И. З. ГАБРОВСКИ, асп., И. И. ЕЖОВ, проф.
Киевский университет
А. М. ЗАХАРИН, асп.
Киевский институт инженеров гражданской авиации

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Основная модель

Настоящая работа посвящена изучению непрерывного справа однородного строго марковского процесса $X(t) = (\xi(t), \eta(t))$ $(t \geqslant 0)$ в фазовом пространстве $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\} \times [0, \infty]$, переходные вероятности которого

$$p_{E_iE_j}(x, A, t) = \mathrm{P}\{\xi(y+t) = E_j, \quad \eta(y+t) \in A / X(y) = (E_i, x)\}$$

(здесь $i, j \geqslant 0$; $x, y, t \in [0, \infty)$; $A \subset [0, \infty)$ — произвольное борелевское множество) при $\Delta \downarrow 0$ задаются соотношениями

$$\begin{gathered}p_{E_iE_i}(x, \{x+\Delta\}, \Delta) = 1 - [\mu_i(x) + \nu_i(x)]\Delta + o(\Delta),\\ p_{E_iE_j}(x, \{x+\Delta\}, \Delta) = \mu_{ij}(x)\Delta + o(\Delta) \qquad (j \neq i),\\ p_{E_iE_j}(x, \{O(\Delta)\}, \Delta) = \nu_{ij}(x)\Delta + o(\Delta),\end{gathered} \tag{1}$$

где $\mu_{ij}(x)$, $\nu_{ij}(x)$ — неотрицательные измеримые функции,

$$\mu_i(x) = \sum_{\substack{j \geqslant 0\\ j \neq i}} \mu_{ij}(x), \qquad \nu_i(x) = \sum_{j \geqslant 0} \nu_{ij}(x),$$

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} O(\Delta) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Анализ (1) показывает, что $X(t)$ относится к классу однородных марковских процессов с дискретной компонентой (см., например, [1]) и является обобщением ряда известных моделей, в частности: если $\nu_{ij}(x) \equiv 0$, то $\xi(t)$ — неоднородная цепь Маркова в фазовом пространстве $\{E_0, E_1, E_2, \ldots\}$; в случае, когда $\mu_{ij}(x) \equiv 0$, $\xi(t)$ есть полумарковский процесс; если же $\mu_{ij}(x)$ не зависит от x,

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) \in \{0, 1, 2, \ldots\} \times \{0, 1, 2, \ldots\},$$

$$p_{(i,n)(j,m)}(x, x+\Delta, \Delta) = [\mu_{ij}\Delta + o(\Delta)]\delta_{nm}$$

$$\left(\delta_{ij} = \begin{cases}1, & i = j,\\ 0, & i \neq j\end{cases}\right)$$

для всех $i \neq j$; $i, j \geqslant 0$, то $X(t)$ является цепью Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс, исследованию которой посвящена работа [2]. Нетрудно убедиться, что модель, рассмотренная в статье [3], тоже является частн[ым] случаем приведенной выше схемы.

В данной работе найдены некоторые характеристики проце[сса] $X(t)$ и рассмотрены следующие вопросы: эргодическая теоре[ма], распределения времен пребывания дискретной и линейной ком[по]нентами в заданных областях, распределение максимума дискр[ет]ной компоненты.

Условимся для простоты всюду в дальнейшем писать i вмес[то] E_i $(i \geqslant 0)$, а процесс $X(t)$ называть основным.

Кроме того, для последующего удобно ввести такие матриц[ы]

$$p(x, A, t) = \| p_{ij}(x, A, t); \quad i, j \geqslant 0 \|,$$

$$\mu^{\text{I}}(x) = \| \delta_{ij} \mu_i(x); \quad i, j \geqslant 0 \|,$$

$$\nu^{\text{I}}(x) = \| \delta_{ij} \nu_i(x); \quad i, j \geqslant 0 \|,$$

$$\nu(x) = \| \nu_{ij}(x); \quad i, j \geqslant 0 \|,$$

$$\mu(x) = \| \mu_{ij}(x); \quad i, j \geqslant 0 \|,$$

где $\mu_{ii}(x) \equiv 0$ $(i \geqslant 0)$.

