А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ, асп.
Киевский университет

О МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

При изучении нелинейных преобразований случайных процессов важным вопросом является выяснение необходимых и достаточных условий, для того чтобы заданная функция была моментной, старшего порядка. Известно (см., например [1]), что необходимым и достаточным условием, для того чтобы функция $m(t_1, t_2)$ была моментной второго порядка, является ее положительная определенность. Для моментных функций старших порядков этого условия уже недостаточно. В статье находятся такие условия для функций $2n$ порядка, для примера это сделано когда $n = 2$, или что эквивалентно, решается специальная бесконечномерная проблема моментов.

Пусть L^4 — линейное подпространство полиномов вида

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}x_ix_jx_kx_l,$$

L_+^4 — совокупность тех многочленов $P(x) \in L^4$, которые удовлетворяют условию $P(x) \geqslant 0$.

Если $\{m_{ijke}\}_1^n$ — некоторая последовательность, то определим в L^4 линейный функционал

$$m(P) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}m_{ijkl}.$$

Будем говорить, что функционал $m(P)$ — порожденный последовательностью m_{ijkl} — называется положительным, если $m(P) \geqslant 0$ для всех

$$P \in L_+^4. \tag{1}$$

Введем множество $\Pi = \{x : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = \overline{1, n}\}$, $L^4(\Pi)$ — линейное подпространство функций

$$P_1(x) = P(x) + a,\ x \in \Pi,$$

$$L_+^4 = \{P_1 : P_1(x) \geqslant 0,\ x \in \Pi\}.$$

Функционал $m_1(P_1) = m(P) + a$ называется положительным относительно множества Π, если $m_1(P_1) \geqslant 0$, когда $P(x) \in L_4^+(\Pi)$. Для дальнейшего изложения нам требуется теорема о расширении положительного функционала [2].

Всякий положительный функционал, заданный на некотором линейном многообразии, содержащемся в некотором линейном пространстве, в котором задан выпуклый конус, можно продолжить на все пространство с сохранением положительности.

Покажем, что положительность функционала $m_1\ (P_1)$ относительного множества П эквивалентна следующему условию:

$$\min_{x \in \Pi} P(x) \leqslant m(P) \leqslant \max_{x \in \Pi} P(x). \tag{2}$$

Действительно, заметим, что $m_1\ (1) = 1$, и так как

$$P_1(x) \leqslant \max_{x \in \Pi} P_1(x),$$

то в силу положительности функционала $m_1\ (P_1)$ будем иметь

$$m_1(P_1) = m(P) + a \leqslant \max_{x \in \Pi} P(x) + a,$$

что и требовалось доказать.

Обратно. Пусть условие (2) — выполнено, тогда

$$\min_{x \in \Pi} P_1(x) \leqslant a + m(P) \leqslant \max_{x \in \Pi} P_1(x),$$

откуда следует, что $P_1\ (x) \geqslant 0$, то $m_1\ (P_1) \geqslant 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы последовательность $\{m_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^{n}$ была моментной последовательностью 4-го порядка n-ограниченных случайных величин, т. е. допускала представление

$$m_{ijkl} = \int\limits_{\Pi} x_i x_j x_k x_l \nu(dx),$$

где $\nu(\cdot)$ — нормированная, неотрицательная мера на σ-алгебре борелевских множеств параллелепипеда П, необходимо и достаточно, чтобы функционал, порожденный этой последовательностью, был положительным относительно П.

Поскольку необходимость условий теоремы очевидна, докажем достаточность.

Пусть E — линейное пространство, получаемое от присоединения к L^4 множества характеристических функций борелевских множеств П.

Выпуклым конусом здесь является совокупность всех функций $f\ (x) \in E$, для которых

$$f(x) \geqslant 0,\ x \in \Pi.$$

Распространим функционал с сохранением положительности на E, и так как для всякой характеристической функции $\varkappa_A$ выполнено соотношение $m_1\ (\varkappa_A) \leqslant m_1\ (1)$, то функционал m_1 — конечный на множестве характеристических функций.

Положим $\Phi\ (A) = m_1\ (\varkappa_A)$. Имеем, что $\Phi\ (A) \geqslant 0$, $\Phi\ (\Pi) = 1$,

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(A_i),\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$$

И так как $\Phi(A)$ аддитивная функция множеств на компакте, то она счетно-аддитивная (см. [3]).

Пусть $\nu(\cdot)$ — мера, отвечающая $\Phi(\cdot)$. Покажем, что она дает искомое интегральное представление для m_{ijkl}.

