В. И. МАСОЛ, инж.
ИК АН УССР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ РЕГЕНЕРИРУЮЩИМ УСТОЙЧИВЫМ ПРОЦЕССОМ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ — неотрицательный устойчивый процесс с независимыми приращениями (для определенности будем считать его непрерывным справа с вероятностью единица) и преобразованием Лапласа

$$M \exp\{-s\xi(t)\} = \exp\{-cts^{\alpha}\},$$

здесь $c = \text{const} > 0$, $\alpha = \text{const} \in (0,\ 2)$, $\alpha \neq 1$ *). Пусть также τ_k, $k = 1, \ldots$ — независимая от $\xi(t)$, $t \geqslant 0$ последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с функцией распределения $F(x)$.

Введем в рассмотрение процесс

$$\zeta(t) = \xi(t) - \xi(\varkappa_k) \text{ для } t \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1}), \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

где

$$\varkappa_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k,\ n \geqslant 0.^{**)}$$

Случайный процесс $\zeta(t)$, $t \geqslant 0$ естественно назвать регенерирующим устойчивым процессом с независимыми приращениями. Последовательность $\varkappa_n$, $n \geqslant 1$ представляет собой последовательность моментов регенерации процесса $\zeta(t)$, $t \geqslant 0$.

Обозначим $\tau_z = \inf(t : \zeta(t) > z)$, $z \geqslant 0$ момент достижения процессом $\zeta(t)$, $t \geqslant 0$ уровня z,

$$F(\alpha, \beta, x) = P\{\zeta_1 + \zeta_2 < x\}.$$

Здесь $\beta \in (0,\ 1)$, $x \in (-\infty,\ \infty)$, ζ_i, $i = 1,\ 2$ — независимые неотрицательные случайные величины, для которых

$$P\{\zeta_1 < x\} = F_1(\alpha, \beta, x) = \rho \int\limits_{x^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} y^{\alpha\beta} f_{\alpha}(y)\, dy,$$

---

*) Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в работе [1].

**) Здесь и ниже $\sum\limits_{k=1}^{0} = 0$.

где

$$\rho^{-1} = \int_0^\infty y^{\alpha\beta} f_\alpha(y)\, dy,$$

$f_\alpha(y)$ — плотность распределения случайной величины $\xi(1)$;

$$P\{\zeta_2 < x\} = F_2(\alpha, \beta, x),$$

где $F_2(\alpha, \beta, x)$ — функция распределения, преобразование Фурь[е] которой имеет вид

$$Me^{is\zeta_2} = [1 - \psi_{\alpha\beta}(s)]^{-1},$$

$$\psi_{\alpha\beta}(s) = \rho\beta \int_0^\infty P\{\xi(1) < x^{-\frac{1}{\alpha}}\} \frac{e^{isx} - 1}{x^{1+\beta}}\, dx.$$

В работе изучается предельное распределение для случайно[го] функционала τ_z при $z \to \infty$.

Теорема. Если функция распределения $F(x)$ принадлежит о[б]ласти притяжения устойчивого закона с показателем $\beta \in (0, 1)$, т. е.

$$F(x) = 1 - x^{-\beta} h(x),$$

где $h(x)$ — медленно меняющаяся функция, то

$$P\left\{\frac{\tau_z}{z^\alpha} < x\right\} \to F(\alpha, \beta, x)$$

при $z \to \infty$, $x \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть λ_z, ν_z, $\gamma_k(z)$, $k \geqslant 1$ — неза[в]висимые в совокупности случайные величины такие, что:

а) λ_z — случайная величина с функцией распределения,

$$H_z(x) = P\{\theta_z < x / \theta_z \leqslant \tau_1\},$$

где $\theta_z = \inf(s : \xi(s) > z)$;

б) ν_z — геометрически распределенная случайная величин[а]

$$P\{\nu_z = n\} = p_z(1 - p_z)^n,\ n = 0, 1, \ldots$$

с параметром

$$p_z = P\{\theta_z \leqslant \tau_1\} = P\{\xi(\tau_1) > z\};$$

в) $\gamma_k(z)$, $k = 1, \ldots$ — последовательность одинаковых случай[]ных величин с функцией распределения

$$F_z(x) = P\{\tau_1 < x / \theta_z > \tau_1\} = P\{\tau_1 < x / \xi(\tau_1) \leqslant z\}.$$

Нетрудно понять, что для случайной величины τ_z имеет место представление

$$\tau_z \approx \sum_{k=1}^{\nu_z} \gamma_k(z) + \lambda_z.^{*)}$$

---

*) Символ $\xi \approx \eta$ обозначает, что случайные величины ζ и η одинаково распре[]делены.