§ 2. Некоторые характеристики основного процесса

1. Для условной функции распределения времени до перво[го] скачка процесса $X(t)$

$$1 - F_i(x, x+u) = \mathbf{P}\{\inf\{t : t \geqslant 0, \quad X(t) \neq X(t-)\} \leqslant u / X(0) = = (i, x)\} \ (x, u \geqslant 0),$$

используя соотношение (1), свойство строгой марковости основно[го] процесса и формулу полной вероятности, получаем интегральн[ое] уравнение

$$F_i(x, y) = 1 - \int_x^y F_i(x, v)[\mu_i(v) + \nu_i(v)]\, dv \quad (y \geqslant x \geqslant 0).$$

Правая часть этого равенства непрерывна по y, так что этим сво[й]ством обладает и его левая часть, т. е. функция $F_i(x, y)$. Из это[го] факта и соотношений

$$F_i(x, y) = F_i(x, y - \Delta)\{1 - [\mu_i(y - \Delta) + \nu_i(y - \Delta]\, \Delta\} + o(\Delta),$$

$$F_i(x, y + \Delta) = F_i(x, y)\{1 - [\mu_i(y) + \nu_i(y)]\, \Delta\} + o(\Delta)$$

следует дифференцируемость функции $F_i(x, y)$ по y. Причем $F_i(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y} F_i(x, y) = -F_i(x, y)[\mu_i(y) + \nu_i(y)]$$

и, следовательно, определяется формулой

$$F_i(x, y) = \exp\left\{-\int_x^y [\mu_i(v) + \nu_i(v)]\, dv\right\} \quad (y \geqslant x \geqslant 0). \qquad (2)$$

Из формулы (2) очевидно, что $1 - F_i(x, x+u)$ — собственная функция распределения (т. е. $F_i(x, \infty) \equiv 0$) тогда и только тогда, когда

$$\int_x^\infty [\mu_i(v) + \nu_i(v)]\, dv = \infty.$$

2. Введем функции

$$\psi_{ij}(x, y) = \mathbf{P}\{X(y) = (j, y)/X(x) = (i, x)\},$$

$$\psi(x, y) = \| \psi_{ij}(x, y); \quad i, j \geqslant 0 \| \qquad (y \geqslant x \geqslant 0),$$

$$F(x, y) = \| \delta_{ij} F_i(x, y); \quad i, j \geqslant 0 \| \qquad (y \geqslant x \geqslant 0).$$

Используя свойство строгой марковости основного процесса, соотношения (1), (2) и формулу полной вероятности, нетрудно получить интегральное матричное уравнение Вольтерра второго рода

$$\psi(x, y) = F(x, y) + \int_x^y F(x, u)\, \mu(u)\, \psi(u, y)\, du \qquad (y \geqslant x \geqslant 0).$$

Из этого соотношения следует непрерывность функции $\psi(x, y)$ по x. Используя это свойство функции $\psi(x, y)$, соотношения (1) и формулу полной вероятности, выводим эквивалентную полученному интегральному уравнению задачу Коши для аналога обратного матричного уравнения Колмогорова

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y) = a(x)\, \psi(x, y), \\ \psi(y, y) \equiv I = \| \delta_{ij};\ i, j \geqslant 0 \|, \end{gathered} \tag{3а}$$

где

$$a(x) = \| a_{ij}(x);\ i, j \geqslant 0 \| = \nu^{I}(x) + \mu^{I}(x) - \mu(x).$$

Задача Коши для аналога прямого уравнения Колмогорова и соответствующее интегральное уравнение Вольтерра имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y) = -\psi(x, y)\, a(y), \\ \psi(x, x) \equiv I, \end{gathered} \tag{3б}$$

$$\psi(x, y) = F(x, y) + \int_x^y \psi(x, u)\, \mu(u)\, F(u, y)\, du \quad (y \geqslant x \geqslant 0).$$

Системы уравнений такого типа исследовались, например, в монографии [4] (при изучении скачкообразных марковских процессов), а в случае конечного фазового пространства дискретной компоненты в монографии [5].

В нашем случае можно показать, что для существования единственного решения задач Коши (3а), (3б) на некотором конечном промежутке достаточно равномерной (по i) ограниченности на этом промежутке функций $\mu_i(x)$, $\nu_i(x)$.

В случае, когда число состояний $\xi(t)$ конечно, решением эт[...] систем при условии непрерывности $\mu_{ij}(x)$ и $\nu_{ij}(x)$ является мат[...] цант

$$\psi(x, y) = \Omega_y^x(a) = I - \int_x^y a(t)\,dt + \int_x^y a(t)\,dt \int_t^y a(u)\,du - \cdots,$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно в л[...] бом замкнутом интервале, в котором функция $a(t)$ непреры[...] (см. [5]).

Совершенно идентичное рассуждение можно провести отно[...] тельно функций

$$\psi_{ij}^D(x, y) = \mathbf{P}\{X(y) = (j, y), \quad \xi(t) \notin D, \ t \in (x, y)/X(x) = (i, x)\},$$

$$\psi^D(x, y) = \|\psi_{ij}^D(x, y); \quad i, j \notin D\| \quad (0 \leqslant x \leqslant y),$$

где $x, y \geqslant 0$; $i, j \notin D$; D — некоторое фиксированное множес[...] целых неотрицательных чисел.

