В. Ф. СИНЯВСКИЙ, инж.
Институт кибернетики АН УССР

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

В данной работе изучаются условия абсолютной сходимости ряда Фурье однородного случайного поля и, как следствие, получены условия непрерывности с вероятностью 1 его реализаций, выраженные в терминах ковариационной функции. Полученные результаты являются обобщением результатов Кавата [1], изучавшего условия абсолютной сходимости рядов Фурье случайных процессов.

Пусть $\xi(t_1, t_2)$ — однородное случайное поле с $M\xi(t_1, t_2) = 0$ и непрерывной ковариационной функцией

$$\rho(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(xu_1+yu_2)}dF(x, y), \tag{1}$$

где $F(x, y)$ — спектральная функция.

Определим коэффициенты Фурье для $\xi(t_1, t_2)$ на прямоугольнике

$$\left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]\times\left[-\frac{T_2}{2}, \frac{T_2}{2}\right], T_1>0, T_2>0.$$

$$c_{nm} = \frac{1}{T_1T_2}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\int_{-\frac{T_2}{2}}^{\frac{T_2}{2}} \xi(t_1, t_2)e^{-2\pi i\left(\frac{n}{T_1}t_1+\frac{m}{T_2}t_2\right)}dt_1dt_2, \tag{2}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Поле $\xi(t_1, t_2)$ назовем периодическим с периодом $T = (T_1, T_2)$, если $\rho(u_1, u_2)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T_i, $i = 1, 2$, по каждой переменной соответственно.

Пусть

$$\Phi(h_1, h_2) = \frac{1}{h_1h_2}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2}[2\rho(0, 0)-\rho(u_1, u_2)-\rho(-u_1, -u_2)]du_1du_2. \tag{3}$$

Теорема 1. Если $\xi(t_1, t_2)$ — однородное периодическое случайное поле с периодом $T = (T_1, T_2)$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ и

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}(nm)^{-\frac{1}{2}}\left[\Phi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)\right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

то $\sum\limits_{n,m=-\infty}^{\infty}|c_{nm}| < \infty$ с вероятностью 1.

При доказательстве мы используем метод С. Н. Бернштейна исследования абсолютной сходимости рядов Фурье [2, 3].

Воспользуемся равенством Парсеваля

$$2\rho(0, 0)-\rho(h_1, h_2)-\rho(-h_1, -h_2)=$$

$$=4\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} M|c_{nm}|^2 \sin^2\pi\left(\frac{nh_1}{T_1}+\frac{mh_2}{T_2}\right). \tag{4}$$

Получим

$$\Phi\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^p}\right)\frac{1}{2^{k+p}}=4\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} M|c_{nm}|^2 \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{2^k}}\int_0^{\frac{1}{2^p}} \sin^2\pi\left(\frac{n}{T_1}h_1+\frac{m}{T_2}h_2\right)dh_1dh_2 \geqslant$$

$$\geqslant 4\sum_{\substack{2^{k-1}+1\leqslant|n|\leqslant 2^k\\ 2^{p-1}+1\leqslant|m|\leqslant 2^p}} M|c_{nm}|^2 \int_0^{\frac{1}{2^k}}\int_0^{\frac{1}{2^p}} \sin^2\pi\left(\frac{n}{T_1}h_1+\frac{m}{T_2}h_2\right)dh_1dh_2.$$

В силу неравенства

$$\int_0^{\frac{1}{2^k}}\int_0^{\frac{1}{2^p}} \sin^2\pi\left(\frac{n}{T_1}h_1+\frac{m}{T_2}h_2\right)dh_1dh_2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4n^2}{3T_1^2 2^{p+3k}}+\frac{2nm}{T_1T_2 2^{2(k+p)}}+\frac{4m^2}{3T_2^2 2^{k+3p}}, \quad \frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}<\frac{1}{2}$$

имеем

$$\sum_{\substack{2^{k-1}+1\leqslant|n|\leqslant 2^k\\ 2^{p-1}+1\leqslant|m|\leqslant 2^p}} M|c_{nm}|^2 \leqslant \frac{\Phi\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^p}\right)}{4\left(\frac{1}{3T_1^2}+\frac{1}{2T_1T_2}+\frac{1}{3T_2^2}\right)}. \tag{5}$$

По неравенству Коши—Буняковского

$$\sum_{\substack{2^{k-1}+1\leqslant|n|\leqslant 2^k\\ 2^{p-1}+1\leqslant|m|\leqslant 2^p}} \sqrt{M|c_{nm}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{3T_1^2}+\frac{1}{2T_1T_2}+\frac{1}{3T_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^p}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{k+p}{2}}.$$

Покажем, что

$$M\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}|c_{nm}|<\infty.$$

Так как

$$M\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}|c_{nm}|\leqslant\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\sqrt{M|c_{nm}|^2},$$

то достаточно показать сходимость ряда $\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\sqrt{M|c_{nm}|^2}$.

