В. В. АНИСИМОВ, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ОПИСАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА В СХЕМЕ СЕРИЙ

СЛУЧАЙ, КОГДА В ПРЕДЕЛЕ ОДИН КЛАСС И НЕСУЩЕСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Пусть $X_n = \{x_n(k),\ k = 1, 2, \ldots\}$ — конечная однородная цепь Маркова с множеством состояний $\{1, 2, \ldots, r\}$ и матрицей переходных вероятностей $P_n = \| p_n(l,\ k) \|,\ l,\ k = \overline{1, r}$ (n — параметр серии). Обозначим через $\nu_n^{(j)}(k)$ число попаданий в n-й серии в состояние $\{k\}$ за n шагов при условии, что $x_n(1) = j$.

А. Н. Колмогоровым [1] была поставлена задача описания всех возможных предельных распределений для сумм случайных величин, связанных в конечную цепь Маркова в схеме серий. Для решения этой задачи необходимо знать многомерное предельное распределение вектора $\{\nu_n^{(j)}(k),\ k = \overline{1, r}\}$.

В случае $r = 2$ все предельные законы для $\nu_n^{(j)}(1)$ были описаны Р. Л. Добрушиным [2]; их всего оказалось 7. При $r > 2$ предельные распределения для $\nu_n^{(j)}(1)$ изучены Л. Д. Мешалкиным [3], отдельные результаты в этом направлении были получены ранее А. А. Ильяшенко [4]. В многомерном случае М. И. Ядренко [5] был рассмотрен случай $r = 3$, некоторые результаты были получены В. П. Кубилюсом [6], А. Ханеном [7] и в [8].

Зададим на состояниях цепи функцию $f_n(k) = \alpha_n(k) f_k,\ k = \overline{1, r}$, где f_k — произвольные действительные числа, а $\alpha_n(k)$ — некоторые нормирующие множители. В настоящей работе описываются все возможные предельные распределения величины $S_n(j) - na_n$, где

$$S_n(j) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x_n(k)) \qquad (x_n(1) = j),$$

в том случае, когда цепи с матрицей $\overline{P} = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ соответствует один класс и могут быть несущественные состояния (общий случай будет рассмотрен в следующей работе). Указываются явные выражения для характеристических функций предельных законов и условия сходимости к каждому из них. Причем найденные типы распределений явным образом зависят от всех параметров $f_k,\ k = \overline{1, r}$. Таким образом автоматически описываются все возможные многомерные предельные распределения вектора $\{\nu_n^{(j)}(k),\ k = \overline{1, r}\}$. Действительно, если $a_n = \sum_{k=1}^{r} f_k c_n(k)$, то характеристическая функция $\varphi(\lambda)$ предельного распределения $S_n(j) - na_n$ при $\lambda = 1$ как функция параметров f_k, $k = \overline{1, r}$, дает многомерное предельное распределение вектора $\{\alpha_n(k)\, \nu_n^{(j)}(k) - nc_n(k),\ k = \overline{1, r}\}$.

Не нарушая общности, будем считать, что используемые неслучайные пределы не зависят от способа стремления n к ∞ (иначе можно было бы рассматривать пределы по подпоследовательностям) и будем обозначать их чертой сверху ($\bar{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$).

Пусть $q_n(k)$, $k = \overline{1, r}$ — стационарное распределение для цепи X_n (так как цепи с матрицей $\bar{\mathrm{P}}$ соответствует один класс и несущественные состояния, то при достаточно больших n в цепи X_n не может быть двух классов, а для несущественных состояний, если такие есть, будем считать $q_n(k) = 0$).

Определение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} nq_n(k)\, p_n(k, l) = c$, то назовем переход из $\{k\}$ в $\{l\}$ типа «0», если $c = 0$, типа «1», если $0 < c < \infty$ и типа «2», если $c = \infty$.

Рассмотрим в нашей цепи только те переходы, которые являются переходами типа «2». По переходам типа «2» в цепи X_n всегда выделится только один замкнутый класс $\{1, 2, \ldots, r_1\}$, который, в свою очередь, разбивается на h циклических подклассов ($1 \leqslant h \leqslant r_1$); могут быть также другие состояния $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$, между которыми переходы только типа «0» или «1» (это эквивалентно тому, что $nq_n(k) \to c$, $0 \leqslant c < \infty$ для всех $k = \overline{r_1 + 1, r}$). Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если по переходам типа «2» вся цепь представляет собой один класс и разбивается на h циклических подклассов, причем либо $h = 1$, либо никакое состояние не образует само отдельный подкласс (назовем это условием H), то независимо от начального состояния $j = \overline{1, r}$ распределение $S_n(j) - na_n$ слабо сходится к нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2(f))$, причем здесь

$$a_n = \sum_{k=1}^{r} q_n(k)\, \alpha_n(k)\, f_k, \text{ а } \alpha_n(k) = \left(\sqrt{n\gamma_n(k)}\right)^{-1},\ k = \overline{1, r}, \text{ где } \gamma_n(k) =$$

$$= 1, \text{ если } \lim q_n(k) \left| \frac{1}{h} - q_n(k) \right| \neq 0,\ \gamma_n(k) = \min\left(q_n(k), \left| \frac{1}{h} - q_n(k) \right|\right)$$

в противном случае; $\sigma^2(f)$ — квадратичная форма, явно зависящая от всех переменных f_k, $k = \overline{1, r}$, ранг которой не более $r - h$.

Теорема 2. Если по переходам типа «2» цепь расщепляется на класс $\{1, 2, \ldots, r_1\}$, который, в свою очередь, разбивается на h циклических подклассов, для которых выполнено условие H, и есть еще группа состояний $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$, то распределение $S_n(j) - na_n$ слабо сходится к распределению с характеристической функцией

$$\psi_j(\lambda) \exp\left\{-\frac{\lambda^2 \tilde{\sigma}^2(f)}{2} + c\,[\bar{\pi}(\mathrm{I} - \mathrm{FA})^{-1}\mathrm{F}\tilde{p} - 1]\right\}, \qquad (1)$$

где $\psi_j(\lambda) = 1$, если начальное состояние j принадлежит одному из подклассов (т. е. $1 \leqslant j \leqslant r_1$), и $\psi_j(\lambda)$ — k-й элемент вектора $(\mathrm{I} - \mathrm{FA})^{-1} \mathrm{F}\bar{p}$, если начальное состояние j есть k-е состояние из множества $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$.

