В. Г. АЛЕКСЕЕВ, канд. физ.-мат. наук
ИФА АН СССР

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ НЕГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Настоящая заметка непосредственно примыкает к работе [1], посвященной исследованию оценок спектральной плотности некоторых негауссовских случайных процессов. В качестве моделей негауссовских случайных процессов в работе [1] были рассмотрены случайные процессы, являющиеся квадратом и кубом гауссовского стационарного случайного процесса, а также логарифмически-нормальный стационарный случайный процесс. В настоящей заметке мы рассмотрим случайный процесс, являющийся произвольной целой положительной степенью гауссовского стационарного случайного процесса, и покажем, что в этом случае асимптотическая (при неограниченно возрастающем объеме выборки) формула для дисперсии оценки спектральной плотности остается той же, что и в гауссовском случае.

Пусть ξ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — гауссовский стационарный случайный процесс по средним 0 и $\rho_{jk} = \mathbf{M}\xi_k\xi_j$. Пусть p — целое число, причем $p > 1$. Нас будут интересовать оценки спектральной плотности случайного процесса $x_k = \xi_k^p$, $k = 1, 2, \ldots$. Спектральные плотности процессов ξ_k и x_k обозначим соответственно через $\gamma(\lambda)$ и $f(\lambda)$. Относительно спектральной плотности $\gamma(\lambda)$ будем предполагать, что она является функцией из класса Lip α, где $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$. Отсюда сразу следует (см., например, Бари [2], гл. II, § 3), что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho_{jk}| < C, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где C — некоторая постоянная.

Предположим сначала, что p нечетно. Пусть в нашем распоряжении имеется n последовательных отсчетов случайного процесса x_k. Оценку значения спектральной плотности $f(\lambda)$ в точке λ_0, $0 < |\lambda_0| < \pi$, будем искать в виде

$$f_n(\lambda_0) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^{n} q_{jk}(\varphi_n)\, x_j x_k. \tag{2}$$

Здесь

$$q_{jk}(\varphi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)\lambda} \varphi_n(\lambda)\, d\lambda, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{b_n}{2} \{w[b_n(\lambda_0 - \lambda)] + w[b_n(\lambda_0 + \lambda)]\}, \tag{4}$$

где b_n — некоторая последовательность положительных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}+\frac{b_n}{n}\right)=0, \tag{5}$$

а $w(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ — произвольная неотрицательная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1, \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [|x|\,w(x) + w^2(x)]\,dx < \infty. \tag{7}$$

Обозначим через R_n «негауссовское» (в терминологии работы [1]) слагаемое дисперсии оценки $f_n(\lambda_0)$,

$$R_n = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k,l,m} q_{jk}(\varphi_n)\,q_{lm}(\varphi_n)\,(\mathbf{M}x_jx_kx_lx_m - \mathbf{M}x_jx_k\mathbf{M}x_lx_m -$$
$$- \mathbf{M}x_jx_l\mathbf{M}x_kx_m - \mathbf{M}x_jx_m\mathbf{M}x_kx_l) = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k,l,m} q_{jk}(\varphi_n)\,q_{lm}(\varphi_n)\times$$
$$\times(\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\xi_l^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\xi_m^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_l^p), \tag{8}$$

где индексы суммирования j, k, l и m изменяются в пределах от 1 до n.

Нам достаточно показать, что $R_n = O(n^{-1})$. Отсюда будет следовать (см. [1]), что при $f(\lambda_0) > 0$ главным членом величины $\boldsymbol{D}f_n(\lambda_0)$ является «гауссовское» (в терминологии работы [1]) слагаемое.

