П. БЭГЗЖАВ, Д. БЯМБАЖАВ, А. ДОРЖГОТОВ
Монгольский университет, г. Улан-Батор

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ СТАТИСТИКИ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В работах [1, 2] были построены приближенные критерии и оценки для среднего значения гауссовского случайного процесса. Авторам настоящей заметки удалось несколько улучшить некоторые результаты, полученные в этих работах.

1. Пусть $x(t)$ — гауссовский случайный процесс с известной корреляционной функцией $R(s, t)$ и конечной дисперсией. Предположим, что процесс $x(t)$ имеет неизвестное среднее $m(t)$ и наблюдается в интервале $[a, b]$. Будем рассматривать вопрос проверки гипотезы H_0, состоящей в том, что $m(t) \equiv 0$ относительно альтернативной гипотезы H_1, согласно которой $m(t) = a(t)$ ($a(t)$ — известная интегрируемая с квадратом на $[a, b]$ функция).

Обозначим через μ_i ($i = 0, 1$) меру в пространстве реализации нашего процесса, соответствующую гипотезе H_i ($i = 0, 1$). Тогда в силу наших предположений реализации нашего процесса принадлежат $L_2[a, b]$ — пространству всех интегрируемых с квадратом функций по Лебегу на $[a, b]$ μ_i — почти наверное. Известно, что меры μ_0 и μ_1 либо эквивалентны, либо ортогональны [3].

Поскольку корреляционное ядро $R(s, t)$ интегрируемо с квадратом, то система его ортонормированных собственных функций $\{\varphi_k\}$ в $L_2[a, b]$ образует базис.

Если обозначим через $L_2^0[a, b]$ собственное подпространство, натянутое на собственные функции, соответствующие собственному значению нуль, то

$$L_2[a, b] = L_2^0[a, b] \oplus L_2'[a, b]$$

и

$$\{\varphi_k\} = \{\varphi_k^0\} \oplus \{\varphi_k'\},$$

где $L_2'[a, b]$ — ортогональное дополнение к $L_2^0[a, b]$, а $\{\varphi_k^0\}$ и $\{\varphi_k'\}$ суть базисы соответственно в пространствах $L_2^0[a, b]$ и $L_2'[a, b]$.

В качестве наблюдаемых координат выберем следующие случайные величины:

$$x_k^0 = \int_a^b x(t)\, \varphi_k^0(t)\, dt; \quad x_k' = \int_a^c x(t)\, \varphi_k'(t)\, dt.$$

Ясно, что $a(t) = a^0(t) + a'(t)$, где $a^0(t) \in L_2^0[a, b]$, $a'(t) \in L_2'[a, b]$. Если $a^0(t) \neq 0$, то найдется по крайней мере один номер k, при котором $E_1 x_k^0 \neq 0$. В этом случае за критическую область можно принять множество

$$S = \{x_k^0 = E_1 x_k^0\}, \text{ причем } \mu_0(s) = 0 \text{ и } \mu_1(s) = 1.$$

В противном случае, когда $a^0(t) = 0$, для всех k имеем $E_1 x_k^0 = 0$. Тогда интегральный оператор B с ядром $R(s, t)$, действующий в пространстве $L_2'[a, b]$, является строго положительно определенным.

Следовательно, интегральное уравнение

$$Bf = \int_a^b R(s, t) f(t)\, dt = a(s) \tag{1}$$

имеет единственное решение $f(t)$ в пространстве

$L_2'[a, b]$. Из того, что $\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k}\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2_{(t)}\, dt \int_a^b a^2(t)\, dt$,

следует эквивалентность мер μ_0 и μ_1. Поэтому плотность $\rho(x)$ меры μ_0 относительно μ_1 имеет вид

$$\rho(x) = \frac{d\mu_1}{d\mu_0}(x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\lambda_k} x_k' - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k}\right\},$$

где λ_k — собственные значения ядра $R(s, t)$, $a_k = \int_a^b a(t) \varphi_k(t)\, dt$.

Следовательно, область $\{\rho(x) \leqslant c\}$ или ей эквивалентная область

$$\left\{\eta = \int_a^b f(t)\, x(t)\, dt \leqslant c\right\} \tag{2}$$

является наилучшей критической областью и задает наиболее мощный критерий задачи.

Итак, для конкурирующих гипотез H_i $(i = 0, 1)$ для среднего значения рассматриваемого нами процесса всегда существует наилучшая критическая область, которая определяется формулой (2).

2. Хотя форма критерия (2) является очень удобной, но практическое его осуществление затруднительно в связи с нахождением решения уравнения (1). Следовательно, приобретает интерес построение последовательности приближенных критериев, обладающих хорошими асимптотическими свойствами.