Введем следующие обозначения:

$$a_n = \sum_{k=1}^{r_1} \alpha_n(k) q_n(k) f_k, \qquad \alpha_n(k) = (\sqrt{n\gamma_n(k)})^{-1} \text{ при } k \leqslant r_1,$$

где $\gamma_n(k)$ определяется, как в теореме 1, и $\alpha_n(k) = 1$ при $k > r_1$, $\tilde{\sigma}^2(f)$ — квадратичная форма, явно зависящая от переменных f_k, $k = \overline{1, r_1}$, ранг которой не более $r_1 - h$,

$$c = \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{r_1} q_n(k) \sum_{l=r_1+1}^{r} p_n(k, l), \tag{2}$$

$\bar{\pi}$ — вектор-строчка с компонентами

$$\left\{\frac{1}{c}\left(\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{r_1} q_n(k) p_n(k, l)\right), \quad l = \overline{r_1 + 1, r}\right\}, \tag{3}$$

I — единичная матрица, F — диагональная матрица с элементами на диагонали $\exp\{i\lambda f_k\}$, $k = \overline{r_1 + 1, r}$, $\mathrm{A} = \|\bar{p}(k, l)\|$, $k, l = \overline{r_1 + 1, r}$, $\bar{p}$ — вектор-столбец с компонентами $\left\{\sum_{l=1}^{r_1} \bar{p}(k, l), \quad k = \overline{r_1 + 1, r}\right\}$.

Замечание. Если $r_1 = 1$, то $\tilde{\sigma}^2(f) \equiv 0$. Тогда предельное распределение определяется по формуле (1), только вместо величин f_k, $k \geqslant 2$, будут стоять величины $f_k - f_1$. При этом $\alpha_n(k) = 1$, $k = \overline{1, r}$, а $a_n = f_1$.

Теорема 3. Пусть по переходам типа «2» цепь расщепляется на класс состояний $\{1, 2, \ldots, r_1\}$, который, в свою очередь, разбивается на h циклических подклассов, и могут быть другие состояния $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$, причем некоторые подклассы внутри класса состоят только из одного состояния. Тогда:

1) если $h = r_1$ (т. е. каждый подкласс состоит из одного состояния), то предельное распределение случайной величины

$$S_n(j) - \frac{n}{h} \sum_{k=1}^{h} f_k$$

при $n \equiv d \pmod{h}$ слабо сходится к распределению, характеристическая функция которого есть j-й элемент вектора

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \frac{\bar{\mu}_k^{-d-1}}{p(\bar{\mu}_k)} \exp\left\{\frac{\delta_k(f)}{\bar{\mu}_k}\right\} \mathrm{B}(\bar{\mu}_k)\, \bar{1}, \tag{4}$$

где $\bar{\mu}_k$, $k = \overline{1, h}$ — корни h-й степени из единицы, $\bar{1}$ — единичный вектор, $\delta_k(f) = \lim_{n\to\infty} n(\mu_n(k) - \mu_k)$, $k = \overline{1, h}$, где $\mu_n(k)$ — характеристические корни матрицы $F_1 P_n$ (причем $\mu_n(k) \to \bar{\mu}_k$), $p(\mu) = (\mu^h - 1)^{-1} \Delta(\mu)$, $\Delta(\mu) = |\mu I - F_1 \bar{P}|$, а $B(\mu)$ — матрица алгебраических дополнений для элементов матрицы, сопряженной $(\mu I - F_1 \bar{P})$, F_1 — диагональная матрица с елементами $\exp\left\{i\lambda\left(f_k - \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{h} f_m\right)\right\}$, $k = \overline{1, r}$;

2) если $h < r_1$, то предельное распределение величины $S_n(j) - na_n$ будет композицией независимых нормального $N(0, \tilde{\sigma}^2(f))$ и предыдущего типа 1), причем $\tilde{\sigma}^2(f)$ — явно зависит от тех переменных, которые заданы на подклассах, состоящих более чем из одного состояния.

Здесь $a_n = \sum_{k=1}^{1} q_n(k)\alpha_n(k) f_k$, а $\alpha_n(k) = 1$, если $\{k\}$ образует само отдельный подкласс, либо $k > r_1$, и $\alpha_n(k) = (\sqrt{n\gamma_n(k)})^{-1}$ в противном случае.

Доказательства теорем. Укажем вначале метод, которым будем пользоваться для доказательства сходимости к нормальному закону. Зафиксируем состояние $\{1\}$ и будем считать, что $\bar{q}(1) \neq 0$. Введем следующие обозначения:

$$\tau_n(0) = 0,\ \tau_n(1) = \min\{l : l \geqslant 1,\ x_n(l) = 1,\ x_n(1) = j\},$$
$$\tau_n(k) = \min\{l : l > \tau_n(k-1),\ x_n(l) = 1\}, \qquad k > 1,$$
$$\rho_n(k) = \tau_n(k+1) - \tau_n(k), \qquad k \geqslant 0,$$
$$\varphi_n(k) = \sum_{l=\tau_n(k)+1}^{\tau_n(k+1)} f_n(x_n(l)), \qquad k \geqslant 0,$$
$$Y_n(k) = \varphi_n(k) - a_n\rho_n(k), \qquad k \geqslant 0$$

($\tau_n(k)$ — последовательные номера скачков, на которых происходят попадания цепи в $\{1\}$). Очевидно, что величины $\rho_n(k)$, $k \geqslant 1$ (соответственно $Y_n(k)$, $k \geqslant 1$) будут независимы и одинаково распределены. Пусть $\hat{\tau}_n(1) = \min(n, \tau_n(1))$. Тогда величину $S_n(j) - na_n$ можно представить (см. [9], формула (2)) следующим образом:

$$S_n(j) - na_n = \tilde{Y}_n(0) + \sum_{k=1}^{\nu_n^{(\cdot)}(1)-1} Y_n(k) + \tilde{\tilde{Y}}_n, \text{*)} \tag{5}$$

где

$$\tilde{Y}_n(0) = \sum_{l=1}^{\hat{\tau}_n(1)} f_n(x_n(l)), \quad \tilde{\tilde{Y}}_n = \sum_{l=\tau_n(\nu_n^{(j)}(1))+1}^{n} f_n(x_n(l)). \tag{6}$$

---

*) Условимся считать $\sum_1^0 = 0$.