При рассмотрении величины R_n мы воспользуемся общим правилом, позволяющим выразить все центральные моменты четных порядков многомерного нормального распределения через его вторые моменты. Речь идет об известном правиле, впервые выведенным Иссерлисом [3]; его точная формулировка приведена, например, в гл. II книги Монина и Яглома [4]. Согласно этому правилу, выражение, стоящее в круглой скобке под знаком суммы в крайней правой части соотношения (8), может быть представлено в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых является произведением $2p$ сомножителей типа ρ_{jk} (возможно, с совпадающими индексами). При этом в каждое из этих слагаемых будет обязательно входить по крайней мере три разных множителя с несовпадающими индексами таких, что произведение этих сомножителей будет зависеть от всех четырех индексов суммирования. Это последнее произведение может иметь вид, например, $\rho_{jk}\rho_{jl}\rho_{jm}$ или $\rho_{jk}\rho_{jm}\rho_{kl}$. Из соотношения (1) и неравенства $|q_{jk}(\varphi_n)| \leqslant (2\pi)^{-1}$, $j, k = 1, 2, \ldots$, легко следует теперь, что $R_n = O(n^{-1})$.

Рассмотрим теперь случай, когда p четно. В этом случае оценка значения спектральной плотности $f(\lambda)$ в точке λ_0, где $0 < |\lambda_0| < \pi$, будет описываться формулой

$$f_n(\lambda_0) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^{n} q_{jk}(\varphi_n)(x_j - \mathbf{M}x_j)(x_k - \mathbf{M}x_k) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^{n} q_{jk}(\varphi_n)(\xi_j^p - \mathbf{M}\xi_j^p)(\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_k^p). \qquad (9)$$

Здесь величина $q_{jk}(\varphi_n)$ определяется так же, как и в случае нечетного p, а «негауссовское» слагаемое дисперсии оценки $f_n(\lambda_0)$ имеет вид

$$R_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k,l,m} q_{jk}(\varphi_n) q_{lm}(\varphi_n) [\mathbf{M}(\xi_j^p - \mathbf{M}\xi_j^p)(\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_n^k)(\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_l^p) \times$$

$$\times (\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_m^p) - \mathbf{M}(\xi_j^p - \mathbf{M}\xi^p)(\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_n^p)\mathbf{M}(\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_l^p)(\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_m^p) -$$

$$- \mathbf{M}(\xi_j^p - \mathbf{M}\xi_j^p)(\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_l^p)\mathbf{M}(\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_k^p)(\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_m^p) - \mathbf{M}(\xi_j^p - \mathbf{M}\xi_j^p) \times$$

$$\times (\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_m^p)\mathbf{M}(\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_k^p)(\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_l^p)], \qquad (10)$$

где все индексы суммирования изменяются в пределах от 1 до n.

После некоторых тождественных преобразований находим

$$R_n = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k,l,m} q_{jk}(\varphi_n) q_{lm}(\varphi_n) [\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\xi_l^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_l^p\xi_m^p -$$

$$- (\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_m^p) - (\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_m^p -$$

$$- \mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi^p\xi_m^p + \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_m^p) - (\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_k^p -$$

$$- \mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p +$$

$$+ 2\mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_m^p) - (\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_m^p -$$

$$- \mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p + \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_m^p) - (\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_m^p -$$

$$- \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_m^p - \mathbf{M}\xi_n^p\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p + \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_m^p) -$$

$$- (\mathbf{M}\xi_j^p\xi_m^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_n^p\xi_l^p - \mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_m^p +$$

$$+ \mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_n^p\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_m^p)]. \qquad (11)$$

Рассмотрим теперь внимательно выражение, стоящее в квадратной скобке. Оно представляет собой величину $\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\xi_l^p\xi_m^p$ за вычетом ряда входящих в нее слагаемых. При этом первым вычитаемым является величина $\mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_n^p\xi_l^p\xi_m^p$, второе вычитаемое (первая круглая скобка) есть величина $\mathbf{M}\xi_n^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p\xi_m^p$ за вычетом слагаемого $\mathbf{M}\xi_j^p\mathbf{M}\xi_k^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_m^p$, входящего в состав первого вычитаемого, третье вычитаемое (вторая круглая скобка) есть величина $\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_n^p\xi_m^p$ за вычетом слагаемых, входящих в первые два вычитаемые, и т. д. Таким образом, выражение в квадратной скобке представляет собой величину $\mathbf{M}\xi_j^p\xi_n^p\xi_l^p\xi_m^p$ за вычетом всех слагаемых, входящих в величины $\mathbf{M}\xi^p\mathbf{M}\xi_k^p\xi^p\xi_m^p$, $\mathbf{M}\xi_n^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p\xi_m^p$, $\mathbf{M}\xi_l^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p\xi_m^p$, $\mathbf{M}\xi_m^p\mathbf{M}\xi_j^p\xi_n^p\xi_l^p$, $\mathbf{M}\xi_j^p\xi_n^p\mathbf{M}\xi_l^p\xi_m^p$, $\mathbf{M}\xi_j^p\xi_l^p\mathbf{M}\xi_n^p\xi_m^p$ и $\mathbf{M}\xi_j^p\xi_m^p\mathbf{M}\xi_n^p\xi_l^p$. Следовательно, в квадратной скобке под знаком суммы в правой части (11) остаются лишь те слагаемые, в которые обязательно входят по крайней мере три разных сомножителя типа ρ_{jk} с несовпадающими индексами таких, что произведение этих сомножителей зависит от всех четырех индексов суммирования. Отсюда, как и в случае нечетного p, следует, что $R_n = O(n^{-1})$. Тем самым наше утверждение доказано.

