В. В. БУЛДЫГИН, асп.
Киевский университет

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ РЯДОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, X^* — пространство, сопряженное к X, $\{\Omega, F\ P\}$ — основное вероятностное пространство. Под X-значной случайной величиной ξ понимаем измеримое отображение ξ: $\{\Omega, F\} \to \{X, \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, порожденная открытыми множествами пространства X. Случайная величина ξ индуцирует на X вероятностную меру μ_ξ

$$\mu_\xi(A) = P\{\xi \in A\}, \tag{1}$$

где $A \in \mathfrak{A}$.

Случайные величины ξ и η называются равнораспределенными, если совпадают меры μ_ξ и μ_η. Случайная величина ξ называется симметричной, если ξ и $-\xi$ равнораспределены. Будем говорить, что $\xi \in L^p(\Omega, X)$, если $M\|\xi\|^p < \infty$. Положим, $L^\infty = \bigcap\limits_{p \geqslant 1} L^p(\Omega, X)$. Пусть ξ_k, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых X-значных случайных величин, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Утверждение А. Если S_n сильно (т. е. в смысле нормы пространства X) сходится с вероятностью единица к X-значной случайной величине S, то $S \in L^\infty$.

Кахан [1] доказал утверждение A для последовательности ξ_k вида $\xi_k = \varepsilon_k u_k$, где $u_k \in X$, а ε_k принимает значение ± 1 с равной вероятностью. В [2] показано, что утверждение A имеет место, если $\|\xi_k\| \leqslant C$, $k \geqslant 1$ с вероятностью единица. Будем говорить, что ξ удовлетворяет условию $\Delta(l, \alpha, L, R)$, где $l > 1$, $\alpha > 1$, $L > 0$, $R > 0$, если при $r > R$

$$P\{\|\xi\| > lr\} \leqslant LP^\alpha\{\|\xi\| > r\}. \tag{2}$$

В настоящей работе утверждение A доказывается при предположении, что ξ_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию $\Delta(l, \alpha, L, R)$. Кроме того, рассматриваются вопросы, связанные с сильной п. н. (почти наверное) и слабой п. н. сходимостью случайных рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$.

2. Пусть η_k, $k \geqslant 1$ последовательность симметричных независимых X-значных величин, $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$.

Лемма 1. Если E — $\mathfrak{A}$ измеримое выпуклое множество в X, то

$$\sup_{m \leqslant n} P\{\tilde{S}_m \bar{\in} E\} \leqslant 2P\{\tilde{S}_n \in E\}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{S}_n' = \tilde{S}_m - (\tilde{S}_n - \tilde{S}_m)$, так как $\tilde{S}_n = \tilde{S}_m + (\tilde{S}_n - \tilde{S}_m)$, то

$$\{\tilde{S}_m \bar{\in} E\} \subseteq \{\tilde{S}_n \bar{\in} E\} \cup \{\tilde{S}_n' \bar{\in} E\}.$$

Отсюда в силу равнораспределенности $\tilde{S}_n$ и $\tilde{S}_n'$ следует (3). Лемма 1 доказана.

Множество $T \subset X^*$ называется тотальным на X, если из того, что $\langle x^*, x\rangle = 0$ при всех $x^* \in T$, следует, что $x = 0$. Для $T \subset X^*$ будем говорить, что последовательность S_n T-слабо сходится с вероятностью единица, если для всех $x^* \in T$ $\langle x^*, S_n\rangle$ сходится к $\langle x^*, S\rangle$ с вероятностью единица. В дальнейшем, если не оговорено противное, T будет обозначать некоторое тотальное на X множество.

Теорема 1. $\tilde{S}_n$ сильно сходится с вероятностью единица к некоторой X значной случайной величине $\tilde{S}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{S}_n T$-слабо сходится к $\tilde{S}$ с вероятностью единица.

Доказательство. Пусть C_T обозначает алгебру цилиндрических множеств вида

$$C_{x_1^* \dots x_n^*}(B^{(n)}) = \{x : \langle x_1^*, x\rangle \ \dots \ \langle x_n^*, x\rangle \in B^{(n)}\},$$

где $x_1^*, \dots, x_n^* \in T$, $n \geqslant 1$, $B^{(n)}$ — борелевское множество в R^n.