Воспользуемся теперь результатами работы [9]. Если мы покажем, что существует нормирующий множитель γ_n такой, что

$$\gamma_n^{-1} \sum_{k=1}^{V_n} (\rho_n(k) - q_n(1)^{-1}) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} F(z), \tag{7}$$

где $F(z)$ — собственный закон распределения, а $V_n = [nq_n(1)]$ (целая часть), причем

$$n^{-1}\gamma_n \to 0 \qquad (\gamma_n q_n(1))^{-1} \to 0, \tag{8}$$

и, кроме того, покажем, что $\tilde{Y}_n(0) \xrightarrow{p} 0$ и $\tilde{\tilde{Y}}_n \xrightarrow{p} 0$, то из теоремы 1 [9] будет следовать, что предельное распределение $S_n(j) - na_n$ будет таким же, как предельное распределение величины

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{V_n} Y_n(k). \tag{9}$$

Предварительно нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $\omega_n(k)$ — случайная величина, равная числу попаданий цепи X_n в состояние $\{k\}$ между двумя последовательными попаданиями в состояние $\{1\}$ ($\omega_n(1) = 1$). Тогда если матрице $\overline{P}$ соответствует один существенный класс и возможно несущественные состояния и $\overline{q}(1) \neq 0$, то

$$\mathbf{P}\{\omega_n(k) > 0\} = O(q_n(k)),^{*)} \qquad k = \overline{1, r}. \tag{10}$$

Доказательство. Покажем, что $P\{\omega_n(k) > 0\} = O(\mathbf{M}\omega_n(k))$, отсюда, так как $\mathbf{M}\omega_n(k) = q_n(k)\, q_n(1)^{-1}$, следует (10).

Поскольку в пределе мы имеем один существенный класс и несущественные состояния, то во всяком случае при больших n существует цепочка переходов $\langle i_0, i_1, \ldots, i_t\rangle$ такая, что $i_0 = k$, $i_t = 1$ и

$$\prod_{l=0}^{t-1} p_n(i_l, i_{l+1}) \geqslant a > 0. \tag{11}$$

Имеет место следующее стохастическое соотношение:

$$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 \text{ с вероятностью } P\{\omega_n(k) = 0\}. \\ \xi_n(k) \text{ с вероятностью } P\{\omega_n(k) > 0\}, \end{cases} \tag{12}$$

где $\xi_n(k)$ — геометрически распределенная случайная величина с некоторым параметром $p_n \geqslant a > 0$, т. е. $1 \leqslant \mathbf{M}\xi_n(k) \leqslant \frac{1}{a} < \infty$. Тогда из (12)

$$\mathbf{M}\omega_n(k) = P\{\omega_n(k) > 0\}\, \mathbf{M}\xi_n(k),$$

откуда следует (10). Лемма доказана.

---

*) $\alpha = 0(\beta)$, если $0 < \lim \frac{\alpha}{\beta} < \infty$.

Рассмотрим теперь величину $\rho_n(1)$. Из (11) легко следует, что величина $\rho_n(1)$ имеет равномерно ограниченные по n моменты любого порядка. Тогда, так как $\mathbf{M}\rho_n(1) = q_n(1)^{-1}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\nu_n} (\rho_n(k) - q_n(1)^{-1}) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} N(0, \sigma^2), \tag{13}$$

где $0 \leqslant \sigma^2 < \infty$, и выполнено (8).

Теперь, так как $\hat{\tau}_n(1)$ и величина $n - \tau_n(\nu_n^{(j)}(1)$ (см. (6)) равномерно по n ограничены по вероятности (для величины $n - \tau_n(\nu_n^{(j)}(1))$ это следует из того, что для любого $\{k\}$ — время достижения из $\{k\}$ состояния $\{1\}$ — равномерно по n ограниченная случайная величина), то при $\alpha_n(k) \to 0$, $k = \overline{1, r}$

$$\tilde{Y}_n(0) \xrightarrow{p} 0 \text{ и } \tilde{\tilde{Y}}_n \xrightarrow{p} 0.$$

Таким образом, нам нужно определить вид предельного распределения величины (9). Для этого рассмотрим детально величину $Y_n(1)$. Положим $a_n = \sum_{k=1}^{r} \alpha_n(k) q_n(k) f_k$. Тогда $\mathbf{M}Y_n(1) = 0$. Представим $Y_n(1)$ в следующем виде:

$$Y_n(1) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_n(k) (\omega_n(k) - q_n(k) \rho_n(1)) f_k.$$

Рассмотрим отдельно величину $\tilde{\omega}_n(k) = \omega_n(k) - q_n(k) \rho_n(1)$. Возможны следующие случаи.