Пусть $\{I_s\}_{s=1}^{r}$ — такое разбиение параллелепипеда П, т. е. $\bigcup_{s=1} I_s = \Pi$, $I_{s_1} \bigcap I_{s_2} = \varnothing$, $s_1 \neq s_2$, что колебание полинома $P_1(x)$ на каждом I_s не больше ε. Тогда

$$|P_1(x) - \sum_{s=1}^{r} P_1(x^{(s)}) \chi_{I_s}| < \varepsilon$$

или

$$-\varepsilon < P_1(x) - \sum_{s=1}^{r} P_1(x^{(s)}) \chi_{I_s} < \varepsilon.$$

В силу положительности функционала

$$-\varepsilon < m_1(P_1) - \sum_{s=1}^{r} P_1(x^{(s)}) \nu(J_s) < \varepsilon.$$

Это значит, что

$$m_1(P_1) = \int_{\Pi} P_1(x) \nu(dx)$$

или

$$m_{ijkl} = \int_{\Pi} x_i x_j x_k x_l \nu(dx).$$

Заметим, что теорему 1 можно сформулировать также в следующем виде.

Для того, чтобы m_{ijkl} — была моментной последовательностью n — ограниченных случайных величин, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности $\{a_{ijkl}\}_1^n$ выполнялось условие

$$\min_{x \in \Pi} P(x) \leqslant m(P) \leqslant \max_{x \in \Pi} P(x).$$

Опишем геометрическую структуру множества моментов. Пусть M — множество всех точек $\{m_{ijkl}\}_1^n$, допускающих представление

$$m_{ijkl} = \int_{\Pi} x_i x_j x_k x_l \nu(dx), \ \nu(\cdot) > 0, \ \nu(\Pi) = 1.$$

Множество M обладает следующими свойствами: M есть выпуклое замкнутое, ограниченное множество, содержащееся в пространстве R^m, где $m = C_{n+3}^4$ с крайними точками вида $\{c_i c_j c_k c_l\}$.

Действительно, поскольку выпуклось и ограниченность M очевидна, покажем замкнутость. Пусть $m_{ijkl}^{(s)} \to m_{ijkl}$. Покажем, что $m_{ijkl} \in M$. Так как

$$m_{ijkl} = \int_{\Pi} x_i x_j x_k x_l \nu_s(dx),$$

ν_s — ограниченная и неотрицательная последовательность, то можно выбрать подпоследовательность ν_{s_k} такую, что

$$\nu_{s_k}(A) \to \nu(A)$$

на каждом множестве непрерывности меры ν.

В силу теоремы Хелли

$$m_{ijkl} = \int\limits_{\Pi} x_i x_j x_k x_l \nu(dx).$$

Покажем, что крайние точки M суть точки вида $\{c_i c_j c_k c_l\}$. Предположим, что m_{ijkl} — крайняя точка множества M, а мера не сосредоточена в точке, тогда существует множество U, $\nu(U) > 0$, $\nu(\Pi) \setminus U) > 0$.

Тогда для произвольного борелевского множества

$\nu(A) = \nu(U)\nu(A/U) + \nu(\Pi \setminus U)\nu(A/\Pi \setminus U) = t\nu_1(A) + (1-t)\nu_2(A)$, ν_1 и ν_2 — условные меры. Отсюда

$$m_{ijkl} = t m_{ijkl}^{(1)} + (1-t) m_{ijkl}^{(2)},$$

что противоречит тому, что m_{ijkl} — крайняя точка.

Пусть V — множество мер, представляющих заданные m_{ijkl}. V есть выпуклое, слабо компактное множество, содержащее меры, сосредоточенные не более чем в $m+1$ точке, где $m = C_{n+3}^4$.

Докажем последнее утверждение. Так как $m_{ijkl} \in M$, а размерность M есть m, то, согласно теореме Минковского (см. [4]), она является выпуклой комбинацией не более чем $m+1$ крайних точек M, т. е.

$$m_{ijkl} = \sum_{r=1}^{m+1} p_r x_i^{(r)} x_j^{(r)} x_k^{(r)} x_l^{(r)}, \quad \sum_{r=1}^{m+1} p_r = 1,$$

что и требовалось доказать.

Выпуклость и слабая компактность множества V очевидна.