В частности, аналогом систем (3) являются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi^D(x, y) = -\psi^D(x, y)\,a^D(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi^D(x, y) = a^D(x)\,\psi^D(x, y), \qquad (3[...]$$

$$\psi^D(x, x) = I^D = \|\delta_{ij}; \ i, j \notin D\|,$$

где

$$a^D(x) = \|a_{ij}(x), \ i, j \notin D\|.$$

3. В дальнейшем будут использоваться следующие функци[...]

$$\rho_{ij}(x, y) = \mathbf{P}\{\xi(\theta) = j, \quad \theta \leqslant y - x/X(0) = (i, x)\},$$

$$\rho(x, y) = \|\rho_{ij}(x, y); \quad i, j \geqslant 0\| \qquad (0 \leqslant x \leqslant y),$$

$$\rho_{ij}^D(x, y) = \mathbf{P}\{\xi(\theta) = j, \quad \xi(t) \notin D, \ t \in (0, \theta), \ \theta \leqslant y - x/X(0) = (i, x)\},$$

$$\rho^D(x, y) = \|\rho_{ij}^D(x, y); \quad i, j \notin D \qquad (0 \leqslant x \leqslant y),$$

где

$$\theta = \inf\{t : t > 0, \quad \eta(t) = 0\}.$$

Связь между ρ, ρ^D и ψ, ψ^D очевидна:

$$\rho(x, y) = \int_x^y \psi(x, u)\,\nu(u)\,du,$$

$$\rho^D(x, y) = \int_x^y \psi^D(x, u)\,\nu^D(u)\,du,$$

где

$$\nu^D(x) = \|\nu_{ij}(x); \quad i, j \notin D\|.$$

Отсюда, в частности, следует дифференцируемость функций $\rho(x, y)$ и $\rho^D(x, y)$ по обоим аргументам, причем

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x, y)=\int_x^y \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, u)\nu(u)\,du-\nu(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho^D(x, y)=\int_x^y \frac{\partial}{\partial x}\psi^D(x, u)\nu^D(u)\,du-\nu^D(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\rho(x, y)=\psi(x, y)\nu(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\rho^D(x, y)=\psi^D(x, y)\nu^D(y).$$

Отметим также, что, используя формулу полной вероятности, с учетом соотношений (1), (2) аналогично тому, как это было сделано в п. 2, можно получить системы уравнений

$$\rho_{ij}(x, y)=\int_x^y\left[\sum_{n\neq i}\mu_{in}(u)\rho_{nj}(u, y)+\nu_{ij}(u)\right]\exp\left\{-\int_x^u[\mu_i(t)+\right.$$
$$\left.+\nu_i(t)]\,dt\right\}du,$$

$$\rho_{ij}^D(x, y)=\int_x^y\left[\sum_{n\neq i, n\notin D}\mu_{in}(u)\rho_{nj}^D(u, y)+\nu_{ij}(u)\right]\exp\left\{\int_x^u[\mu_i(t)+\right.$$
$$\left.+\nu_i(t)]\,dt\right\}du;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x, y)=a(x)\rho(x, y)-\nu(x), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho^D(x, y)=a^D(x)\rho^D(x, y)-\nu^D(x) \tag{4'}$$

с граничными условиями

$$\rho_{ij}(y, y)\equiv 0,\quad \rho_{ij}^D(y, y)\equiv 0.$$

В случае конечного фазового пространства процесса $\xi(t)$ при условии непрерывности функций $\mu_{ij}(x)$, $\nu_{ij}(x)$ решения систем (4) выражаются через матрицант [5]

$$\rho(x, y)=\int_x^y\Omega_u^x(a)\nu(u)\,du,$$

$$\rho^D(x, y)=\int_x^y\Omega_u^x(a^D)\nu^D(u)\,du.$$

В общем случае можно показать, что равномерная (по i) ограниченность функций $\mu_i(x)$, $\nu_i(x)$ обеспечивают существование единственных решений систем (4), (4′) в любом конечном интервале (ср. с системами (3) и (3′)).