Как показали Ю. И. Петунин и И. Я. Шнейберг,

$$\sigma(C_T) = \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Отсюда методом, предложенным Ито К. и Нишио М. (см. [3], теорему 4.1) нетрудно показать, что $\tilde{S}_n$ и $\tilde{S} - \tilde{S}_n$ независимы. Повторяя слово в слово доказательство леммы 1, получаем

$$\sup_{n \geqslant 1} P\{\tilde{S}_n \bar{\in} E\} \leqslant 2P\{\tilde{S} \bar{\in} E\}, \tag{5}$$

где E — $\mathfrak{A}$ измеримое выпуклое множество в X.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется компакт K_ε такой, что

$$P\{\tilde{S} \bar{\in} K\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда в силу (5) если K' — выпуклая оболочка K,

$$\sup_{n \geqslant 1} P\{\tilde{S}_n \bar{\in} K'\} < \varepsilon,$$

т. е. меры, порожденные $\tilde{S}_n$, $n \geqslant 1$, компактны. Следовательно (см. [3, 4]), $\tilde{S}_n$ сильно сходится к $\tilde{S}$ с вероятностью единица. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В работе [3] теорема 1 доказана при $T = X^*$. Однако часто проверка сходимости $\langle x^*, \tilde{S}_n\rangle$ к $\langle x^*, \tilde{S}\rangle$ для x^*, принадлежащих некоторому тотальному на X множеству, проводится легче для всех $x^* \in X^*$. Примером могут служить теоремы, приведенные в п. 4 (см. ниже).

Лемма 2. Для $r > 0$ имеет место неравенство

$$P\{\sup_{k\leqslant n}\|\tilde{S}_k\| > r\} \leqslant 2P\{\|\tilde{S}_n\| > r\}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $r > 0$, $\theta > 1$, положим $\chi_k = 1$, если $\|\tilde{S}_k\| > \theta r$, а $\|\tilde{S}_i\| \leqslant \theta r$ при $i < k$, $\chi_k = 0$ в остальных случаях. В [4] показано, что $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i(\gamma)$, где $A_i(\gamma)$, такие, что $A_i(\gamma) \cap A_j(\gamma) = \varnothing$ при $i \neq j$, $\gamma < 1$ и $A_i(\gamma) \subset \{x: \langle x_i^*, x\rangle \geqslant \gamma\|x\|\}$, $x_i^* \in X^*$. Положим $\chi_{ki} = 1$, если $\tilde{S}_k \in A_i\left(\frac{1}{\theta}\right)$, и $\chi_{ki} = 0$ в противном случае. Тогда

$$P\{\|\tilde{S}_n\| > r\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{\|\tilde{S}_n\| > r,\ \chi_k = 1\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} P\{\|\tilde{S}_n\| > r,\ \chi_k = 1,\ \chi_{ki} = 1\} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} P\{\langle x_i^*, \tilde{S}_n\rangle \rangle r,$$

$$\chi_k = 1,\ \chi_{ki} = 1\} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} P\{\langle x_i^*, \tilde{S}_n - \tilde{S}_k\rangle \geqslant 0,\ \chi_k = 1,\ \chi_{ki} = 1\}.$$

Так как $\tilde{S}_n - \tilde{S}_k$ и $\tilde{S}_k$ независимы и симметричны, то

$$P\{\|\tilde{S}_n\| > r\} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} P\{\chi_k = 1,\ \chi_{ki} = 1\} = \frac{1}{2}P\{\sup_{k\leqslant n}\|\tilde{S}_k\| > \theta r\}. \tag{7}$$

Переходя в неравенстве (7) к пределу при $\theta \downarrow 1$, получаем неравенство (6). Лемма 2 доказана.

Следствие 1. Если $\tilde{S}_n T$-слабо сходится к $\tilde{S}$ с вероятностью единица, то при $r > 0$

$$P\{\sup_{n\geqslant 1}\|\tilde{S}_n\| > r\} \leqslant 2P\{\|\tilde{S}\| > r\}. \tag{8}$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\tilde{S}_n$ сильно сходится к S с вероятностью единица, следовательно, $\|\tilde{S}_n\|$ сходится к $\|\tilde{S}\|$ с вероятностью единица. Переходя в неравенстве (6) к пределу по n в правой и левой частях, получаем искомое неравенство.