Переходя к характеристическим функциям получим

$$g_z(s) = \frac{h_z(s)\, p_z}{1-(1-p_z) f_z(s)}, \tag{1}$$

где

$$g_z(s) = Me^{is\tau_z},$$
$$h_z(s) = Me^{is\lambda_z},$$
$$f_z(s) = Me^{is\gamma_1(z)}.$$

Покажем, что

$$h\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right) \to h(s) \text{ при } z \to \infty, \tag{2}$$

где

$$h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dF_1(\alpha, \beta, x).$$

Действительно,

$$P\{\theta_z \leqslant xz^{\alpha}\} = P\{\xi(xz^{\alpha}) > z\} = P\{\xi(1) > x^{-\frac{1}{\alpha}}\}, \tag{3}$$

поэтому

$$P\{\theta_z < xz^{\alpha}, \theta_z \leqslant \tau_1\} = \int_0^{\infty} P\{\theta_z \leqslant \min(x, y)\, z^{\alpha}\}\, dP\{\tau_1 < yz^{\alpha}\} =$$

$$= \int_0^{\infty} P\{\xi(1) > \min(x, y)^{-\frac{1}{\alpha}}\}\, dP\{\tau_1 < yz^{\alpha}\} =$$

$$= \int_0^{x} P\{\tau_1 \geqslant yz^{\alpha}\}\, dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\},$$

откуда

$$P\{\lambda_z < xz^{\alpha}\} = P\{\theta_z < xz^{\alpha}/\theta_z \leqslant \tau_1\} =$$

$$= \frac{\int_0^{x} P\{\tau_1 \geqslant yz^{\alpha}\}\, dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\}}{\int_0^{\infty} P\{\tau_1 \geqslant yz^{\alpha}\}\, dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\}}. \tag{4}$$

Используя разложение плотности $f_{\alpha}(v)$ в ряд при $v \to \infty$ [2] (стр. 60, 61) и то, что $f_{\alpha}(v)$ — плотность одновершинного распределения, легко показать равномерную ограниченность произведения $y^{-\frac{1}{\alpha}-1} f_{\alpha}(y^{-\frac{1}{\alpha}})$ на $[0, \infty)$. Следовательно, в силу варианта теоремы Лебега (теоремы о сходимости мажорируемой последовательности) [3] (стр. 151) и теоремы 1 [4] (гл. 8, § 9) имеем для $0 \leqslant x \leqslant$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}} \int_0^x P\{\tau_1 \geqslant yz^\alpha\}\, dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^x \lim_{z\to\infty} \frac{P\{\tau_1 \geqslant yz^\alpha\}}{P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}} y^{-\frac{1}{\alpha}-1} f_\alpha(y^{-\frac{1}{\alpha}})\, dy = \int_{x^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} y^{\alpha\beta} f_\alpha(y)\, dy.$$

Соотношения (4) и (5) дают

$$\lim_{z\to\infty} P\{\lambda_z < xz^\alpha\} = \rho \int_{x^{-\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} y^{\alpha\beta} f_\alpha(y)\, dy,$$

что эквивалентно (2). Кроме того, так как

$$p_z = P\{\xi(\tau_1) > z\} = \int_0^\infty P\{\tau_1 \geqslant yz^\alpha\}\, dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\},$$

то из (5) вытекает

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P\{\xi(\tau_1) > z\}}{P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}} = \rho^{-1}.$$

Покажем теперь, что

$$f_z\left(\frac{s}{z^\alpha}\right)^{n_z} \to e^{\psi_{\alpha\beta}(s)} \text{ при } z \to \infty,$$

где $n_z = \left[\frac{1}{p_z}\right]$.

Воспользуемся для этого центральным критерием сходимости [3].

а) Учитывая соотношения (3), (5) и (6), получаем

$$n_z P\{\gamma_1(z) \geqslant xz^\alpha\} = \frac{n_z}{1-p_z}\int_0^\infty P\{\tau_1 \geqslant xz^\alpha,\ \tau_1 < yz^\alpha\}\, dP\{\theta_z < yz^\alpha\} =$$

$$= \frac{n_z P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}}{(1-p_z) P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}} P\{\tau_1 \geqslant xz^\alpha\} P\{\xi(1) < x^{-\frac{1}{\alpha}}\} -$$

$$- \frac{n_z P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}}{1-p_z}\int_0^\infty \frac{P\{\tau_1 \geqslant yz^\alpha\}}{P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}}\, dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\} \to$$

$$\to \rho x^{-\beta} P\{\xi(1) < x^{-\frac{1}{\alpha}}\} - \rho \int_0^{x^{-\frac{1}{\alpha}}} y^{\alpha\beta} f_\alpha(y)\, dy =$$