4. Используя формулу полной вероятности, нетрудно получить следующее интегральное уравнение относительно переходной матрицы $p(x, A, t)$:

$$p(x, A, t) = \psi(x, x+t)\,\chi_A(x+t) + \int_x^{x+t} \rho(x, dy)\,p(0, A, x+t-y), \tag{5}$$

где

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Вводя обозначения

$$A \setminus x = \{y : y = u - x,\ u \in A\},$$

$$\tilde{\psi}_A(x, s) = \int_{A \setminus x} e^{-st}\psi(x, x+t)\,dt,$$

$$\tilde{\rho}(x, s) = \int_x^{\infty} e^{s(x-t)}\rho(x, dt),$$

$$\tilde{p}(x, A, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p(x, A, t)\,dt \quad (\operatorname{Re} s \geqslant 0)$$

и переходя в полученном уравнении (5) к преобразованиям Лапласа, имеем

$$\tilde{p}(x, A, s) = \tilde{\psi}_A(x, s) + \tilde{\rho}(x, s)\,\tilde{p}(0, A, s). \tag{5′}$$

Полагая в матричном уравнении (5′) $x = 0$, получаем линейное алгебраическое уравнение относительно матрицы $\tilde{p}(0, A, s)$, из которого следует представление $\tilde{p}(s, 0, A)$ в виде ряда Неймана

$$\tilde{p}(0, A, s) = [I - \tilde{\rho}(0, s)]^{-1}\,\tilde{\psi}_A(0, s) = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\rho}(0, s)]^n \tilde{\psi}_A(0, s),$$

если только этот ряд сходится. (Отметим, что, согласно [6], этого достаточно для того, чтобы процесс последовательных приближений для уравнения

$$\tilde{p}(0, A, s) = \tilde{\psi}_A(0, s) + \tilde{\rho}(0, s)\,\tilde{p}(0, A, s), \tag{6}$$

сходился к его единственному решению).

Подставляя полученное для матрицы $\tilde{p}(0, A, s)$ выражение в формулу (5′), имеем

$$\tilde{p}(x, A, s) = \tilde{\psi}_A(x, s) + \tilde{\rho}(x, s) \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\rho}(0, s)]^n \tilde{\psi}_A(0, s). \tag{7}$$

Найдем теперь условие, обеспечивающее вполне регулярность (см. [7]) бесконечной системы (6) линейных уравнений (относительно элементов матрицы $\tilde{p}(0, A, s)$) при достаточно большой $\operatorname{Re} s$ и, следовательно, наличие у нее единственного аналитического решения во всей правой полуплоскости. Таким условием является равномерная по $x \geqslant 0$, $i \geqslant 0$ ограниченность функций $\nu_i(x)$, т. е. существование такого $K = \text{const}$, что

$$\nu_i(x) \leqslant K. \tag{8}$$

Действительно, в этом случае имеем

$$\sum_{j \geqslant 0} \tilde{\rho}_{ij}(0, s) = \int_0^\infty \sum_{n \geqslant 0} \psi_{in}(0, y) \sum_{j \geqslant 0} \nu_{nj}(y) e^{-sy} dy \leqslant K \int_0^\infty e^{-sy} dy = \frac{K}{s},$$

откуда очевидна вполне регулярность системы (6) для s с достаточно большой действительной частью. И поскольку функция $\tilde{p}(0, A, s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Re} s = 0$, то в силу свойства единственности аналитических функций [8] система (6) имеет во всей правой полуплоскости единственное аналитическое решение, которое может быть найдено методом редукции [7].

Наконец, заметим, что условие (8) является достаточным для сходимости матричного ряда (7) по норме, если в качестве нормы матрицы $\rho = \|\rho_{ij}\|$ взять $\sup\limits_i \sum\limits_j |\rho_{ij}|$ (здесь, как и выше, матрица ψ предполагается известной).

Аналогичное рассуждение может быть проведено относительно функций

$$p_{ij}^D(x, A, t) = \mathbf{P}\{\xi(t) = j,\ \ \xi(u) \notin D,\ \ u \in (0, t),\ \ \eta(t) \in A / X(0) = (i, x)\},$$
$$p^D(x, A, t) = \|p_{ij}^D(x, A, t);\quad i, j \notin D\|.$$

В частности, аналогами соотношений (6), (7), (8) являются такие соотношения:

$$\tilde{p}^D(0, A, s) = \tilde{\psi}_A^D(0, s) + \tilde{\rho}^D(0, s)\, \tilde{p}^D(0, A, s), \tag{6'}$$

$$\tilde{p}^D(x, A, s) = \tilde{\psi}_A^D(x, s) + \tilde{\rho}^D(x, s) \sum_{n=0}^\infty [\tilde{\rho}(0, s]^n \tilde{\psi}_A^D(0, s), \tag{7'}$$

$$\sum_{j \notin D} \nu_{ij}(x) \leqslant K = \text{const}\ (i \notin D), \tag{8'}$$