Лемма 3. При $r > 0$ справедливо неравенство

$$P\{\|\tilde{S}_n\| > 5r\} \leqslant 4P^2\{\|\tilde{S}_n\| > r\} + \sum_{k=1}^{n} P\{\|\eta_k\| > r\}. \quad (9)$$

Доказательство. Положим $\Omega_r^{(n)} = \{\omega: \sup\limits_{k \leqslant n} \|\eta_k\| \leqslant r\}$, тогда

$$P\{\|\tilde{S}_n\| > 5r\} \leqslant P\{\|\tilde{S}_n\| > 5r, \ \Omega_r^{(n)}\} + P\{\overline{\Omega}_r^{(n)}\}. \quad (10)$$

Следуя [2] (стр. 454), нетрудно показать, что

$$P\{\sup_{k \leqslant n} \|\tilde{S}_k\| > 5r, \ \Omega_r^{(n)}\} \leqslant P^2\{\sup_{k \leqslant n} \|\tilde{S}_k\| > r, \ \Omega_r^{(n)}\}.$$

Отсюда, учитывая (6), следует неравенство

$$P\{\|\tilde{S}_n\| > 5r, \ \Omega_r^{(n)}\} \leqslant 4P^2\{\|S_n\| > 5r\}. \quad (11)$$

Так как

$$P\{\overline{\Omega}_r^{(n)}\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} P\{\|\eta_k\| > r\}, \quad (12)$$

то после подстановки неравенств (11), (12) в неравенство (10) получаем искомое неравенство. Лемма 3 доказана.

Следствие 2. Если $\tilde{S}_n T$- слабо сходится к $\tilde{S}$ с вероятностью единица, то при $r > 0$

$$P\{\|\tilde{S}\| > 5r\} \leqslant 4P^2\{\|\tilde{S}\| > r\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{\|\eta_k\| > r\}. \quad (13)$$

Заметим, что, в силу теоремы I, при $r > 0$ $\Sigma P\{\|\eta_k\| > r\} < \infty$, следовательно, $\lim\limits_{r \to \infty} \Sigma P\{\|\eta_k\| > r\} = 0$.

Лемма 4. Пусть $f(r)$, $\varphi(r)$ функции, определенные на $(0, \infty)$ и принимающие значение в R^1, пусть также: 1) $\lim\limits_{r \to \infty} f(r) = 0$, 2) для достаточно больших r существуют числа $\beta > 1$, $\gamma > 1$, $M > 0$ такие, что

$$f(\gamma r) \leqslant M f^{\beta}(r) + \varphi(r), \quad (14)$$

$$\varphi(\gamma r) \leqslant M \varphi^{\beta}(r). \quad (15)$$

Тогда найдутся числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ такие, что для достаточно больших r и $m \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$f(\gamma^m r) \leqslant [C_1 f(r) + C_2 \varphi(r)]^{\beta^{m-1}}. \quad (16)$$

Доказательство. Фиксируем натуральное число m, индукцией по $n \leqslant m$ нетрудно показать, что для достаточно больших r имеет место неравенство

$$f(\gamma^m r) - \sum_{l=2}^{n} 2^{\frac{1-\beta^l}{1-\beta} - l} M^{\frac{1-\beta^{l-1}}{1-\beta}} \varphi^{\beta^{l-1}}(\gamma^{m-l} r) - \varphi(\gamma^{m-1} r) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta} - n} M^{\frac{1-\beta^n}{1-\beta}} f^{\beta^n}(\gamma^{m-n} r),$$

полагая $n = m$, получаем

$$f(\gamma^m r) \leqslant 2^{\frac{1-\beta^m}{1-\beta} - m} M^{\frac{1-\beta^m}{1-\beta}} f^{\beta^m}(r) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{m} 2^{\frac{1-\beta^l}{1-\beta} - l} M^{\frac{1-\beta^{l-1}}{1-\beta}} \varphi^{\beta^{l-1}}(\gamma^{m-l} r) + \varphi(\gamma^{m-1} r). \tag{17}$$