Перейдем к рассмотрению вопроса о степени гладкости функции $f(\lambda)$. Как было уже отмечено в работе [1], от степени гладкости функции $f(\lambda)$ существенным образом зависит смещение ее статистических оценок (по этому поводу см. также [5]). Мы воспользуемся тем, что, в соответствии с уже упоминавшимся выше правилом Иссерлиса, корреляционная функция r_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots$, случайного процесса x_k может быть выражена через корреляционную функцию ρ_{jk} процесса ξ_k.

В случае нечетного $p > 1$ величина $r_{jk} = \mathbf{M}\xi_j^p\xi_k^p$ является многочленом от ρ_{jk} вида

$$r_{jk} = c_1\rho_{jk} + c_3\rho_{jk}^3 + c_5\rho_{jk}^5 + \cdots + c_p\rho_{jk}^p, \tag{12}$$

где $c_1, c_3, \ldots, c_p$ — некоторые постоянные. Отсюда, в соответствии с известными результатами Лоренца [6] (см. также [2], гл. II, § 3), следует, что спектральная плотность $f(\lambda)$ обладает той же степенью гладкости, что и функция $\gamma(\lambda)$.

В случае четного $p > 2$

$$r_{jk} = \mathbf{M}(\xi_j^p - \mathbf{M}\xi_j^p)(\xi_k^p - \mathbf{M}\xi_k^p) = d_2\rho_{jk}^4 + d_4\rho_{jk}^4 + \cdots + d_p\rho_{jk}^p, \tag{13}$$

где $d_2, d_4, \ldots, d_p$ — некоторые постоянные. Отсюда, как и в случае $p = 2$ (см. [1]), следует, что $f(\lambda) \in \mathrm{Lip}\ 1$.

Результаты настоящей заметки и работы [1] позволяют утверждать, что при весьма широких предположениях относительно степени гладкости спектральной плотности $\gamma(\lambda)$ гауссовского случайного процесса ξ_k для случайных процессов $x_k = \xi_k^p$, $p = 2, 3, 4, \ldots$, а также для процесса $x_k = \exp \xi_k$ остаются в силе рекомендации работы [5] относительно выбора спектрального окна при построении оценок спектральной плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Г. Об оценках спектра некоторых негауссовских случайных процессов.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 5 1971, 3—7.

2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.

3. Isserlis L. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables.— Biometrika, **12**, 1—2, 1918, 134—139.

4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. ч. I. М. «Наука», 1965.

5. А л е к с е е в В. Г. О выборе спектрального окна при оценке спектра гауссовского стационарного случайного процесса.— Проблемы передачи информации, 7, № 4, 1971, 45—54.
6. L o r e n t z G. G. Fourier-Koeffizienten und Funktionen klassen. Mathematische Zeitschr., 51, 2, 1948, 135—149.

V. G. Alekseev

SPECTRAL ANALYSIS OF SOME NON-GAUSSIAN RANDOM PROCESSES

S u m m a r y

The spectral density function estimates for some non-Gaussian stationary random processes with discrete time are investigated.

Поступила в редколлегию 19.II 1971.