где

$$\tilde{\psi}_A^D(x, s) = \int_{A \setminus x} e^{-st} \psi^D(x, x + t)\, dt,$$

$$\tilde{\rho}^D(x, s) = \int_x^\infty e^{s(x-t)} \rho^D(x, dt),$$

$$\tilde{p}^D(x, A, s) = \int_0^\infty e^{-st} p^D(x, A, t)\, dt.$$

§ 3. Эргодическая теорема

Пусть θ_n — n-й по счету момент, для которого $\eta(\theta_n) = 0$; цепь Маркова*) $\xi(\theta_n)$ — эргодическая со стационарным распределением $\{\rho_i,\ i \geqslant 0\}$;

$$m_{ij} = \int_0^\infty t\rho_{ij}(0, dt), \quad m_i = \sum_{j\geqslant 0} m_{ij}.$$

Из результатов работы [9] с учетом введенных выше обозначений легко может быть получено следующее утверждение.

Теорема. Если $\sum_{i\geqslant 0} \rho_i m_i < \infty$, то процесс $X(t)$ эргодичен и

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(x, A, t) = p_j(A)$$

существует, не зависит от i, x и является (по A) абсолютно непрерывным распределением с плотностью

$$\sum_{i\geqslant 0} \rho_i \psi_{ij}(0, y) \left(\sum_{i\geqslant 0} \rho_i m_i\right)^{-1} \quad (j \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$$

§ 4. О распределении времени первого достижения фиксированного множества дискретной компонентой

Пусть $X(0) = (i, x)$, $x \geqslant 0$, $i \notin D$, D — некоторое фиксированное множество целых неотрицательных чисел. Обозначим через $\tau_i^D(x)$ тот первый после $t = 0$ момент времени, для которого $\xi(\tau_i^D(x)) \in D$, через $\varphi_i^D(x, y + x)$ соответствующую функцию распределения (по y), а через $\tilde{\varphi}_i^D(x, s)$ — соответствующее преобразование Лапласа, т. е.

$$\tau_i^D(x) = \inf\{t : t > 0, \quad \xi(t) \in D\},$$

$$\varphi_i^D(x, y) = \mathbf{P}\{\tau_i^D(x) \leqslant y - x\} \qquad (0 \leqslant x \leqslant y),$$

$$\tilde{\varphi}_i^D(x, s) = \mathbf{M}\exp\{-s\tau_i^D(x)\} = \int_x^\infty e^{s(x-y)} \varphi_i^D(x, dy)\,(\operatorname{Re} s \geqslant 0).$$

Этот параграф, в основном, посвящается решению задачи определения вектора-столбца

$$\tilde{\psi}^D(x, s) = (\tilde{\psi}_i^D(x, s), \quad i \notin D).$$

Используя соотношение (2) и формулу полной вероятности, получаем такие две эквивалентные системы:

$$\varphi_i^D(x, y) = \int_x^y \left\{ \sum_{j\notin D, j\neq i} \mu_{ij}(u)\varphi_j^D(u, y) + \sum_{j\notin D} \nu_{ij}(u)\varphi_j^D(0, y - u) + \right.$$

*) Причем $\rho(0, \infty)$, очевидно, является ее переходной матрицей.

$$+ \sum_{j\in D} [\mu_{ij}(u) = \nu_{ij}(u)]\Big\} \exp\left\{-\int_x^u [\mu_i(t) + \nu_i(t)]\,dt\right\} du,$$

$$\tilde{\varphi}_i^D(x, s) = \int_x^\infty e^{s(x-y)} \Big\{ \sum_{j\notin D, j\neq i} \mu_{ij}(y) \tilde{\psi}_j^D(y, s) + \sum_{j\notin D} \nu_{ij}(y) \tilde{\varphi}_j^D(0, s) +$$

$$+ \sum_{j\in D} [\mu_{ij}(y) + \nu_{ij}(y)] \exp\left\{-\int_x^y [\mu_i(u) + \nu_i(u)]\,du\right\} dy.$$

Отметим, что эти уравнения отличаются от «традиционных» интегральных уравнений наличием в их правых частях значений неизвестных функций при фиксированных аргументах (при $x = 0$). Но поскольку значение неизвестной функции в любой точке можно представить в виде интеграла Стилтьеса от нее с интегрирующей функцией распределения, имеющей единичный скачок в этой точке, то эти уравнения все же можно считать интегральными, что мы и будем делать, в дальнейшем не оговаривая особо.