Кроме того, индукцией по m можно показать, что для достаточно больших r

$$\varphi(\gamma^m r) \leqslant M^{\frac{1-\beta^m}{1-\beta}} \varphi^{\beta^m}(r). \tag{18}$$

Обозначим слагаемые в правой части неравенства (17) соответственно I_1, I_2, I_3; положим $a = (28)^{\frac{1}{\beta-1}}$, $b = (2^\beta M)^{\frac{1}{\beta-1}}$, $c = M^{\frac{1}{\beta-1}}$, тогда

$$I_1 \leqslant [af(r)]^{\beta^m},$$

$$I_2 \leqslant \sum_{l=2}^{m} b^{\beta^{l-1}} \varphi^{\beta^{l-1}}(\gamma^{m-l} r),$$

$$I_3 \leqslant [c\varphi(r)]^{\beta^{m-1}}.$$

После подстановки (18) в оценку для I_2 получим

$$I_2 \leqslant \sum_{l=2}^{m} b^{\beta^{l-1}} [c\varphi(r)]^{\beta^{m-1}} \leqslant m[cb\varphi(r)]^{\beta^{m-1}} \leqslant [bcd\varphi(r)]^{\beta^{m-1}},$$

где число d удовлетворяет условию $d^{\beta^{m-1}} \geqslant m$ при $m \geqslant 1$.

Учитывая вышесказанное, легко видеть, что

$$f(\gamma^m r) \leqslant [af(r)]^{\beta^m} + [bcd\varphi(r)]^{\beta^{m-1}} + [c\varphi(r)]^{\beta^{m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant [C_1 f(r)]^{\beta^m} + [C_2\varphi(r)]^{\beta^{m-1}},$$

где $C_1 = a$, $C_2 = c(bd + 1)$.

Из условия леммы 1 следует, что существует число $R > 0$ такое, что при $r > R$ $C_1 f(r) < 1$. Отсюда для достаточно больших r справедливо неравенство

$$f(\gamma^m r) \leqslant [C_1 f(r) + C_2\varphi(r)]^{\beta^{m-1}}.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 2. Пусть η_k, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых симметричных X значных величин, $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, пусть также η_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию $\Delta(l, \alpha, L, R)$. Если $\tilde{S}_n T$-слабо сходится к $\tilde{S}$, то существуют числа $\varepsilon > 0$, $q > 0$ такие, что

$$Me^{\varepsilon \|\tilde{S}\|^q} < \infty. \tag{19}$$

Доказательство. Запишем неравенство (13) в виде

$$f(5r) < 4f^2(r) + \varphi(r),$$

где $f(r) = P\{\|\tilde{S}\| > r\}$, а $\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\|\eta_k\| > r\}$.

Из условия теоремы следует, что при $r > R$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\|\eta_k\| > lr\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} LP^{\alpha}\{\|\eta_k\| > r\} \leqslant L\left(\sum_{k=1}^{\infty} P\{\|\eta_k\| > r\}\right)^{\alpha},$$

т. е.

$$\varphi(lr) \leqslant L\varphi^{\alpha}(r).$$

Положим $\gamma = \max(5, e)$, $\beta = \min(2, \alpha)$, $M = \max(4, L)$. Используя лемму 4, получаем, что для достаточно больших r справедливо неравенство (16).

Выбираем R_1 так, чтобы при $r > R_1$

$$C_1 f(r) + C_2\varphi(r) < e^{-1},$$

следовательно, при $r > \max(R, R_1)$ $f(\gamma^m r) < e^{-\beta^{m-1}}$.