Теорема 2. Для того, чтобы последовательность $\{m_{ijkl}\}_1^n$ допускала представление

$$m_{ijkl} = \int\limits_{D_m} x_i x_j x_k x_l \nu(dx), \tag{3}$$

где $\nu(\cdot)$ — нормированная мера

$$D_m = \{x : \sum_{i=1}^n x_i^4 \leqslant c\}, \qquad c = \sum_{i=1}^n m_{iiii},$$

необходимо и достаточно, чтобы она порождала положительный функционал.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $P_1(x) \in L^4$, тогда существует $P_1(x) \in L_+^4$ такой, что

$$\max_{x \in D} P(x) = \max_{x \in D} P_1(x)$$

и $P(x) \leqslant P_1(x)$, где $D = \{x : \sum_{i=1}^n x_i^4 \leqslant 1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующий полином:

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \max_{x \in D} P(x).$$

Очевидно, что

$$P_1(x) \in L_+^4, \max_{x \in D} P_1(x) = \max_{x \in D} P(x).$$

Имеем, что

$$P(rx) \leqslant \max_{x \in D} P(x), \qquad r = (\sum x_i^4)^{-\frac{1}{4}}.$$

Но так как P — однородный полином четвертой степени, то

$$P(x) \leqslant P_1(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. *Достаточность.* Пусть $m(P)$ — функционал, порожденный последовательностью m_{ijkl}, положительный, тогда, так как

$$P(x) \leqslant \max_{x \in D} P(x) \sum_{i=1}^{n} x_i^4,$$

то в силу положительности функционала

$$m(P) \leqslant \max_{x \in D} P(x) c = \max_{y \in D_m} P(y).$$

Отсюда

$$\min_{y \in D_m} P(y) \leqslant m(P) \leqslant \max_{y \in D_m} P(y).$$

Учитывая теперь теорему 1 в эквивалентной формулировке, получаем требуемое представление.

Необходимость следует из того, что если функционал $m(P)$ положительный относительно компакта, в том смысле, что

$$m(P) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} m_{ijkl} a_{ijkl} \geqslant 0$$

при $P(x) \geqslant 0$, $x \in K$, K — некоторый компакт, то он будет положительный во всем пространстве.

Следствие 1. Если последовательность $\{m_{ijkl}\}$ порождает положительный функционал, то однородная форма четвертой степени

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} m_{ijkl} x_i x_j x_k x_l$$

допускает следующее представление:

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m+1} p_k (\sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} x_i)^4, \tag{4}$$

где $p_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{m+1} p_k = 1$, $m = C_{n+3}^4$

Действительно, если мы рассмотрим множество последовательностей $\{m_{ijkl}\}$, допускающих представление в виде (3), то в силу доказанного ранее

$$m_{ijkl} = \sum_{r=1}^{m+1} p_r c_i^{(r)} c_j^{(r)} c_k^{(r)} c_l^{(r)},$$

где $\{c_i c_j c_k c_l\}$ — крайние точки этого множества, а это значит, что $B(x_1, \ldots, x_n)$ представимо в виде (4).

Следствие 2. Пусть $M = \{(m_{ijkl})_1^n : m(P) \geqslant 0$ для $P(x) \in L_+^4\}$,

$M' = \{(b_{ijkl})_1^n : \sum_{i,j,k,l=1}^{n} b_{ijkl} x_i x_j x_k x_l \geqslant 0$ для $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n\}$. Тогда $M \subset M'$. Очевидно, что $M \subseteq M'$. Покажем, что $M \neq M'$. Для этого рассмотрим полином

$$P_0(x) = (\sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n} x_i^2)^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ijkl}^0 x_i x_j x_k x_l,$$

так как

$$P_0(x) \in L_+^4 \to \{a_{ijkl}^0\}_1^n \in M'.$$

Этот полином обращается в нуль на множестве точек

$$K = \{x : \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{n} x_i^2 = 0\},$$

а поскольку в силу следствия 1, полином с коэффициентом может обращаться в нуль только на линейном подпространстве, то $\{a_{ijkl}^0\} \notin$ $\notin M$.

Теорема 3. Для того, чтобы последовательность $\{m_{ijkl}\}_1^\infty$ была моментной четвертого порядка, некоторой последовательности случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n \ldots$, т. е. допускали представление

$$m_{ijkl} = \int_{R^\infty} x_i x_j x_k x_l \nu(dx),$$

где $\nu(\cdot)$ — нормированная мера, R^∞ — пространство последовательностей, необходимо и достаточно, чтобы при каждом n был положительный функционал, порожденный последовательностью $\{m_{ijkl}\}$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\{m_{ijkl}\}_1^n$ порождает положительный функционал, тогда в силу теоремы 2

$$m_{ijkl}^{(n)} = \int_{D_m} x_i x_j x_k x_l \nu_n(dx).$$

Заметим, что не ограничивая общность, мы можем считать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_{iiii} = a < \infty.$$

Действительно, если это не так, то введем последовательность

$$m'_{ijkl} = m_{ijkl}\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_l$$

и подберем λ_i так, чтобы указанный ряд сходился.