1) $q_n(k) \to 0$. Тогда в силу леммы легко следует, что

$$\mathbf{D}\tilde{\omega}_n(k) = O(q_n(k)).$$

2) $q_n(k) \nrightarrow 0$. Тогда $\{k\}$ будет принадлежать некоторому подклассу $\langle\alpha\rangle$, причем если для цепи с матрицей $\overline{P}$ этот подкласс будет состоять из нескольких состояний, то очевидно $\mathbf{D}\tilde{\omega}_n(k) = 0(1)$. Если же в цепи с матрицей $\overline{P}$ этот подкласс состоит только из одного состояния $\left(\text{это эквивалентно тому, что } q_n(k) \to \frac{1}{h}\right)$, то поскольку исходные подклассы строились по переходам типа «2», т. е. вероятности переходов между подклассами для цепи X_n, нарушающие цикличность, будут порядка $\frac{1}{n}$, и в силу этого $\frac{1}{h} - \sum_{i \in \langle\alpha\rangle} q_n(i) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, будем иметь

$$\mathbf{D}\tilde{\omega}_n(k) = O\left(\sum_{\substack{i \in \langle\alpha\rangle \\ i \neq k}} q_n(i)\right) = O\left(\frac{1}{h} - q_n(k)\right).$$

Аналогично получим

$$\mathbf{M}\,|\tilde{\omega}_n(k)|^3 = O\left(\min\left(q_n(k),\quad \left|\frac{1}{h} - q_n(k)\right|\right)\right).$$

Положим теперь $\alpha_n(k)$ так, как указано в теореме 1 (заметим, что $\alpha_n(k) \to 0$, $k = \overline{1, r}$, так как $nq_n(k) \to \infty$ в силу определения переходов типа «2»). Тогда окончательно имеем

$$\alpha_n(k)\,\mathbf{M}\tilde{\omega}_n(k) = O, \quad \alpha_n^2(k)\,D\tilde{\omega}_n(k) = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{14}$$

$$\alpha_n^3(k)\,\mathbf{M}\,|\tilde{\omega}_n(k)|^3 = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad k = \overline{1, r}.$$

Теперь, поскольку $\mathbf{M}\,|\tilde{\omega}_n(k)\,\tilde{\omega}_n(l)| \leqslant \sqrt{D\tilde{\omega}_n(k)}\,\sqrt{D\tilde{\omega}_n(l)}$, получим

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda Y_n(1)\} = 1 - \frac{1}{n\bar{q}(1)}\,\frac{\lambda^2\sigma^2(f)}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{15}$$

где $\sigma^2(f) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant r} \alpha_{kj} f_k f_j$, причем $0 < \alpha_{kk} < \infty$, $k = \overline{1, r}$,

$$\alpha_{kj} = \lim_{n\to\infty} n\alpha_n(k)\,\alpha_n(j)\,\mathbf{M}\tilde{\omega}_n(k)\,\tilde{\omega}_n(j) \qquad (0 \leqslant |\alpha_{kj}| < \infty).$$

Из (15) следует, что распределение ζ_n (см. (9)) слабо сходится к нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2(f))$. Теорема 1 доказана. (Ранг квадратичной формы $\sigma^2(f)$ будет исследован после доказательства всех трех теорем).

В том случае, когда матрице $\bar{\mathrm{P}}$ соответствует один существенный класс,

$$\sigma^2(f) = \sum_{k=1}^{r} \bar{q}(k)\,(f_k - \bar{a})^2 - \frac{2}{\Delta'(1)} \sum_{k,l,j=1}^{r} \times$$

$$\times\, \bar{q}(k)\,(f_k - \bar{a})\,\bar{p}(k, l)\,D'(j, l, 1)\,(f_j - \bar{a}), \tag{16}$$

где $\bar{a} = \sum\limits_{k=1}^{r} \bar{q}(k)\,f_k$, $\Delta(\mu) = |\mu\mathrm{I} - \bar{\mathrm{P}}|$, а $D(j, l, \mu)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы $(\mu\mathrm{I} - \bar{\mathrm{P}})$ (см. [10], стр. 8).

В том случае, когда могут быть несущественные состояния, положим $\hat{f}_n(k) = \sqrt{n}\,\alpha_n(k)\,f_k$, $k = \overline{1, r}$. Тогда $\sigma^2(f)$ можно вычислить как предел выражения (16), посчитанного для величин $\hat{f}_n(k)$ и матрицы P_n.

Доказательство теоремы 2. Здесь мы воспользуемся тем же методом, что и при доказательстве теоремы 1, т. е. определим разложение характеристической функции величины $Y_n(1)$. Найдем вначале вероятность того, что цепь между двумя последовательными возвращениями в $\{1\}$ выйдет из множества $\langle\alpha\rangle = \{1, 2, \ldots, r_1\}$ в множество состояний $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$ и при этом попадет в состояние $\{k\}$ $(k > r_1)$ (обозначим ее $u_n(k)$). Пусть ${}_1p_n^{(m)}(1, l)$ — вероятность того, что цепь, выйдя из $\{1\}$, за m шагов перешла в $\{l\}$, не выходя при этом из $\langle\alpha\rangle$ и не возвращаясь в $\{1\}$. Тогда очевидно, что

$$u_n(k) = \sum_{l=1}^{r_1} \sum_{m=1}^{\infty} {}_1p_n^{(m)}(1, l)\, p_n(l, k). \tag{17}$$

Теперь заметим, что вероятности переходов, ведущих в множество $\{r_1+1, \ldots, r\}$ порядка $\frac{1}{n}$ (так как они несущественны по переходам типа «2»). Отсюда и из [11] (стр. 74) легко следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} {}_1p_n^{(m)}(1, l) = \mathbf{M}\omega_n(l) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда из (17)

$$u_n(k) = \frac{1}{q_n(1)} \sum_{l=1}^{r_1} q_n(l)\, p_n(l, k) + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Обозначим

$$g_n(k) = \frac{1}{q_n(1)} \sum_{l=1}^{r_1} q_n(l) \sum_{k=r_1+1}^{r} p_n(l, k). \tag{19}$$

Таким образом, наша цепь ведет себя следующим образом: между двумя последовательными попаданиями в $\{1\}$ цепь либо с вероятностью $1 - g_n + o\left(\frac{1}{n}\right)$ не выйдет из класса $\langle\alpha\rangle$, либо с вероятностью $u_n(k)$ выйдет из $\langle\alpha\rangle$, попадет при этом в $\{k\}$ $(k > r_1)$, после чего сделает на множестве $\{r_1+1, \ldots, r\}$ некоторое количество скачков и вернется в $\langle\alpha\rangle$, причем несколько выходов из $\langle\alpha\rangle$ может произойти с вероятностью $\sim o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Введем величины $\alpha_n(k)$, как указано в формулировке теоремы. Тогда с точностью до событий, вероятности которых $o\left(\frac{1}{n}\right)$, можно записать

$$Y_n(1) = \begin{cases} \tilde{Y}_n(1) \text{ с вероятностью } 1 - g_n \\ \tilde{Y}'_n + \tilde{\varphi}_n(k) + \tilde{Y}''_n \text{ с вероятностью } u_n(k), \quad k = \overline{r_1+1, r}, \end{cases} \tag{20}$$

где $\tilde{Y}'_n + \tilde{Y}''_n \xrightarrow{p} 0$, $\tilde{Y}_n(1)$ — сумма величин $f_n(l)$ между двумя последовательными возвращениями в $\{1\}$ при условии, что цепь не вышла из $\langle\alpha\rangle$, а $\tilde{\varphi}_n(k)$ — сумма величин $f_n(l)$ на состояниях $\{r_1+1, \ldots, r\}$ до первого попадания в $\langle\alpha\rangle$ при условии, что начальным было состояние $\{k\}$.

