В. М. ШУРЕНКОВ, асп.
Киевский университет

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

Рассмотрим однородную марковскую последовательность Z_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $Z_n \geqslant 0$, $Z_0 = 1$ с вероятностью 1. Будем говорить, что Z_n — ветвящийся процесс с непрерывным фазовым пространством, если

$$P\{Z_n \leqslant y / Z_{n-1} = x\} = P\{\xi(x) \leqslant y\}, \tag{1}$$

где x, $y \geqslant 0$, $(\zeta(x),\ x \geqslant 0)$ — неубывающий однородный процесс с независимыми приращениями, $\zeta(0) = 0$.

Обозначим

$$F_n(x) = P\{Z_n \leqslant x\},$$

C_+ $(\overline{C}_+)$ — правую открытую (замкнутую) полуплоскость комплексной плоскости. Для $t \in \overline{C}_+$ рассмотрим функции

$$\varphi_n(t) = Me^{-tZ_n} = \int_0^\infty e^{-tx} F_n(dx).$$

Нетрудно доказать, что

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(K(t)), \tag{2}$$

где

$$K(t) = -\log Me^{-t\xi(1)},$$

и, следовательно,

$$K(t) = at + \int_0^\infty (1 - e^{-tz})\, \Pi(dz), \tag{3}$$

где $a \geqslant 0$, Π — мера на $(0, \infty)$ такая, что

$$\int_0^1 z\Pi(dz) < \infty.$$

Из (2) следует, что

$$\varphi_n(t) = e^{-K_n(t)},$$

где $K_n(t)$ — n-я итерация функции $K(t)$, т. е. $K_{n+1} = K_n(K(t))$, $K_1(t) = K(t)$.

Обозначим

$$q(x) = P\{\lim_{n\to\infty} Z_n = 0/Z_1 = x\}.$$

Используя (1) нетрудно доказать, что

$$q(x+y) = q(x)\,q(y).$$

Следовательно, $q(x) = e^{-qx}$, $0 \leqslant q \leqslant \infty$ (при $q = \infty$ e^{-qx} следует понимать как функцию, равную 0 при $x > 0$, и равную 1 при $x = 0$). Используя формулу полной вероятности, получаем

$$P\{\lim Z_n = 0\} = e^{-q} = \int_0^\infty e^{-qx} P\{Z_1 \in dx\} = e^{-K(q)}.$$

Отсюда

$$q = K(q). \tag{4}$$

Рассмотрим это уравнение. Из (3) следует, что $K(0) = 0$ и при $t > 0$ $K(t) > 0$, $K'(t) > 0$, $K''(t) < 0$ (тривиальный случай $K(t) = at$ исключим из рассмотрения) Уравнение (4) всегда имеет решение $q = 0$. Из монотонности и вогнутости функции $K(t)$ следует, что уравнение (4) имеет положительное решение тогда и только тогда, когда $\mu = K'(0) > 1$ и $a = \lim\limits_{t\to\infty} K'(t) < 1$, и в этом случае положительное решение единственно.

Теорема 1. а) если $\mu \leqslant 1$, то $Z \underset{n\to\infty}{\to} 0$ с вероятностью 1; б) если $a \geqslant 1$, то $Z_n \to \infty$ с вероятностью 1; в) если $a < 1$, $\mu > 1$ (случай $\mu = \infty$ не исключается), то $Z_n \to 0$ с вероятностью e^{-q} и $Z_n \to \infty$ с вероятностью $1 - e^{-q}$, где q — единственное положительное решение уравнения (4).

Докажем только наиболее интересный пункт в) теоремы. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть G_n — последовательность мер на $(0, \infty)$ такая, что $G_n\,(0, \infty) \leqslant 1$, $\psi_n(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\, G_n(dx)$ — последовательность соответствующих преобразований Лапласа.

Тогда, если существует последовательность $a_n > 0$, $a_n \to 0$ такая, что

$$\frac{1-\psi_n(t)}{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t\beta(t)$$

равномерно внутри C_+, то

$$\beta(t) = \int_0^\infty e^{-tx} b(x)\,dx$$

и

$$(\text{сл.})\lim_{n\to\infty} \frac{1-G_n(x)}{a_n} = b(x)$$

(здесь и в дальнейшем $G_n(x)$ обозначает функцию распределения меры G_n, т. е. $G_n(x) = G_n(0, x)$ и символ (сл.) lim обозначает сходимость в точках непрерывности предельной функции).