Отсюда вытекает, что при $\gamma^q < \beta$ и $\varepsilon < (\gamma^2 r)^{-q}$

$$Me^{\varepsilon\|\tilde{S}\|^q} \leqslant \sum_m e^{\varepsilon(\gamma^{m+2}r)^q} e^{-\beta^m} < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что, заменяя неравенство (13) на неравенство (9) и повторяя слово в слово доказательство теоремы 2, получим следующее утверждение: если выполнены условия теоремы 2, то существуют числа $\varepsilon > 0$, $q > 0$, $C > 0$ такие, что

$$\sup_{n\geqslant 1} Me^{\varepsilon\|\tilde{S}_n\|^q} < C. \qquad (20)$$

Теорема 3. Пусть $\tilde{S}_n$ T-слабо сходится к $\tilde{S}$ с вероятностью единица и пусть существуют числа $\varepsilon > 0$, $q > 0$ такие, что $Me^{\varepsilon\|\tilde{S}\|^q} < \infty$, тогда найдутся числа $\varepsilon' > 0$, $q' > 0$, $C > 0$ такие, что для всех $n \geqslant 1$

$$Me^{\varepsilon'\|\tilde{S}_n\|^{q'}} < C. \qquad (21)$$

Доказательство. В силу неравенства (8) и того, что при $r > 0$

$$P\{\|\tilde{S}\| > r\} \leqslant \frac{Me^{\varepsilon\|\tilde{S}\|^q}}{e^{\varepsilon r^q}},$$

получаем

$$Me^{\varepsilon'\|\tilde{S}_n\|^{q'}} \leqslant 2Me^{\varepsilon\|\tilde{S}\|^q} \sum_m e^{\varepsilon'(m+1)^{q'}} e^{-\varepsilon m^q}.$$

Отсюда при $q' < q$ и $\varepsilon' < \varepsilon$

$$Me^{\varepsilon' \|\tilde{S}_n\|^{q'}} \leqslant 2Me^{\varepsilon \|\tilde{S}\|^q} \sum_m e^{\varepsilon m^q \left[\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(\frac{m+1}{m}\right)^q - 1\right]} < \infty.$$

Теорема 3 доказана.

3. В этом пункте будут рассмотрены вопросы, аналогичные вопросам п. 2, для последовательности независимых (не обязательно симметричных) X значных случайных величин. Пусть $\xi_k k \geqslant 1$ последовательность независимых X значных случайных величин, и пусть последовательность ξ_k', $k \geqslant 1$ такая, что ξ_k и ξ_k' независимы и равнораспределены, пусть также $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ и $S_n' = \sum_{k=1}^{n} \xi_k'$. Положим $\eta_k = \frac{\xi_k - \xi_k'}{2}$, $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, нетрудно видеть, что η_k, $k \geqslant 1$ последовательность независимых симметричных X-значных величин.

Лемма 5. Если ξ_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию $\Delta(e, \alpha, L, R)$ и существует положительное число R_1 такое, что при $r > R_1$ $\sup\limits_k P\{\|\xi_k\| > r\} < 1$, то существуют числа $e' > 1, \alpha' > 1$, $L' > 0$, $R' > 0$ такие, что η_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию $\Delta(e', \alpha', L', R')$.

Доказательство. Нетрудно показать, что при $r > 0$ справедливы неравенства

$$P\{\|\eta_k\| > r\} \leqslant 2P\{\|\xi_k\| > r\}, \tag{22}$$

$$P\{\|\xi_k\| > 4r\} \leqslant \frac{P\{\|\eta_k\| > r\}}{P\{\|\xi_k\| \leqslant 2r\}}. \tag{23}$$

Отсюда вытекает, что при $r > R$

$$P\{\|\eta_k\| > 4lr\} \leqslant 2P\{\|\xi_k\| > 4lr\} \leqslant 2LP^{\alpha}\{\|\xi_k\| > 4r\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2L}{P^{\alpha}\{\|\xi_k\| \leqslant 2r\}} P^{\alpha}\{\|\eta_k\| > r\},$$

т. е.

$$P\{\|\eta_k\| > 4lr\} \leqslant \frac{2L}{\inf\limits_k P^{\alpha}\{\|\xi_k\| \leqslant r\}} P^{\alpha}\{\|\eta_k\| > r\}. \tag{24}$$

Положим $\alpha' = \alpha$, $l' = 4l$, $R' = \max(R, R_1)$, $L' = \frac{2L}{\inf\limits_k P^{\alpha}\{\|\xi_k\| \leqslant R'\}}$.