В силу теоремы 1 легко понять, что

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda\tilde{Y}_n(1)\} = 1 - \frac{1}{n\bar{q}(1)}\frac{\lambda^2\tilde{\sigma}^2(f)}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{21}$$

где $\tilde{\sigma}^2(f)$ — некоторая квадратичная форма переменных f_l, $l=\overline{1, r_1}$, которая определяется для $\langle\alpha\rangle$ так же, как в теореме 1.

Найдем распределение $\tilde{\varphi}_n(k)$. Очевидно, что

$$\tilde{\varphi}_n(k) = f_k - a_n + \begin{cases} \tilde{\varphi}_n(l) \text{ с вероятностью } p_n(k, l), \\ \qquad l = \overline{r_1+1, r} \\ 0 \text{ с вероятностью } \sum_{t=1}^{r_1} p_n(k, t). \end{cases} \tag{22}$$

Обозначим $\overline{\varphi_n(\lambda)}$ — вектор-столбец с компонентами $\mathbf{M}\exp\{i\lambda\tilde{\varphi}_n(k)\}$, $k=\overline{r_1+1, r}$. Пусть $\overline{\varphi(\lambda)} = \lim_{n\to\infty}\overline{\varphi_n(\lambda)}$. Тогда, переходя в (22) к характеристическим функциям и учитывая, что $a_n \to 0$, после преобразований получим (в обозначениях теоремы 2)

$$\overline{\varphi(\lambda)} = (\mathrm{I} - \mathrm{FA})^{-1}\mathrm{F}\bar{p}. \tag{23}$$

Пусть вектор $\bar{\pi}$ вводится, как в (3) ($\bar{\pi}$ — предельное распределение вероятностей перехода в состояния $\{r_1+1, \ldots, r\}$ при условии выхода из $\langle\alpha\rangle$), $c = \lim_{n\to\infty} ng_nq_n(1)$.

Тогда из (20), учитывая (21), получим

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda Y_n(1)\} = 1 + \frac{1}{n\bar{q}(1)}\left\{-\frac{\lambda^2\tilde{\sigma}^2(f)}{2} + c\,[\bar{\pi}(\mathrm{I}-\mathrm{FA})^{-1}\mathrm{F}\bar{p} - 1]\right\} + \\ + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{24}$$

Воспользуемся теперь представлением $S_n(j) - na_n$ в виде (5). Как легко понять, если $1 \leqslant j \leqslant r_1$, то $\tilde{Y}_n(0) \xrightarrow{p} 0$. Если же $j = k$, где $k > r_1$, то $\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\exp\{i\lambda\tilde{Y}_n(0)\} = \varphi_k(\lambda)$, где $\varphi_k(\lambda)$ — $k - r_1$-й элемент вектора $\overline{\varphi}(\lambda)$ (см. (23)). Кроме того, в нашем случае также выполнено (8) и (13), а $\tilde{Y}_n \xrightarrow{p} 0$. Отсюда и из (24) следует доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим сначала подслучай 1 и воспользуемся матричным методом. Обозначим

$$\zeta_n(j, m) = \sum_{l=1}^{m} f_n(x_n(l)) - \frac{m}{h}\sum_{k=1}^{h} f_k \quad (x_n(1) = j).$$

Заметим, что $\zeta_n(j, n) = S_n(j) - \frac{n}{h}\sum_{k=1}^{h} f_k$.

Для величин $\zeta_n(j, m)$ можно получить следующее соотношение:

$$\zeta_n(j, m) = \tilde{f}_j + \{\zeta_n(j, m-1) \text{ с вероятностью } p_n(j, l), \quad l = \overline{1, r}\}, \tag{25}$$

где

$$\tilde{f}_j = f_j - \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} f_k.$$

Отсюда, обозначив через $\overline{\varphi_n(\lambda)}$ — вектор-столбец с компонентами $\mathbf{M}\exp\{i\lambda\zeta_n(j, n)\}$, $j = \overline{1, r}$ и заметив, что $\zeta_n(j, 1) = \tilde{f}_j$, из (25) получим

$$\overline{\varphi_n(\lambda)} = (\mathrm{F_1P}_n)^n\bar{1}, \tag{26}$$

где F_1 — диагональная матрица с элементами $\exp\{i\lambda\tilde{f}_j\}$, $j = \overline{1, r}$.

Вычислим предел (26) при $n \to \infty$. На основании формулы (24) ([12], стр. 113) для матрицы А с минимальным многочленом $\psi(\mu) = (\mu - \mu_1)^{m_1} \ldots (\mu - \mu_u)^{m_u}$ и приведенной присоединенной матрицей $\mathrm{C}(\mu) = (\mu\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}\psi(\mu)$ имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{A}^n = \sum_{k=1}^{u} \frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{C(\mu)}{\overset{k}{\psi}(\mu)}\mu^n\right]^{(m_k-1)}_{\mu=\mu_k}, \tag{27}$$