Имеем

$$\sum_{\substack{|n|\geqslant 2\\ |m|\geqslant 2}}\sqrt{M|c_{nm}|^2}=\sum_{k,p=1}^{\infty}\sum_{\substack{2^{k-1}+1\leqslant|n|\leqslant 2^k\\ 2^{p-1}+1\leqslant|m|\leqslant 2^p}}\sqrt{M|c_{nm}|^2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{3T_1^2}+\frac{1}{2T_1T_2}+\frac{1}{3T_2^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k,p=1}^{\infty}2^{\frac{k+p}{2}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^p}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, если $\sum_{k,p=1}^{\infty}2^{\frac{k+p}{2}}\left[\Phi\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^p}\right)\Big]^{\frac{1}{2}}$ сходится, то $\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}|c_{nm}|<\infty$ с вероятностью 1. Остается заметить, что ряды

$$\sum_{k,p=1}^{\infty}2^{\frac{k+p}{2}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2^k},\frac{1}{2^p}\right)\right]^{\frac{1}{2}};\quad\sum_{n,m=1}^{\infty}(nm)^{-\frac{1}{2}}\left[\Phi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

сходятся или расходятся одновременно. Это утверждение может быть доказано точно так же, как и соответствующее утверждение для однократных рядов ([4], стр. 216).

Следствие. Пусть $\omega(\delta_1,\ \delta_2)$ — модуль непрерывности функции $\rho(u_1,\ u_2)$. Если

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}(nm)^{-\frac{1}{2}}\left[\omega\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

то с вероятностью 1

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}|c_{nm}|<\infty.$$

Теорема 2. Для того, чтобы однородное периодическое поле с периодом $T=(T_1,\ T_2)$, $T_1>0$, $T_2>0$ имело непрерывные выборочные функции с вероятностью 1, достаточно, чтобы

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}(nm)^{-\frac{1}{2}}\left[\Phi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)\right]^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Утверждение следует из теоремы 1 и того, что ряд Фурье, соответствующий $\xi(t_1,\ t_2)$, сходится в среднем квадратическом к $\xi(t_1,\ t_2)$ при каждых $t_1\in\left(-\frac{1}{2}T_1,\ \frac{1}{2}T_1\right)$, $t_2\in\left(-\frac{1}{2}T_2,\ \frac{1}{2}T_2\right)$.

Рассмотрим теперь условия сходимости ряда Фурье непериодического случайного поля. Для этого обобщим равенство Парсеваля на непериодический случай.

Теорема 3. Если $\xi(t_1, t_2)$ однородное, не обязательно периодическое, случайное поле, то для $T = (T_1, T_2)$, $T_1 > 0$, $T_2 > 0$ справедливо следующее равенство:

$$4 \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} M\,|c_{nm}|^2 \sin^2 \pi \left(\frac{nh_1}{T_1} + \frac{mh_2}{T_2}\right) = \varphi(h_1, h_2),$$

где

$$\varphi(h_1, h_2) = \left(1 - \frac{h_1}{T_1}\right)\left(1 - \frac{h_2}{T_2}\right)[2\rho(0, 0) - \rho(h_1, h_2) - \rho(-h_1, -h_2)] +$$
$$+ \left(1 - \frac{h_2}{T_2}\right)\frac{h_1}{T_1}[2\rho(0, 0) - \rho(h_1 - T_1, h_2) - \rho(-h_1 + T_1, -h_2)] +$$
$$+ \left(1 - \frac{h_1}{T_1}\right)\frac{h_2}{T_2}[2\rho(0, 0) - \rho(h_1, h_2 - T_2) - \rho(-h_1, -h_2 + T_2)] +$$
$$+ \frac{h_1 h_2}{T_1 T_2}[2\rho(0, 0) - \rho(h_1 - T_1, h_2 - T_2) - \rho(-h_1 + T_1, -h_2 + T_2)],$$
$$0 \leqslant h_1 \leqslant T_1,\ 0 \leqslant h_2 \leqslant T_2. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{для } |u| \leqslant 1 \\ 0 & \text{для } |u| > 1 \end{cases}.$$

Известно, что

$$\int_{-1}^{1} \Delta(u)\, e^{-itu}\, du = \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}, \qquad t \neq 0. \tag{7}$$

Лемма. Если $D_N(u) = \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)u/2 \sin\frac{u}{2}$ — ядро Дирихле, то

$$\sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \sin^2(n\lambda_1 + m\lambda_2)\, e^{-i(n\mu_1 + m\mu_2)} = 2D_N(\mu_1) D_M(\mu_2) -$$
$$- D_N(\mu_1 - 2\lambda_1) D_M(\mu_2 - 2\lambda_2) - D_N(\mu_1 + 2\lambda_1) D_M(\mu_2 + 2\lambda_2).$$