Доказательство леммы 1. Так как

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{1-G_n(x)}{a_n}\,dx = \frac{1-\psi_n(t)}{ta_n},$$

то из условий леммы следует, что

$$\beta(t) = \int_0^\infty e^{-tx} B(dx).$$

$$(\text{сл.})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\int_0^x (1-G_n(y))\,dy = B(x).$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_0^x (1-G_n(y))\,dy = x(1-G_n(x)) + \int_0^x yG_n(dy). \tag{5}$$

Далее,

$$\int_0^\infty e^{-tx} xG_n(dx) = -\psi_n'(t) = (1-\psi_n(t))'.$$

Так как $a_n^{-1}(1-\psi_n(t))$ — равномерно сходящаяся последовательность аналитических в C_+ функций, то

$$-\frac{\psi_n'(t)}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma(t) = t\beta'(t) + \beta(t)$$

и

$$\gamma(t) = \int_0^\infty e^{-tx} C(dx).$$

Далее,

$$-\beta'(t) = \frac{\beta(t)-\gamma(t)}{t}.$$

Отсюда

$$xB(dx) = [B(x) - C(x)]\,dx$$

и, следовательно, мера B имеет плотность

$$b(x) = \frac{B(x)-C(x)}{x}, \qquad x > 0.$$

Далее, сходимость

$$-\frac{\psi_n'(t)}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\gamma(t)$$

влечет сходимость

$$(\text{сл.})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\int_0^x yG_n(dy) = C(x)$$

и из (5) следует, что

$$(\text{сл.})\lim_{n\to\infty}\frac{1-G_n(x)}{a_n}=\frac{B(x)-C(x)}{x}=b(x).$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Отметим, что $0<K'(q)<1$. Точно так, как это сделано в [3], можно доказать, что

$$[K'(q)]^{-n}[K_n(t+q)-q]\xrightarrow[n\to\infty]{} t\beta(t)$$

для t из достаточно малого интервала $(0, r)$. Следовательно,

$$\frac{1-\varphi_n(t+q)e^q}{[K'(q)]^n}\xrightarrow[n\to\infty]{} t\beta(t). \tag{6}$$

Из неравенств

$$|\varphi_n'(t)|\leqslant-\varphi_n'(\operatorname{Re}t)\leqslant K_n'(\operatorname{Re}t)\leqslant K_n'(q)=[K'(q)]^n$$

следует равностепенная непрерывность последовательности

$$[K'(q)]^{-n}[1-\varphi_n(t+q)e^q]$$

а C_+, а отсюда с помощью теоремы Арцела легко следует, что (6) имеет место равномерно внутри C_+. Заметим, что $\varphi_n(t+q)e^q$ есть преобразование Лапласа распределения вероятностей

$$G_n(dx)=e^qe^{-qx}F_n(dx).$$

Применяя лемму 1, получаем

$$\beta(t)=\int_0^\infty e^{-tx}b(x)\,dx$$

и

$$(\text{сл.})\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^q\int_0^x e^{-qy}F_n(dy)}{[K'(q)]^n}=b(x). \tag{7}$$

Рассмотрим последовательность мер H_n на $(0,\infty)$ таких, что

$$H_n(x,\ \infty)=\frac{1-\int_0^x e^q\,e^{-qy}F_n(dy)}{[K'(q)]^n}.$$

Из (7) следует, что последовательность мер H_n слабо сходится к мере H такой, что $H(x,\infty)=b(x)$. Следовательно, если x_1, x_2 — точки непрерывности $b(x)$, то

$$\int_{x_1}^{x_2}e^{qy}H_n(dy)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{x_1}^{x_2}e^{qy}H(dy),$$

и так как

$$\int_{x_1}^{x_2}e^{qy}H_n(dy)=e^q\frac{F_n(x_2)-F_n(x_1)}{[K'(q)]^n},$$

то отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P\{x_1 < Z_n \leqslant x_2\}$ сходится при $x_2 > x_1 > 0$. Из теоремы Бореля — Кантелли следует, что с вероятностью 1 последовательность Z_n либо сходится к нулю, либо к бесконечности. Учитывая, что $\varphi_n(t) \to e^{-q}$, получаем требуемый результат.