Так как последовательность мер $\nu_n(\cdot)$ сосредоточена на компакте, то можно выбрать слабо сходящуюся последовательность ν_{n_k}. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} m_{ijkl}^{(n_k)} = m_{ijkl},$$

где

$$m_{ijkl} = \int\limits_{D_a} x_i x_j x_k x_l \nu(dx),\ D_a \in R^\infty,$$

а это значит, что

$$m_{ijkl} = \int\limits_{R^\infty} x_i x_j x_k x_l \nu_a(dx),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3. Множество моментных последовательностей четвертого порядка является выпуклым замкнутым конусом.

Теорема 4. Для того, чтобы функция $m(t_1, \ldots, t_4) \in L_2(K^4)$, где

$$K^n = \{(t_1, \ldots, t_n): 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i = \overline{1, n}\},$$

$$L_2(K^n) = \{f: \int\limits_{K^n} f^2(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1 \ldots dt_n < \infty\},$$

была моментной функцией четвертого порядка некоторого случайного процесса, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию:

$$\int\limits_{K^4} m(t_1, \ldots, t_4)\,a(t_1, \ldots, t_4)\,dt_1 \ldots dt_4 \geqslant 0. \qquad (5)$$

Для всех $a(t_1, \ldots, t_4)$, таких, что $a(t_1, \ldots, t_4) \in L_2(K^4)$ и

$$\int\limits_{K^4} a(t_1, \ldots, t_4)\,x(t_1)\,x(t_2)\,x(t_3)\,x(t_4)\,dt_1 \ldots dt_4 \geqslant 0,$$

где $x(t) \in L_2$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\varphi_i(t)$ — ортонормированный базис в $L_2(K)$. Тогда $\varphi_i(t_1)\ \varphi_j(t_2)\ \varphi_k(t_3)\ \varphi_l(t_4)$ будет ортонормированным базисом в $L_2(K^4)$. Разложим по этому базису функцию $m(t_1, \ldots, t_4)$.

Имеем, что

$$m(t_1, \ldots, t_4) = \sum m_{ijkl}\varphi_i(t_1)\ \varphi_j(t_2)\,\varphi_k(t_3)\,\varphi_l(t_4),$$

где

$$m_{ijkl} = \int\limits_{K^4} m(t_1, \ldots, t_4)\,\varphi_i(t_1) \ldots \varphi_l(t_4)\,dt_1 \ldots dt_4.$$

Заметим, что m_{ijkl} порождает для каждого n положительный функционал. Действительно, если $\sum a_{ijkl}\, x_i x_j x_k x_l \geqslant 0$ для всех x_i, то в силу условия (5)

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} m_{ijkl} a_{ijkl} = \int_K m(t_1, \ldots, t_4\; a(t_1, \ldots, t_4)\, dt_1 \ldots dt_4 \geqslant 0,$$

где

$$a(t_1, \ldots, t_4) = \sum_{i,j,k,l=0}^{n} a_{ijkl} \varphi_i(t_1) \varphi_j(t_2) \varphi_k(t_3) \varphi_l(t_4),$$

так как

$$\int_{K^4} a(t_1, t_2, t_3, t_4)\, x(t_1)\, x(t_2)\, x(t_3)\, x(t_4)\, dt_1 \ldots dt_4 \geqslant 0.$$

Тогда в силу теоремы 3, m_{ijkl} — моментная последовательность четвертого порядка некоторых случайных величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \ldots$

Введем случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i(t).$$

Легко видеть, что

$$m(t_1, t_2, t_3, t_4) = M\xi(t_1)\, \xi(t_2)\, \xi(t_3)\, \xi(t_4),$$

что и требовалось доказать.

Необходимость условия (5) очевидна.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. СКОРОХОДУ за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман Й. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
2. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.
3. Халмош П. Теория меры. М., ИЛ, 1953.
4. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М., «Мир», 1968.

A. G. Nakonechny

ON MOMENT FUNCTIONS OF RANDOM PROCESSES

Summary

The necessary and sufficient condition are obtained under which some function is a moment function for given random process.

Поступила в редколлегию 18.XII 1971.