Из (7) и леммы получаем

$$\sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \sin^2 \pi \left(\frac{nh_1}{T_1} + \frac{mh_2}{T_2}\right) \times$$
$$\times \frac{\sin^2\left(n\pi - \frac{x}{2}T_1\right)\sin^2\left(m\pi - \frac{y}{2}T_2\right)}{\left(n\pi - \frac{x}{2}T_1\right)^2\left(m\pi - \frac{y}{2}T_2\right)^2} = 2\int_{-1}^{1} \Delta(u)\, e^{ixT_1u} D_N(2\pi u)\, du \times$$
$$\times \int_{-1}^{1} \Delta(v)\, e^{iyT_2v} D_M(2\pi v)\, dv - \int_{-1}^{1} \Delta(u)\, e^{ixT_1u} D_N\left(2\pi u + 2\pi\frac{h_1}{T_1}\right) du \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \Delta(v) e^{iyT_2 v} D_M \left(2\pi v + 2\pi \frac{h_2}{T_1}\right) dv - \int_{-1}^{1} \Delta(u) e^{ixT_1 u} D_N \times$$

$$\times \left(2\pi u - 2\pi \frac{h_1}{T_1}\right) du \int_{-1}^{1} \Delta(v) e^{iyT_2 v} D_M \left(2\pi v - 2\pi \frac{h_2}{T_2}\right) dv =$$

$$= 2S_1 + S_2 + S_3.$$

Так же, как в [1], получаем при N, $M \to \infty$

$$\sum_{n, m=-\infty}^{\infty} \sin^2 \pi \left(\frac{nh_1}{T_1} + \frac{mh_2}{T_2}\right) \frac{\sin^2\left(n\pi - \frac{x}{2} T_1\right) \sin^2\left(m\pi - \frac{y}{2} T_2\right)}{\left(n\pi - \frac{x}{2} T_1\right)^2 \left(m\pi - \frac{y}{2} T_2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_1}{T_1}\right) e^{-ixh_1} + \frac{1}{2} \frac{h_1}{T_1} e^{ixT_1 - ixh_1}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_2}{T_2}\right) e^{-iyh_2} + \frac{1}{2} \frac{h_2}{T_2} e^{iyT_2 - iyh_2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_1}{T_1}\right) e^{ixh_1} + \frac{1}{2} \frac{h_1}{T_1} e^{-ixT_1 + ixh_1}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{h_2}{T_2}\right) e^{iyh_2} + \frac{1}{2} \frac{h_2}{T_2} e^{-iyT_2 + iyh_2}\right]. \qquad (8)$$

Умножив обе части (8) на $dF(x, y)$ и заметив, что

$$M|c_{nm}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(n\pi - \frac{x}{2} T_1\right)}{\left(n\pi - \frac{x}{2} T_1\right)^2} \times \frac{\sin^2\left(m\pi - \frac{y}{2} T_2\right)}{\left(m\pi - \frac{y}{2} T_2\right)^2} dF(x, y), \qquad (9)$$

проинтегрируем по плоскости. Тогда получим

$$\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} M|c_{nm}|^2 \sin^2\left(\frac{nh_1}{T_1} + \frac{mh_2}{T_1}\right) = \frac{1}{2}\rho(0, 0) -$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h_1}{T_1}\right)\left(1 - \frac{h_2}{T_2}\right)[\rho(h_1, h_2) + \rho(-h_1, -h_2)] -$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h_2}{T_2}\right)\frac{h_1}{T_1}[\rho(h_1 - T_1, h_2) + \rho(-h_1 + T_1, -h_2)] -$$

$$- \frac{1}{4}\left(1 - \frac{h_1}{T_1}\right)\frac{h_2}{T_2}[\rho(h_1, h_2 - T_2) + \rho(-h_1, -h_2 + T_2)] -$$

$$- \frac{1}{4}\left(\frac{h_1 h_2}{T_1 T_2}\right)[\rho(h_1 - T_1, h_2 - T_2) + \rho(-h_1 + T_1, -h_2 + T_2)],$$

что легко преобразуется к (6). Пусть

$$\Psi(h_1, h_2) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \varphi(u_1, u_2)\, du_1 du_2.$$

Теорема 4. Для того, чтобы однородное случайное поле, не обязательно периодическое, имело непрерывные выборочные функции с вероятностью 1, достаточно, чтобы

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} (nm)^{-\frac{1}{2}} \left[\Psi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Доказательство точно такое, как в теоремах 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kavata T. On the Fourier series of a stationary process. II.— Z., Wahrsch. 13, 1969, 25—38.
2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., «Мир», 1965.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного, ч. 1, 2. М., «Наука», 1969.

V. F. Sinyavsky

ON ABSOLUTE CONVERGENCE OF FOURIER'S SERIE OF HOMOGENEOUS RANDOM FIELD

Summary

The conditions of absolute convergence of Fourier's serie for homogeneous random field are investigated. As the collorary the conditions for the continuaty of the sample functions in the terms of covariations functions are obtained.

Поступила в редколлегию 2. IX 1971.