где $\overset{k}{\psi}(\mu) = \psi(\mu)(\mu - \mu_k)^{-m_k}$, $k = \overline{1, u}$, $\psi(\mu) = \frac{\Delta(\mu)}{d(\mu)}$, $\Delta(\mu) = |\mu\mathrm{I} - \mathrm{A}|$, а $d(\mu) =$ НОД элементов матрицы $\Delta(\mu)(\mu\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1}$. Обозначим $\psi_n(\mu)$ и $\mathrm{C}_n(\mu)$ ($\psi(\mu)$ и $\mathrm{C}(\mu)$ соответственно) минимальный многочлен и присоединенную матрицу для матрицы $\mathrm{F_1P}_n$ ($\mathrm{F_1\bar{P}}$). Из условия теоремы следует, что $\bar{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix}\mathrm{P_1} & \mathrm{O}\\ \mathrm{Q} & \mathrm{P_2}\end{pmatrix}$, где $\mathrm{P_1}$ — циклическая матрица порядка $h = r_1$, а матрица $\mathrm{P_2}$ — соответствует переходам на несущественных состояниях. Отсюда $\mathrm{F_1\bar{P}}$ имеет подобную структуру, и можно легко показать, что $\psi(\mu) = (\mu^h - 1)p_1(\mu)$, где $p_1(\mu)$ — многочлен степени не более $r - h$, все корни которого по модулю меньше единицы. Обозначим $\mu_n(k)$, $k = \overline{1, s}$ ($h \leqslant s \leqslant r$) корни многочлена $\psi_n(\mu)$. Пусть $\mathrm{P_1}(n) = \|p_n(k, l)\|$, $k, l = \overline{1, r_1}$. Тогда поскольку $\mathrm{P_1}(n) - \mathrm{P_1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, то $\mu_n(k) - \bar{\mu}_k = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, $k = \overline{1, h}$, где $\bar{\mu}_k$, $k = \overline{1, h}$ — корни h-й степени из единицы. Заметим, что $\mu_n(k)^n \to 0$ при $k > h$, $\mathrm{C}_n(\mu) \to \mathrm{C}(\mu)$. Обозначим $\delta_k(f) = \lim_{n\to\infty} n(\mu_n(k) - \bar{\mu}_k)$, $k = \overline{1, h}$. Тогда при $n \equiv d \pmod h$, $k = \overline{1, h}$

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(k)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\bar{\mu}_k + \frac{\delta_k(f)}{n}\right)^n = \bar{\mu}_k^d\exp\left\{\frac{\delta_k(f)}{\bar{\mu}_k}\right\}.$$

Запишем теперь в (26) для матрицы $(F_1P_n)^n$ представление в форме (27) и, перейдя к пределу при $n \to \infty$ ($n \equiv d \pmod h$)), получим

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \sum_{k=1}^{h} \frac{\bar{\mu}_k^d}{\psi'(\bar{\mu}_k)} \exp\left\{\frac{\delta_k(f)}{\bar{\mu}_k}\right\} C(\mu_k)\,\bar{1}.$$

Заметим теперь, что $\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{h} (\bar{\mu}_j - \bar{\mu}_k) = \frac{h}{\bar{\mu}_j}$, отсюда $\psi'(\mu_k) = \frac{h}{\mu_k} p_1(\mu_k)$.

И кроме того, $d(\mu)\,p_1(\mu) = \frac{\Delta(\mu)}{\mu^h - 1}$ и $d(\mu)\,C(\mu) = \Delta(\mu)\,(\mu I - F_1\bar{P})^{-1}$.

Отсюда следует (4).

Исследуем теперь случай 2. Назовем те состояния, которые входят в подклассы (построенные по переходам типа «2») с большим, чем одно, числом состояний — «выделенными». Рассмотрим величину $S_n(j) - na_n$, где $a_n = \sum_{k=1}^{r_1} \alpha_n(k)\, q_n(k)\, f_k$, и нормирующие множители $\alpha_n(k)$ на «выделенных» состояниях определим, как в теореме 1, а на остальных положим $\alpha_n(k) = 1$ $\left(\text{если } \{k\} \text{ само образует подкласс, можно считать, что } q_n(k) = \frac{1}{h}\right)$. Теперь из теоремы 1 легко следует, что если положить $f_k = 0$ для всех k, которые не являются «выделенными», то предельное распределение $S_n(j) - na_n$ независимо от $j = \overline{1, r}$ будет нормальным с параметрами $(0, \tilde{\sigma}^2(f))$, где $\tilde{\sigma}^2(f)$ — квадратичная форма, явно зависящая от всех переменных f_k, заданных на «выделенных» состояниях. Если же теперь, наоборот, положить $f_k = 0$ для всех «выделенных k, то предельное распределение $S_n(j) - na_n$ можно вычислить по формуле (4). Покажем, что когда все $f_k \neq 0$, предельное распределение есть композиция независимых нормального и типа (4). Посмотрим, как ведет себя цепь между двумя последовательными возвращениями в $\{1\}$. Вероятности переходов, нарушающих цикличность либо ведущих в состояния $\{r_1 + \bar{1}, \ldots, r\}$, есть величины порядка $\frac{1}{n}$ (это следует из леммы и того, что циклические подклассы строились только по переходам типа «2»). Тогда может быть следующее.

а) С вероятностью $1 - p_n$ $\left(p_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ цепь проделает некоторое число скачков между подклассами и вернется в $\{1\}$, причем цикличность не будет нарушена. Тогда добавится некоторая случайная величина $\tilde{Y}_n(1)$, причем очевидно, что при таком введении $\alpha_n(k)$ и a_n величины f_k, заданные на подклассах, состоящих из одного состояния, в $\tilde{Y}_n(1)$ сократятся, а величины f_k, заданные на состояниях $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$, в $\tilde{Y}_n(1)$ просто не войдут (так как в них не было перехода), т. е. в $\tilde{Y}_n(1)$ войдут только величины f_k, заданные на «выделенных» состояниях, и в силу теоремы 1

$$\mathbf{M}\hat{Y}_n(1)=0, \quad \mathbf{D}\hat{Y}_n(1)=(nq_n(1))^{-1}\hat{\sigma}^2(f).$$