Поскольку правые части последних равенств непрерывны по x и y, то этим свойством обладают и левые части (аналогичное рассуждение уже проводилось в п. 2 § 2). Используя этот факт и формулу полной вероятности, с учетом (1) получаем следующее соотношение, справедливое при $\Delta \downarrow 0$:

$$\tilde{\psi}_i^D(x, s) = (1 - s\Delta)\{[1 - (\mu_i(x) + \nu_i(x))\Delta]\, \tilde{\varphi}_i^D(x + \Delta, s) +$$

$$+ \Delta \sum_{j\neq i, j\notin D} \mu_{ij}(x) \tilde{\varphi}_j^D(x + \Delta, s) + \Delta \sum_{j\notin D} \nu_{ij} \tilde{\varphi}_j^D(O(\Delta), s) +$$

$$+ \Delta \sum_{j\in D} [\mu_{ij}(x) + \nu_{ij}(x)]\Big\} + o(\Delta),$$

где $0 \leqslant i \notin D$, $x \geqslant 0$.

Предельный переход в этом равенстве приводит к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}_i^D(x, s) = [s + \mu_i(x) + \nu_i(x)]\, \tilde{\varphi}_i^D(x, s) - \sum_{j\neq i, j\notin D} \mu_{ij}(x) \tilde{\varphi}_j^D(x, s) -$$

$$- \sum_{j\notin D} \nu_{ij}(x) \tilde{\varphi}_j^D(0, s) - \sum_{j\in D} [\mu_{ij}(x) + \nu_{ij}(x)]. \qquad (9)$$

Непосредственным следствием из соотношения (1) и формулы полной вероятности является следующее функциональное уравнение:

$$\tilde{\varphi}^D(x, s) = b^D(x, s) + \tilde{\rho}^D(x, s)\, \tilde{\varphi}^D(0, s), \qquad (10)$$

где

$$b_i^D(x, s) = \int_x^\infty \sum_{n\notin D} \psi_{in}^D(x, y) \sum_{j\in D} [\mu_{nj}(y) + \nu_{nj}(y)]\, e^{s(x-y)}\, dy,$$

$$\tilde{\rho}_{ij}^{D}(x, s) = \int_{x}^{\infty} e^{s(x-y)} \rho_{ij}^{D}(x, dy) = \int_{x}^{\infty} \sum_{n \notin D} \psi_{in}^{D}(x, y) \nu_{nj}(y) e^{s(x-y)} dy,$$

$$b^{D}(x, s) = (b_i^{D}(x, s); \quad i \notin D), \quad \tilde{\rho}^{D}(x, s) = \| \tilde{\rho}_{ij}(x, s); \quad i, j \notin D \|.$$

Рассуждение, аналогичное проведенному в п. 4 § 2, показывает, что если

$$\sum_{j \notin D} \nu_{ij}(x) \leqslant K = \text{const},$$

то система (10) имеет во всей правой полуплоскости единственное аналитическое решение, которое можно найти, используя метод редукции. Аналогом полученного в п. 4 § 2 представления матрицы $\tilde{p}(0, A, s)$ является вытекающая непосредственно из соотношения (10) формула

$$\tilde{\varphi}^{D}(0, s) = [1 - \tilde{\rho}^{D}(0, s)]^{-1} b^{D}(0, s) = \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{\rho}^{D}(0, s)]^{n} b^{D}(0, s).$$

Отметим, что если функция $\tilde{\varphi}^{D}(0, s)$ найдена, то в эквивалентном системе (9) векторном уравнении

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\varphi}^{D}(x, s) = f^{D}(x, s) \tilde{\varphi}^{D}(x, s) + g^{D}(x, s) \tag{11}$$

(здесь

$$f_{ij}^{D}(x, s) = \delta_{ij}[s + \mu_i(x) + \nu_i(x)] - \mu_{ij}(x),$$

$$g_i^{D}(x, s) = -\sum_{j \notin D} \nu_{ij}(x) \tilde{\varphi}_j^{D}(0, s) - \sum_{j \in D} [\mu_{ij}(x) + \nu_{ij}(x)],$$

$$f^{D}(x, s) = \| f_{ij}^{D}(x, s); \quad i, j \notin D \|, \quad g^{D}(x, s) = (g_i^{D}(x, s), \quad i \notin D))$$

вектор $g^{D}(x, s)$ можно считать известным. Но системы такого типа уже рассматривались в п. 3 § 2 (системы (4)). Подчеркнем, что в случае, когда число состояний, не принадлежащих D, конечно, а функции $\mu_{ij}(x)$ и $\nu_{ij}(x)$ непрерывны, решение системы (11) выражается через матрицант

$$\tilde{\varphi}^{D}(x, s) = \Omega_0^{x}(f^{D}) \tilde{\varphi}^{D}(0, s) + \int_0^{x} \Omega_y^{x}(f^{D}) g^{D}(y, s) dy.$$

§ 5. О распределении максимума процесса $\xi(t)$.