Так как по условию при $r > R_1$ $\sup\limits_k P\{\|\xi_k\| > r\} < 1$, то $L' < \infty$, кроме того, $\alpha' > 1$, $e' > 1$, $R' > 0$, следовательно, из неравенства (24) вытекает, что η_k $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию $\Delta(e', \alpha', L', R')$. Лемма 5 доказана.

Теорема 4. Пусть ξ_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяет условию $\Delta(e', \alpha', L', R')$ и пусть для достаточно больших r $\sup\limits_k P\{\|\xi_k\| > r\} < 1$. Если

S_n T-слабо сходится к S с вероятностью единица, то существуют чи-
ла $\varepsilon > 0$, $1 > q > 0$ такие, что

$$Me^{\varepsilon \| S \|^q} < \infty. \qquad (2$$

Доказательство. Легко видеть, что из T-слабой сх-
димости с вероятностью единица S_n к S следует, что $\widetilde{S}_n = S_n -$
T-слабо с вероятностью единица сходится к $\widetilde{S} = S - S'$, причем
и S' равнораспределены и независимы. Так как из леммы 5 вытекае
что η_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию Δ (e', α', L', R'), то, примен
теорему 2, получаем, что $Me^{\varepsilon' \| \widetilde{S} \|^{q'}} < \infty$, где $\varepsilon' > 0$, $1 > q' >$
Используя неравенство

$$\| \widetilde{S} \| \geqslant 2^{-q'} \| S \|^{q'} - 2^{-q'} \| S' \|^{q'},$$

получаем

$$Me^{\varepsilon' \| \widetilde{S} \|^{q'}} \geqslant Me^{\varepsilon' 2^{-q'} \| S \|^{q'}} \, Me^{-\varepsilon' 2^{-q'} \| S' \|^{q'}}.$$

Отсюда при $\varepsilon = \varepsilon' 2^{-q'}$ и $q = q'$ вытекает искомое утверждени
Теорема 4 доказана.

Замечание 3. Нетрудно видеть, что, если для некоторого $R >$
$\Sigma P \{\| \xi_k \| > R\} < \infty$, то для достаточно больших r $\sup\limits_k P \{\| \xi_k \| >$
$> r\} < 1$. Следовательно, если S_n сильно сходится к S с верояг
ностью единица и ξ_k, $k \geqslant 1$ удовлетворяют условию Δ $(e, \alpha, L, R$
то существуют числа $\varepsilon > 0$, $1 > q > 0$ такие, что

$$Me^{\varepsilon \| S \|^q} < \infty.$$

Замечание 4. Подобно замечанию 2 имеет место следующее утвер-
дение: если выполнены условия теоремы 4, то существуют числа $\varepsilon >$
> 0, $1 > q > 0$, $C > 0$ такие, что

$$\sup_{n \geqslant 1} Me^{\varepsilon \| S_n \|^q} < C. \qquad (2$$

Теорема 5. Пусть S_n сильно сходится к S с вероятностью едини-
ца и существуют числа $\varepsilon > 0$, $0 < q < 1$, такие, что $Me^{\varepsilon \| S \|^q} < \infty$
тогда найдутся числа $\varepsilon' > 0$, $1 > q' > 0$, $C > 0$ такие, что

$$\sup_{n \geqslant 1} Me^{\varepsilon' \| S_n \|^{q'}} < C.$$

Доказательство. Так как $\widetilde{S}_n$ сильно сходится к $\widetilde{S}$ с ве-
роятностью единица и

$$Me^{\varepsilon \| \widetilde{S} \|^q} \leqslant (Me^{\varepsilon \| S \|^q})^2 < \infty,$$

то из теоремы 3 следует, что найдутся числа $\varepsilon'' > 0$, $1 > q^n >$
при которых

$$\sup_{n \in 1} Me^{\varepsilon'' \| \widetilde{S}_n \|^{q''}} < \infty.$$

Используя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 4, получаем искомое неравенство. Теорема 5 доказана.