б) С вероятностью p_n цепь выйдет в множество $\{r_1+1, \ldots, r\}$ или произойдет переход между подклассами, нарушающий цикличность, при этом добавится некоторая величина $\tilde{\tilde{Y}}_n(1)$, в которую уже войдут величины f_k, заданные не на «выделенных» состояниях. А поскольку для «выделенных» $\{k\}$ $\alpha_n(k)\to 0$, то понятно, что $\mathbf{M}\exp\{i\lambda\tilde{\tilde{Y}}(1)\}\to\psi(\lambda, f)$, где $\psi(\lambda, f)$ содержит только те f_k, которые заданы не на «выделенных» состояниях. Отсюда получим, что

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda Y_n(1)\}=1-\frac{1}{n\bar{q}(1)}\frac{\lambda^2\tilde{\sigma}^2(f)}{2}+p_n(\psi(\lambda, f)-1)+o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{28}$$

где $p_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Из (28) следует, что характеристическая функция предельного распределения $S_n(j)-na_n$ представляется в виде произведения нормального закона (куда входят только величины f_k, заданные на «выделенных» состояниях) на характеристическую функцию, в которую входят остальные величины f_k. Так как f_k — произвольные константы, отсюда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь вопрос о размерности получаемого нормального закона, т. е. о ранге квадратичной формы $\sigma^2(f)$. Предположим, что мы находимся в условиях теоремы 1. Обозначим через $\{\xi_k, k=\overline{1, r}\}$ вектор, многомерное распределение которого совпадает с предельным распределением вектора $\{\alpha_n(k)(\nu_n^{(j)}(k)-nq_n(k)), k=\overline{1, r}\}$. Пусть $\langle\beta\rangle$ — один циклический подкласс. Тогда покажем, что существуют константы c_k такие, что $\sum\limits_{k\in\langle\beta\rangle}c_k\xi_k=0$, причем хотя бы две константы отличны от нуля, т. е. каждый циклический подкласс накладывает линейное условие на компоненты вектора и поэтому распределение будет не более, чем $r-h$-мерное. Действительно, обозначим $\nu_n(\langle\beta\rangle)=\sum\limits_{k\in\langle\beta\rangle}\nu_n^{(j)}(k)$ ($\nu_n(\langle\beta\rangle)$ — количество попаданий цепи в подкласс $\langle\beta\rangle$). Тогда, как следует из теоремы 3, величина $\nu_n(\langle\beta\rangle)-\frac{n}{h}$ будет иметь собственное предельное распределение, т. е. если $\alpha_n\to 0$, то

$$\alpha_n\left(\nu_n(\langle\beta\rangle)-\frac{n}{h}\right)\xrightarrow{p}0. \tag{29}$$

Заметим, что $\sum\limits_{k\in\langle\beta\rangle}q_n(k)=\frac{1}{h}+O\left(\frac{1}{n}\right)$. Положим $\alpha_n=\min\limits_{k\in\langle\beta\rangle}\alpha_n(k)$.

Тогда (29) можно переписать в виде $\sum\limits_{k\in\langle\beta\rangle} \alpha_n (\nu_n^j (k) - nq_n (k)) \xrightarrow{p} 0$. Откуда, положив $c_i = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n (i)^{-1} \alpha_n \, (0 \leqslant c_i < \infty)$ и воспользовавшись тем, что $\{\alpha_n (k) (\nu_n^j (k) - nq_n (k)), \quad k = \overline{1, r}\} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \{\xi_k, k = \overline{1, r}\}$, получим $\sum\limits_{k\in\langle\beta\rangle} c_k \xi_k = 0$. Теперь, поскольку было показано, что $D\xi_k > 0$, $k = \overline{1, r}$, то отсюда следует, что по крайней мере две константы отличны от нуля (это можно показать и непосредственно, исследуя порядок нормирующих множителей α_n (k)). Таким образом, доказательство теорем 1—3 завершено.

Укажем теперь, как следствия из теорем 1—3, вид многомерных предельных распределений для вектора частот попаданий в состояния.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 распределение случайного вектора $\{\alpha_n (k) (\nu_n^{(j)} (k) - nq_n (k)), \quad k = \overline{1, r}\}$ слабо сходится к многомерному нормальному распределению с нулевым средним и ковариационной матрицей, определяемой квадратичной формой $\sigma^2 (f)$.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 многомерное распределение случайного вектора $\{\alpha_n (k) (\nu_n^{(j)} (k) - nq_n (k)), \ k = \overline{1, r_1}, \ \nu_n^{(j)} (l), \ l = \overline{r_1 + 1, r}\}$ при условии, что начальное состояние цепи j, слабо сходится к распределению вектора $\{\bar{\xi}, \ \bar{\nu}_j\}$, где $\bar{\xi}$ и $\bar{\nu}_j$ — независимы, $\bar{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_{r_1}\}$ — вектор, имеющий многомерное нормальное распределение, а $\bar{\nu}_j = \{\nu_1^{(j)}, \ \ldots, \nu_{r-r_1}^{(j)}\}$ — вектор, многомерная характеристическая функция которого равна

$$\psi_j (\lambda) \exp \{c [\bar{\pi} (\mathrm{I} - \mathrm{FA})^{-1} \mathrm{F} \bar{p} - 1]\} |_{\lambda=1}, \tag{30}$$

где ψ_j (λ) определяется в теореме 2.

Замечание. Если $r_1 = 1$, то α_n $(1) = 1$, q_n $(1) = 1$, а предельный вектор будет иметь вид $\{\nu_0^{(j)}, \ \nu_1^{(j)}, \ . \ . \ . \ , \ \nu_{r-1}^{(j)}\}$, где $\nu_0^{(j)} = - \sum\limits_{k=1}^{r-1} \nu_k^{(j)}$.