Теорема 2. Если $a < 1$, $\mu > 1$ (случай $\mu = \infty$ не исключается), то

$$P\{Z_n \leqslant x / \lim_{k\to\infty} Z_k = 0,\ Z_n \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b(\varepsilon) - b(x)}{b(\varepsilon)},$$

если $x > \varepsilon > 0$ — точки непрерывности функции $b(x)$. Преобразование Лапласа

$$\beta(t) = \int_0^\infty e^{-tx} b(x)\, dx$$

существует при $t > 0$ и $\alpha(t) = t\beta(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\alpha(K(t+q) - q) = K'(q)\,\alpha(t),$$
$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 1.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из (6), леммы 1 и из того, что

$$P\{Z_n \leqslant x / \lim_{k\to\infty} Z_k = 0\} = e^q \int_0^x e^{-qy} F_n(dy).$$

Функциональное уравнение получается, если в (16) вместо t подставить $K(t+q) - q$. Утверждения $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 1$ следуют из того, что (6) имеет место равномерно не только внутри C_+, но и внутри $\bar{C}_+$.

Теорема 3. Если $MZ_1^2 < \infty$, $\mu < 1$, то

$$P\{Z_n \leqslant x / Z_n \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b(\varepsilon) - b(x)}{b(\varepsilon)},$$

если $x > \varepsilon > 0$ — точки непрерывности функции $b(x)$. Преобразование Лапласа

$$\beta(t) = \int_0^\infty e^{-tx} b(x)\, dx$$

существует при $t > 0$ и $\alpha(t) = t\beta(t)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\alpha(K(t)) = \mu\alpha(t), \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 1.$$

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2 с очевидными изменениями.

Теорема 4. Если $\sigma = DZ_1 < \infty$, $\mu = 1$, то при $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\frac{Z_n}{n} > x / Z_n \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{2}{\sigma}x}, \qquad x > 0.$$

Доказательство. Точно так, как это сделано, например, в [2], можно доказать, что

$$K_n(t) = \frac{t}{1 + n\frac{\sigma}{2}t}(1 + 0(1)) \tag{8}$$

равномерно внутри $\overline{C}_+$. Отсюда следует, что

$$n(1 - \varphi_n(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\sigma}$$

равномерно внутри C_+. Применяя лемму 1, получаем

$$n(1 - F_n(x)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\sigma}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Далее, пусть t вещественно, $t > 0$.

$$M\left[e^{-t\frac{Z_n}{n}} / Z_n \geqslant \varepsilon\right] = \frac{\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{t}{n}x} F_n(dx)}{1 - F_n(\varepsilon)} = \frac{\varphi_n\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{1 - F_n(\varepsilon)} + \frac{1 - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\frac{tx}{n}} F_n(dx)}{1 - F_n(\varepsilon)}.$$

Первое слагаемое стремится к $-t\left(\frac{2}{\sigma} + t\right)^{-1}$ в силу (8), (9). Рассмотрим второе слагаемое. При $t > 0$

$$G_n(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{t}{n}y} F_n(dy)$$

есть последовательность несобственных функций распределения, и при $\operatorname{Re} s > 0$, $n \to \infty$

$$1 - \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} G_n(dx) = 1 - \varphi_n\left(s + \frac{t}{n}\right) \sim \frac{2}{n\sigma}.$$

Применяя лемму 1, убеждаемся, что второе слагаемое стремится к единице. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.
2. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., «Наука», 1971.
3. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М., «Мир», 1966.

V. M. Shurenkov

SOME LIMIT THEOREMS FOR BRANCHING PROCESSES WITH THE CONTINUOUS SPACE OF STATES

Summary

We prove some limit theorems for branching processes with the continuos space of states like Yaglom's ones for branching processes with the discrete space of states.

Поступила в редколлегию 28.XII 1971.