Пусть множество состояний процесса $\xi(t)$ упорядочено следующим образом:

$$E_0 < E_1 < E_2 < \ldots .$$

Согласно сделанной в § 1 оговорке (писать i вместо E_i), это соотношение превращается в формально очевидное

$$0 < 1 < 2 < \ldots$$

Целью настоящего параграфа является решение задачи нахождения функций

$$M_{ij}(x, y) = \mathbf{P}\{\sup_{x\leqslant t\leqslant y} \xi(t) = j/X(x) = (i, x)\},$$

$$M(x, y) = \| M_{ij}(x, y); \quad i, j \geqslant 0 \|.$$

Между функциями $M_{ij}(x, y)$ и $\varphi_i^D(x, y)$ существует очевидная связь

$$M_{ij}(x, y) = \varphi_i^{D_j}(x, y) - \varphi_i^{D_{j+1}}(x, y),$$

где $D_j = \{i : i \geqslant j\}$.

Из этого соотношения с учетом доказанной в § 4 непрерывности функций $\varphi_i^D(x, y)$ по обоим аргументам, в частности, следует непрерывность функций $M_{ij}(x, y)$ по x и y. Этот факт следует и из того, что имеет место соотношение

$$M_{ij}(x, y) = \int\limits_x^y \Big[\sum_{n<j, n\neq i} \mu_{in}(u) M_{nj}(u, y) + \sum_{n<j} \nu_{in}(u) M_{nj}(0, y-u) +$$

$$+ \mu_{ij}(u) \sum_{n\leqslant j} p_{jn}^{D_{j+1}}(u, [0, y], y-u) + \nu_{ij}(u) \sum_{n\leqslant j} p_{jn}^{D_{j+1}}(0, [0, y-$$

$$-u], y-u)\Big] \exp\left\{-\int\limits_x^u [\mu_i(t) + \nu_i(t)]\, dt\right\} du,$$

которое представляет собой систему интегральных уравнений относительно функций $M_{ij}(x, y)$.

Используя непрерывность функций $M_{ij}(x, y)$, нетрудно получить такую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x} M_{ij}(x, y) = [\mu_i(x) + \nu_i(x)]\, M_{ij}(x, y) - \Big[\sum_{n<j, n\neq i} \mu_{in}(x) M_{nj}(x, y) +$$

$$+ \sum_{n<j} \nu_{in}(x) M_{nj}(0, y-x) + \mu_{ij}(x) \sum_{n\leqslant j} p_{jn}^{D_{j+1}}(x, [0, y), y-x) +$$

$$+ \nu_{ij}(x) \sum_{n\leqslant j} p_{jn}^{D_{j+1}}(0, [0, y-x), y-x)\Big].$$

Вопрос решения систем такого вида обсуждался выше.

§ 6. О времени достижения линейной компонентой заданного уровня

В двух предыдущих параграфах объектом изучения была дискретная компонента процесса $X(t)$. В этом параграфе будет исследоваться время достижения заданного уровня второй компонентой $\eta(t)$, линейно возрастающей на участках ее непрерывности.

Отметим, что этот вопрос исследовался в работах [3, 10] для рассмотренных там процессов.

Пусть $X(0) = (i, x)$. Обозначим через $\tau_i(x, y)$ $(y \geqslant x)$ перв[ый] момент времени, для которого $\eta(\tau_i(x, y)) = y$, т. е.

$$\tau_i(x, y) = \inf\{t : t \geqslant 0,\ \eta(t) = y\}.$$

Введем функции

$$N_{ij}(x, y, z) = \mathbf{P}\{\tau_i(x, y) \leqslant z,\quad \xi(\tau_i(x, y)) = j / X(0) = (i, x)\},$$

$$\widetilde{N}_{ij}(x, y, s) = \int_{y-x}^{\infty} e^{-sz} N_{ij}(x, y, dz),$$

так что функция

$$N_i(x, y, z) = \sum_{j \geqslant 0} N_{ij}(x, y, z) = \mathbf{P}\{\tau_i(x, y) \leqslant z\}$$

является условной функцией распределения случайной величин[ы] $\tau_i(x, y)$, а функция

$$\widetilde{N}_i(x, y, s) = \sum_{j \geqslant 0} \widetilde{N}_{ij}(x, y, s) = \int_{y-x}^{\infty} e^{-sz} N_i(x, y, dz)$$

ее преобразованием Лапласа — Стилтьеса.