Следствие 3. Пусть I_1, I_2 и I_3 соответственно множества «выделенных» состояний, множество состояний; каждое из которых образует само отдельный подкласс, и множество $\{r_1 + 1, \ldots, r\}$. Тогда в условиях теоремы 3 многомерное распределение вектора

$$\left\{\alpha_n (k) (\nu_n^{(j)} (k) - nq_n (k)), \quad k \in I_1, \quad \nu_n^{(j)} (l) - \frac{n}{h}, \quad l \in I_2, \right.$$

$$\left. \nu_n^{(j)} (m), \quad m \in I_3 \right\}$$

слабо сходится к распределению вектора

$$\{\xi_k, k \in I_1, \quad \eta_l^{(j)}, \quad l \in I_2, \quad \zeta_m^{(j)}, \quad m \in I_3\},$$

где вектор $\{\xi_k, \ k \in \mathrm{I}_1\}$ не зависит от совокупности остальных компонент и имеет многомерное нормальное распределение, а многомерная характеристическая функция вектора $\{\eta_l^{(j)},\ l \in I_2,\ \zeta_m^{(l)},\ m \in I_3\}$ определяется формулой (4). (Если нас будет интересовать только распределение вектора $\{\zeta_m^{(j)},\ m \in I_3\}$, то его можно найти из формулы (30)).

Сформулируем в заключение одну теорему, которая относится к суммированию случайных величин на цепи Маркова.

Пусть $\mathfrak{A}_n = \{\xi_n^{(k)}(l),\ l = \overline{1, r},\ k = 1, 2, \ldots\}$ — независимое от цепи X_n семейство независимых в совокупности случайных величин, распределение которых не зависит от индекса k. Предположим, что $\mathbf{M}\xi_n^{(1)}(l) = m_n(l)$, $D\xi_n^{(1)}(l) = \sigma_n^2(l)$, причем $0 \leqslant |\overline{m}(l)| \leqslant \infty$, $0 \leqslant \bar{\sigma}^2(l) < \infty$, где $\overline{m}(l) = \lim\limits_{n\to\infty} m_n(l)$, $\bar{\sigma}^2(l) = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma^2(l)$, $l = \overline{1, r}$ и, кроме того,

$$\underset{l=\overline{1,r}}{\mathbf{M}} \exp\{i\lambda(\xi_n^{(1)}(l) - m_n(l))\} = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\bar{\sigma}^2(l) + o(\lambda^2),$$

Обозначим $\hat{\xi}_n^{(k)}(l) = (\sqrt{q_n(l)})^{-1}\xi_n^{(k)}(l)$, $\quad l = \overline{1, r}, \quad k \geqslant 1.$

Теорема 4. Если цепи X_n по переходам типа «2» соответствует только один класс, то предельное распределение случайной величины

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \hat{\xi}_n^{(k)}(x_n(k)) - na_n\right)$$

будет нормальным с параметрами $(0, \sigma^2)$.

Здесь $a_n = \sum\limits_{k=1}^{r} m_n(k)\sqrt{q_n(k)}$, а $\sigma^2 = \sum\limits_{k=1}^{r} \bar{\sigma}^2(k) + \sigma^2(\overline{m})$,

где $\sigma^2(\overline{m})$ — квадратичная форма, которая определяется так же, как в теореме 1, где, однако, вместо величин f_k будет $\overline{m}(k)$, $k = \overline{1, r}$.

Доказательство проводится подобно тому, как это делалось в работе [9]. Представим величину ζ_n в следующем виде:

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{r} \eta_n(k) + \tilde{\eta}_n,$$

где

$$\eta_n(k) = \frac{1}{\sqrt{nq_n(k)}} \sum_{l=1}^{\nu_n^{(j)}(l)} (\xi_n^{(l)}(k) - m_n(k)), \qquad k = \overline{1, r},$$

$$\tilde{\eta}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} \hat{f}_n(x_n(k)) - na_n\right),$$

$$\hat{f}_n(l) = (\sqrt{nq_n(l)})^{-1} m_n(l), \qquad l = \overline{1, r}.$$

Теперь вследствие того, что $(\sqrt{nq_n(l)})^{-1}\nu_n^{(j)}(l) \xrightarrow{p} 1$, $l = \overline{1, r}$, из теоремы 1 [9] следует, что $\eta_n(l) \underset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_l$, $l = \overline{1, r}$, где ξ_l — нормально распределенная величина с параметрами $(0, \bar{\sigma}^2(l))$, причем величины ξ_l, $l = \overline{1, r}$ независимы в совокупности и не зависят от предельного распределения $\tilde{\eta}_n$, которое в силу теоремы 1 настоящей работы будет нормальным с параметрами $(0, \sigma^2(\overline{m}))$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. М., Вестник ун-та, 10, 1953.
2. Добрушин Р. Л. Предельные законы для цепей Маркова.— Изв. АН СССР, сер. матем., 17, 4, 1953.
3. Мешалкин Л. Д. Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний.— Теория вероят. и ее примен., 3, 4, 1958.
4. Ильяшенко А. А. Предельные законы для цепей Маркова с конечным числом состояний.— Укр. матем. журнал, 10, 1, 1958.
5. Ядренко М. И. Дипломная работа, КГУ, 1955.
6. Кубилюс В. П. О распределении числа попаданий в состояния конечной цепи Маркова.— Теория вероят. и ее примен., 8, 1, 1963.
7. Hanin R.— CR Acad. Sci., 256, 1—3, 1963.
8. Анісімов В. В. Деякі теореми про граничні розподіли сум випадкових величин, зв'язаних в однорідний ланцюг Маркова.— Доповіді АН УРСР, сер. А, № 2, 1970.
9. Анисимов В. В. Предельные теоремы для полумарковских процессов. I, II.— Теория вероятн. и матем. статистика, вып. 2, 1970.
10. Анисимов В. В. Предельные теоремы для сумм случайных величин на цепи Маркова, связанные с выходом из множества, образующего в пределе один класс.— Теория вероят. и матем. статистика, вып. 4, 1971.
11. Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. М., «Мир», 1964.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.

V. V. Anisimov

DESCRIPTION OF THE MULTIDIMENSIONAL LIMIT DISTRIBUTIONS FOR THE FINITE MARKOV CHAINS IN THE SCHEME OF SERIES. THE CASE OF ONE CLASS AND UNESSENTIAL STATES IN LIMIT

Summary

All possible multidimensional limit distributions for the vector of numbers of hittings times in the states of the finite homogeneous Markov chain are described in the scheme of series in the case, when the set of states constructs one essential class and unessential states in limit.

Поступила в редколлегию 20.XII 1971.