Как показано в [4], последовательность функций, задаваемая формулой

$$f_n(t) = R_k(B) f_{n-1}(t) + B^{-1}(I - R_k(B))\, a(t), \tag{3}$$

где $R_k(x)$ — многочлен Чебышева порядка k, определенный на $[m, M]$, такой, что $R_k(0) = 1$, а m и M суть границы спектра оператора B, сходится в среднеквадратическом к решению $f(t)$ уравнения (1).

Используя эту итерацию, построим последовательность областей

$$\left\{\eta_n^k = \int_a^b f_n(t)\, x(t)\, dt \leqslant C_n^k\right\}. \tag{4}$$

Легко показать, что эта последовательность областей сходится почти наверное к области (2) относительно обеих гипотез, причем быстрота сходимости оценивается следующим неравенством:

$$E_i\,[\eta_n^k - \eta]^2 \leqslant K_i \frac{1}{\left|T_k\left(-\frac{M+m}{M-m}\right)\right|^{2n}} \|f_0 - f\|^2, \tag{5}$$

где $K_i = E_i\left(\int_a^b x^2(t)\, dt\right)$; $\quad \dfrac{1}{\left|T_k\left(-\frac{M+m}{M-m}\right)\right|} = \max\limits_{m \leqslant \lambda \leqslant M} |R_k(\lambda)|.$

Отметим, что приближенные критерии, построенные в [1], являются частным случаем критериев (4), когда $k = 1$. Из неравенства (5) видно, что скорость сходимости построенных нами приближенных критериев больше, чем скорость сходимости критериев в [1], где отсутствует оценка для скорости сходимости.

Замечание. В рассматриваемом случае, т. е. когда гауссовский процесс $x(t)$ имеет конечную дисперсию, а функция $a(t) \in L_2'[a, b]$, для построения последовательности приближенных критериев, сходящейся к наилучшему, формально можно основываться на формуле (3), не обращая внимания как на существование, так и на нахождение решений уравнения (1).

3. Рассмотрим теперь вопрос об оценке построенного среднего значения $m(t) = m$ гауссовского случайного процесса $x(t)$ с конечной дисперсией и известной корреляционной функцией $R(s, t)$. Всегда имеет место следующее разложение:

$$1 = e^0(t) + e'(t), \text{ где } e^0(t) \in L_2^0[a, b] \quad \text{и} \quad e'(t) \in L_2^1[a, b].$$

Если $e^0(t) \equiv 0$, то интегральное уравнение

$$B(f) = \int_a^b R(s, t)\, f(t)\, dt = 1$$

имеет единственное решение $f(t)$, и в этом случае среди всех линейных несмещенных оценок оценка

$$m^* = \frac{1}{D} \int_a^b f(t)\, x(t)\, dt, \tag{6}$$

где $D = \int_a^b f^2(t)\, dt$ имеет наименьшую дисперсию.

В формуле (3), положив $a(t) \equiv 1$, получим

$$m_n^* = \frac{1}{D}\int_a^b f_n(t)\,x(t)\,dt. \qquad (7)$$

Тогда последовательность оценок (7) сходится в среднеквадратическом к оценке m^*, и скорость сходимости не хуже, чем скорость сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $\dfrac{1}{\left|T_k\left(-\dfrac{M+m}{M-m}\right)\right|^2}$.

Последовательность оценок, построенная в [2], является частным случаем последовательности оценок (7), когда $k = 1$.

Пользуясь случаем, выражаем благодарность Л. Шагдару и Д. Шагдару за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шагдар Д. Заметка об одном приближенном критерии для проверки гипотез о среднем значении гауссовского процесса.— Кибернетика, № 5, 1970.

2. Шагдар Д. Замечание к одной несмещенной оценке с минимальной дисперсией из класса линейных оценок.— Теория вероятностей и ее применения, 15, № 1, 1970.

3. Гихман И. И. и Скороход А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональном пространстве.— УМН, 21, вып. 6, 1966.

4. Красносельский М. А. и др. Приближенные решения операторных уравнений. М., «Наука», 1969.

P. Begzjav, D. Byambjav, A. Dorjigotov

ON THE SOME APPROXIMATE METHODS OF THE GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES STATISTICS

Summary

Let $X(t)$ — is Gaussian process with known correlation function $R(s, t)$ and bounded variance. In this paper the test of hypothesis $H_0 : \{m(t) = 0\}$ with respect to alternative hypothesis $H_1 : \{m(t) = a(t) = a(t) \in L^2[a, b]\}$ is studied. It is proved, that sequaence of the tests (3) converge almost surely to the most powerful test.

Поступила в редколлегию 16.VIII 1971.