Из формулы полной вероятности следует соотношение

$$\widetilde{N}(x, y, s) = e^{s(x-y)}\psi(x, y) + \int_{x}^{y} e^{s(x-u)}\psi(x, u)\,\nu(u)\,du\widetilde{N}(0, y, s). \tag{12}$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, получаем линейное уравнение относительно матрицы $\widetilde{N}(0, y, s)$

$$\widetilde{N}(0, y, s) = e^{-sy}\psi(0, y) + \int_{0}^{y} e^{-su}\psi(0, u)\,\nu(u)\,du\widetilde{N}(0, y, s). \tag{13}$$

Аналогично тому, как это делалось выше, можно показать, что при условии равномерной (по i) ограниченности функций $\nu_i(x)$ для s с достаточно большой действительной частью система (13) вполне регулярна и, следовательно, во всей правой полуплоскости обладает единственным решением, а матрица $\widetilde{N}(0, y, s)$ допускает представление в виде ряда Неймана

$$\widetilde{N}(0, y, s) = e^{-sy}[I - d(y, s)]^{-1}\psi(0, y) =$$

$$= e^{-sy}\sum_{n=0}^{\infty}[d(y, s)]^n\psi(0, y), \tag{14}$$

где

$$d(y, s) = \int_{0}^{y} e^{-su}\psi(0, u)\,\nu(u)\,du.$$

Подставляя полученное для $\tilde{N}(0, y, s)$ выражение в (12), получаем, что

$$\tilde{N}(x, y, s) = e^{s(x-y)}\psi(x, y) + \int_x^y e^{s(x-u)}\psi(x, u)\nu(u)\,du \times$$
$$\times [I - d(y, s)]^{-1}\psi(0, y)\,e^{-sy}.$$

Покажем теперь, что имеет место тождество

$$\tilde{N}(x, y, s) \equiv \tilde{N}(x, u, s)\,\tilde{N}(u, y, s) \qquad (x \leqslant u \leqslant y).$$

Для этого достаточно доказать тождество

$$\tilde{N}(0, y, s) \equiv \tilde{N}(0, x, s)\,\tilde{N}(x, y, s) \qquad (0 \leqslant x \leqslant y). \tag{15}$$

Действительно, тогда

$$\tilde{N}(x, y, s) \equiv [\tilde{N}(0, x, s)]^{-1}\,\tilde{N}(0, y, s) \equiv$$
$$\equiv [\tilde{N}(0, x, s)]^{-1}\,\tilde{N}(0, u, s)\,[\tilde{N}(0, u, s)]^{-1}\tilde{N}(0, y, s) \equiv$$
$$\equiv \tilde{N}(x, u, s)\,\tilde{N}(u, y, s).$$

Но в справедливости тождества (15) нетрудно убедиться, используя очевидное соотношение

$$\psi(0, y) = \psi(0, x)\,\psi(x, y) \quad (x \leqslant y)$$

и формулы (12), (14). В самом деле,

$$\tilde{N}(0, x, s)\,\tilde{N}(x, y, s) = [I - d(x, s)]^{-1}\Big[\psi(0, x)\,\psi(x, y)\,e^{-sy} +$$
$$+ \int_y^x e^{-su}\psi(0, x)\,\psi(x, u)\,\nu(u)\,du\,\tilde{N}(0, y, s)\Big] = [I - d(x, s)]^{-1} \times$$
$$\times \{e^{-sy}\psi(0, y)\,[\tilde{N}(0, y, s)]^{-1} + d(y, s) - d(x, s)\}\,\tilde{N}(0, y, s) =$$
$$= [I - d(x, s)]^{-1}\,[I - d(y, s) + d(y, s) - d(x, s)]\,\tilde{N}(0, y, s) =$$
$$= \tilde{N}(0, y, s).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В. Замечание об однородных марковских процессах с дискретной компонентой.— Теор. вероят. и мат. статистика, вып. I. 1970.
2. Ежов И. И. Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс.— Украинский математический журнал, 18, 1, 1966.
3. Арсенишвили Г. Л., Ежов И. И. Об одном обобщении цепей Маркова с полумарковским вмешательством случая.— ДАН ГССР, 54, 2, 1969.

4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случ
процессов. М., «Наука», 1965.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный
в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
7. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные метод
шего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.
8. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических фун
М., Физматгиз, 1961.
9. Ежов И. И. Эргодическая теорема для марковских процессов, о
вающих общие системы массового обслуживания.— Кибернетика, № 5,
10. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы одноро
по второй компоненте. I.— Теория вероятностей и ее применения, **14**, 1,

I. Z. Gabrovsky, I. I. Ezhov, A. M. Zakharin

ON GENERALIZATION OF SEMI-MARKOV PROCESSES

Summary

A class of Markov process with discrete component is introduced and stud

Поступила в редколлегию 4.I 1972.