$$= \rho\left(x^{-\beta} - \beta \int_x^\infty \frac{P\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\}}{y^{1+\beta}} dy\right) \text{ при } z \to \infty.$$

$$\text{б) } n_z \int_0^\varepsilon x dP\{\gamma_1(z) < xz^\alpha\} = n_z [\int_0^\varepsilon P\{\gamma_1(z) \geqslant xz^\alpha\} dx -$$

$$- \varepsilon P\{\gamma_1(z) \geqslant \varepsilon z^\alpha\}] \to \rho\beta [\varepsilon^{1-\beta}(1-\beta)^{-1} - \int_0^\varepsilon x^{-\beta} P\{\xi(1) > x^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx] \tag{8}$$

при $z \to \infty$.

Действительно, используя теорему о сходимости мажорируемой последовательности и теорему 1 [4] (гл. 8, § 9), находим

$$\lim_{z\to\infty} n_z \int_0^\varepsilon P\{\gamma_1(z) \geqslant xz^\alpha\} dx = \lim_{z\to\infty} \frac{n_z}{1-p_z} \int_0^\varepsilon \int_0^\infty P\{\tau_1 \geqslant xz^\alpha,$$

$$\tau_1 < yz^\alpha\} dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx = \lim_{z\to\infty} \frac{n_z P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}}{1-p_z} \times$$

$$\times \int_0^\varepsilon \frac{P\{\tau_1 \geqslant xz^\alpha\}}{P\{\tau_1 > z^\alpha\}} P\{\xi(1) < x^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx - \lim_{z\to\infty} \frac{n_z P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}}{1-p_z} \times$$

$$\times \int_0^\varepsilon \int_x^\infty \frac{P\{\tau_1 \geqslant yz^\alpha\}}{P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}} dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx =$$

$$= \rho \int_0^\varepsilon x^{-\beta} P\{\xi(1) < x^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx - \rho \int_0^\varepsilon \lim_{z\to\infty} \int_x^\infty \frac{P\{\tau_1 \geqslant yz^\alpha\}}{P\{\tau_1 \geqslant z^\alpha\}} \times$$

$$\times dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx = \rho\left(\int_0^\varepsilon x^{-\beta} P\{\xi(1) < x^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx -\right.$$

$$\left. - \int_0^\varepsilon \int_x^\infty y^{-\beta} dP\{\xi(1) > y^{-\frac{1}{\alpha}}\} dx\right) \tag{9}$$

(последний предельный переход под знаком интеграла выполнен согласно (5)). Справедливость соотношения (8) следует теперь из п. а) и соотношения (9).

$$\text{в) } \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{z\to\infty}} n_z \left(\int_0^\varepsilon x^2 dP\{\gamma_1(z) < xz^\alpha\} - \left(\int_0^\varepsilon x dP\{\gamma_1(z) < xz^\alpha\}\right)^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{\lim_{z\to\infty}} n_z \int_0^\varepsilon x^2 dP\{\gamma_1(z) < xz^\alpha\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\lim_{z\to\infty}}\, \varepsilon n_z \int_0^{\varepsilon} x dP\{\gamma_1(z) < xz^{\alpha}\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\rho\beta\, [\varepsilon^{1-\beta}(1-\beta)^{-1} -$$

$$-\int_0^{\varepsilon} x^{-\beta} P\{\xi(1) > x^{-\frac{1}{\alpha}}\}\, dx] = 0.$$

Из соотношения (7), очевидно, следует, что

$$\frac{f_z\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right) - 1}{p_z} \to \psi_{\alpha\beta}(s) \text{ при } z \to \infty. \qquad (10)$$

Используя (1), (2) и (10), получим

$$g_z\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right) = \frac{h_z\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right) p_z}{1-(1-p_z) f_z\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right)} =$$

$$= \frac{h_z\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right)}{1-(1-p_z)\dfrac{f_z\left(\frac{s}{z^{\alpha}}\right)-1}{p_z}} \to \frac{h(s)}{1-\psi_{\alpha\beta}(s)} \text{ при } z\to\infty,$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Масол В. І., Сільвестров Д. С. Рекордні значення часу сидіння напівмарківського процесу.— Вісник КДУ (в печати).
2. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965.
3. Лоэв М. Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, П. М., «Мир», 1967.

V. I. Masol

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE REACHING TIME OF HIGH LEVEL BY STABLE PROCESS WITH INDEPENDENT INCREMENTS

Summary

Limit distribution for first leaving of level z moment non-negative regenerative stable process for is obtained.

Поступила в редколлегию 26. X 1971