ds = 0, \quad k = \overline{1,\ l},\ i = \overline{1,\ m}.$$

Доказательство следует из теоремы 1, если провести аналогичные рассуждения для каждой из компонент процесса $\xi_\alpha(t)$.

Теорема 3. Пусть $\xi_\alpha(t)$ — решение уравнения (1), $\xi_\alpha(0) = x_0$. Если:

1) существует дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t функция $f_\alpha(t,\ x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} f_\alpha(t,\ x) + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(t,\ x)\right] b_\alpha^{(i)}(t,\ x) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\alpha(t,\ x) = 0$$

для всех $0 < t \leqslant 1$, $\alpha > 0$, $x \in R^m$ и такая, что

$$0 < \delta \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(t, x) \right]^2 \leqslant C, \ \lim_{\alpha \to 0} f_\alpha(0, x_0) = f(x_0)$$

и для некоторой функции от одной переменной $\sigma^2(x_1) \geqslant \delta > 0$ непрерывной всюду, за исключением точек $x_1 = a_k$, $k = \overline{1, l}$, в которых она может иметь разрывы первого рода и

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup_{\substack{|f_\alpha(t,x)| \leqslant C \\ |f_\alpha(t,x) - a_k| \geqslant \varepsilon}} \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(t, x) \right)^2 - \sigma^2(f_\alpha(t, x)) \right] = 0$$

для любых C и ε;

2)
$$\boldsymbol{M} |\eta_\alpha(t)|^6 < \infty, \ \boldsymbol{M} |\langle \eta_\alpha^{(i)}(t) \rangle|^3 \leqslant C,$$

$$\boldsymbol{M} \eta_\alpha^{(i)}(t) \eta_\alpha^{(j)}(t) = 0, \ i \neq j$$

и вариация $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} \left[\langle \eta_\alpha^{(i)}(t) \rangle - t \right] \to 0$ при $\alpha \to 0$ для $i = \overline{1, m}$ так что

$$\lim_{\alpha \to 0} M \left(\sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ |x|}} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\alpha(s, x) \right| \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}} [\langle \eta_\alpha^{(i)}(t) \rangle - t] \right)^2 = 0,$$

то процесс $f_\alpha(t, \xi_\alpha(t))$ при $\alpha \to 0$ слабо сходится к процессу $\zeta(t)$, который удовлетворяет уравнению

$$\zeta(t) = f(x_0) + \int_0^t \sigma(\zeta(s))\, dw(s),$$

где $w(t)$ — некоторый винеровский процесс, и условию

$$\int_0^1 \boldsymbol{P}\{\zeta(s) = a_k\}\, ds = 0, \ k = \overline{1, l}.$$

Доказательство. Положим $\zeta_\alpha(t) = f_\alpha(t, \xi_\alpha(t))$,

$$\gamma_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(s, \xi_\alpha(s))\, d\eta_\alpha^{(i)}(s),$$

$$\beta_\alpha(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_\alpha(s, \xi_\alpha(s))\, d[\langle \eta_\alpha^{(i)}(s) \rangle - s].$$

Тогда по формуле (3)

$$\zeta_\alpha(t) = \zeta_\alpha(0) + \gamma_\alpha(t) + \beta_\alpha(t).$$

Поскольку $M[\beta_\alpha(t)]^2 \to 0$ при $\alpha \to 0$, а производные $\frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(t, x)$ ограничены равномерно по α, s и x, то

$$M[\zeta_\alpha(t)]^2 \leqslant C, M[\zeta_\alpha(t+\Delta) - \zeta_\alpha(t)]^2 \leqslant C\Delta + 0(1),$$

а на основании леммы 2

$$M[\gamma_\alpha(t+\Delta) - \gamma_\alpha(t)]^{2+\delta} \leqslant C_\delta \Delta^{\frac{2+\delta}{2}}$$

для $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Далее, применив формулу (3) к процессу $Q(\gamma_\alpha(t))$, где

$$Q(x) = \int_0^x \left(\int_0^u q(v)\, dv \right) du, \qquad x \in R^1,$$

а $q(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, равная 1 при $|x - a_k| < \varepsilon$ и 0 при $|x - a_k| > \varepsilon + \varepsilon_1$, получим

$$\int_0^1 P\{|\gamma_\alpha(s) - a_k| < \varepsilon\}\, ds \leqslant C(\varepsilon + \varepsilon_1).$$

Поэтому

$$\int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(s, \xi_\alpha(s)) \right)^2 - \sigma^2(\zeta_\alpha(s)) \right] ds \xrightarrow{P} 0$$

при $\alpha \to 0$. Теперь, учитывая то, что для процесса $\zeta_\alpha(t)$ выполняются условия компактности, $\gamma_\alpha(t)$ — мартингал, для доказательства теоремы достаточно провести рассуждения теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киевского университета, 1961.
2. Скороход А. В. О локальном строении непрерывных марковских процессов.— Теория вероятн. и ее примен., **11**, 3, 1966.
3. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы М., ИЛ, 1956.
4. Гирсанов И. В. О стохастическом интегральном уравнении Ито,— ДАН СССР, **138**, 1, 1961.
5. Кулинич Г. Л. Асимптотическое поведение неустойчивого решения стохастического однородного диффузионного уравнения.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 5, 1971.
6. Кулинич Г. Л. Асимптотическое поведение решения дифференциального уравнения первого порядка со случайной правой частью.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 1, 1970.
7. Kunita H., Watanabe S. On square integradle supermartingales.— Nagoya Math. J., 1967, **30**, Aug., 209—245.
8. Meyer P. A. A decomposition theorem for supermartingales.— Illinois J. Math., **6**, No. 2, 1962.

G. L. Kulinich

SOME LIMIT THEOREMS FOR PARAMETER DEPENDING STOCHASTIC DIFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The stochastic differential equation

$$d\xi_\alpha(t) = a_\alpha(t, \xi_\alpha(t))\,dt + \eta_\alpha(t), \qquad 0 < t \leqslant 1,\ \alpha > 0$$

is considered, where α is a parameter $a_\alpha(t, x)$ is a non — random vector — valu function and $\eta_\alpha(t)$ is a square integrable allmast surely continious martingal. It proved the solution $\xi_\alpha(t)$ (or some function $f_\alpha(t, \xi_\alpha(t))$) tends to the solution of t stochastic diffusion equation and its diffusion coeffitient may by discontinuo

Поступила в редколлегию 29.II 1972.