Пусть T сепарабельное компактное пространство со второй аксиомой отделимости, (T, Σ, μ) пространство с конечной регулярной мерой, $C(T)$ пространство всех непрерывных отображений T в R^1. Известно (см. [5], стр. 283), что $C(T)$ является банаховым пространством с нормой $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$. Пусть ξ_t при $t \in T$ сепарабельное нормальное поле, корреляционная функция которого $R(t, s)$ непрерывна. Обозначим через λ_k и $\varphi_k(t)$ собственные числа и собственные функции оператора, соответствующего корреляционной функции

$$(Rf)(t) = \int_T f(s) R(t, s) d\mu(s).$$

По теоремам Мерсера и Гильберта — Шмидта ([5], стр. 250)

$$R(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t) \varphi_k(s), \tag{27}$$

где ряд в (27) сходится равномерно.

Положим

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_T \xi_t \varphi_k(t) d\mu(t), \tag{28}$$

ξ_k — независимые нормально распределенные, с параметрами (0, 1) случайные величины. Обозначим

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k(t).$$

Теорема 6. Если ξ_t непрерывно с вероятностью единица, то $S_n(t)$ равномерно сходится к ξ_t с вероятностью единица.

Доказательство. Обозначим через δ_t, $t \in T$ линейный непрерывный функционал на $C(T)$, задаваемый формулой

$$\delta_t(f) = f(t).$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{T} = \bigcup_{t \in T} \delta_t$ тотальное на $C(T)$ множество линейных непрерывных функционалов. Известно ([2], стр. 277), что для каждого $t \in T$ $S_n(t) \to \xi_t$ с вероятностью единица, т. е. $S_n(t)$ $\tilde{T}$-слабо с вероятностью единица сходится к ξ_t, откуда, в силу теоремы 1, следует равномерная сходимость $S_n(t)$ к ξ_t с вероятностью единица. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Для всех $p \geqslant 1$ $M\{\sup_{t \in T} |\xi_t|\}^p < \infty$.

Доказательство. Обозначим $\xi_k(t) = \sqrt{\lambda_k} \xi_k \varphi_k(t)$, где ξ_k определены в (28), $\|\xi_k(t)\| = \sqrt{\lambda_k} |\xi_k| \|\varphi_k\|$, из равномерной сходимости ряда в (27) следует что $\sqrt{\lambda} \|\varphi_k\|$ равномерно ограничены.

Воспользовавшись хорошо известной формулой

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) < P\{|\xi_k|>x\} < \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} e^{-x^2/2}\frac{1}{x},$$

нетрудно показать, что существуют $e>1$, $\alpha>1$, $L>0$, $R>0$ такие, что при $r>R$

$$P\{\|\xi_k(t)\|>lr\} \leqslant LP^{\alpha}\{\|\xi_k(t)\|>r\}.$$

Отсюда применением теоремы 2 получаем доказательство. Теорема доказана.

Теорема 8. Если $T=[a,\ b]$ и ξ_t — сепарабельный нормальный стационарный процесс с непрерывной корреляционной функцией, то для того, чтобы ξ_t был непрерывным с вероятностью единица, необходимо и достаточно, чтобы $M\{\sup\limits_{t\in[a,b]}|\xi_t|\}<\infty$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 7, а достаточность показана в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kahane J. Some random series of functions. Lexington, 1968.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1971.
3. Ito K., Nisio M. On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables.— Osaka journ., of math., 5, No 1, june, 1968.
4. Булдыгин В. В. О сходимости рядов независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве.— Теория вероятностей и математическая статистика, 1972, вып. 6.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, т. 2. М., ИЛ, 1962.
6. Скороход А. В. Замечание о гауссовских мерах в банаховом пространстве.— Теория вероят. и ее применение, 1970, вып. 3.
7. Nisio M. On the continuity of stationary Gaussian processes.— Nagoya Math. Journ., 32, 2, 1969.

V. V. Buldigin

ON SOME PROPERTIES OF SUMS OF INDEPENDENT BANACH SPACE VALUED RANDOM VARIABLES

Summary

Let $\xi_k, k\geqslant 1$ is a sequence of independent Banach space valued random variables. Some conditions for $M\left\{\exp\alpha\,\|\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\|^{q}\right\}<\infty$ where $\alpha>0$, $q>0$ are given.

Поступила в редколлегию 15.I 1972.