В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ. I

Изучению случайных квадратичных форм было посвящено значительное число работ (см., например, [1, 2]). Однако вопрос о предельном поведении таких форм изучен еще мало. Настоящая статья состоит из двух частей. В первой формулируются условия сходимости функций распределения случайных квадратичных и линейных форм. В некоторых случаях указывается общий вид предельных законов распределения. Вторая часть будет посвящена дальнейшему исследованию квадратичных форм, где будут приведены также доказательства утверждений, сформулированных в первой части.

Рассмотрим последовательность серий действительных случайных величин ξ_{kn}, $k = \overline{1, n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Величины ξ_{kn} будем называть предельно постоянными, если существуют постоянные числа d_{kn} такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} P\{|\xi_{kn} - d_{kn}| > \varepsilon\} = 0.$$

Очевидно, что любую симметричную матрицу можно представить в виде разности двух неотрицательно определенных, поэтому постановку задачи можно сформулировать следующим образом: при надлежащем подборе постоянных b_n и векторов $\vec{a}_n = (d_{1n}, \dots, d_{nn})$ найти условия сходимости, а также общий вид совместных предельных законов распределения для последовательности случайных величин $\zeta_n = (\vec{c}_n, \vec{\xi}_n) - b_n$ и $\xi_n = (A_n(\vec{\xi}_n - \vec{a}_n), (\vec{\xi}_n - \vec{a}_n))$, где $A_n = (a_{ij}^{(n)})$ — неотрицательно определенная матрица n-го порядка, $\vec{c}_n = (c_{1n}, \dots, c_{nn})$, $\vec{\xi}_n = (\xi_{1n}, \dots, \xi_{nn})$. В качестве d_{kn} выберем

$$d_{kn} = m_{kn}\sqrt{a_{kk}^{(n)}} + \int_{|x|<\tau} x\,dF\left(\frac{x}{\sqrt{a_{kk}^{(n)}}} + m_{kn}\right), \quad F_{kn}(x) = P\{\xi_{kn} < x\},$$

m_{kn} — медиана величины ξ_{kn}, $\tau > 0$ — любое постоянное число.

Под обозначением $(\xi_n(x), \gamma_n) \Longrightarrow (\xi(x), \gamma)$ будем понимать слабую сходимость конечномерных распределений случайных функций $\xi_n(x)$ и случайных величин γ_n к конечномерным распределениям некоторой случайной функции $\xi(x)$ и некоторой случайной величины γ. Пусть для каждого n величины ξ_{kn}, $k = \overline{1, n}$ независимы, а

$\sqrt{a_{kk}^{(n)}}\,\xi_{kn}$ и $c_{kn}\xi_{kn}$ предельно постоянны.

Теорема 1. Для того чтобы $(\xi_n, \zeta_n) \Longrightarrow (\xi, \zeta)$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $s \geqslant 0$ и t существовал

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(t, s) + itd_n\right\} = \varphi(t, s)$$

и $\varphi(t, s)$ была непрерывна.

Тогда

$$\boldsymbol{M} \exp\{-s\xi + it\zeta\} = \varphi(t, s).$$

Здесь

$$f_k(t, s) = \boldsymbol{M}\left[\exp\left(i\sqrt{s}\,\nu_{kn}\rho_k + it\mu_{kn}\right)/\eta_k\right] - 1, \quad \rho_k = \frac{\eta_k}{\sqrt{a_{kk}^{(n)}}},$$

$$\nu_{kn} = \sqrt{a_{kk}^{(n)}}\,\xi_{kn} - d_{kn}, \quad \mu_{kn} = \xi_{kn}c_{kn} - \beta_{kn},$$

$$\beta_{kn} = c_{kn}m_{kn} + \int\limits_{|x|<\tau} x\,dF_{kn}\left(\frac{x}{c_{kn}} + m_{kn}\right), \quad d_n = b_n - \sum_{k=1}^{n} \beta_{kn},$$

$\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — нормально распределенный вектор с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций $2A_n$.

Следствие 1. Если $(\xi_n(x), \gamma_n) \Longrightarrow (\xi(x), \gamma)$, $\xi_n(+\infty) \Longrightarrow \xi(+\infty)$ на некотором всюду плотном множестве D, где $\xi($ — неубывающая, ограниченная с вероятностью 1 случайная функци

$$\xi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2}\,dF_{kn}(\rho_k^{-1}u), \quad \gamma_n = \int \frac{1}{x}\,d\xi_n(x),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M} e^{-s\xi_n} = \boldsymbol{M} \exp\left\{i\sqrt{s}\gamma + \int\left(e^{i\sqrt{s}x} - 1 - \frac{i\sqrt{s}x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,d\xi(x)\right\}$$

Следствие 2. Если

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [f_k(0, s) - \boldsymbol{M} f_k(0, s)] = 0,$$

то для того, чтобы $\xi_n \Longrightarrow \xi$, необходимо и достаточно, чтобы $G_n(x) \Longrightarrow G(x)$, где $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации,

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2}\,dP\{\nu_{kn} < u\}.$$

При этом

$$\boldsymbol{M} e^{-s\xi} = \exp\left\{\int (e^{-sx^2} - 1)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\}.$$

Пусть $r_n(t, s) = a_{ij}^{(n)}$, если $\frac{i}{n} \leqslant t < \frac{i+1}{n}$, $\frac{j}{n} \leqslant s < \frac{j+1}{n}$, $\eta_n(x) = \eta_i$, если $\frac{i}{n} \leqslant x < \frac{i+1}{n}$.

Следствие 3. Если равномерно по k

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{x} \frac{u^2}{1+u^2} dP\{\nu_{kn} < u\} = G(x), \quad \lim_{n\to\infty} n \int \frac{u}{1+u^2} dP\{\nu_{kn} < u\} = \gamma,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(t, s) = r(t, s)$ и $r(t, s)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} Me^{-s\xi_n} = M \exp\left\{i\sqrt{s}\,\gamma \int_0^1 \eta(t)\, dt + \int_0^1 \int \left(e^{i\sqrt{s}\,\eta(t)x} - \frac{i\sqrt{s}\,\eta(t)x}{1+x^2} - 1\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)\, dt\right\}, \qquad (1)$$

где $\eta(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $r(t, s)$.

Если же функции распределения величин ξ_{kn} принадлежат области притяжения устойчивого закона с характеристическим показателем α $(0 < \alpha \leqslant 2)$, то формула (1) имеет вид

$$M \exp\left\{i\gamma\sqrt{s} \int_0^1 \eta(t)\, dt - c \int_0^1 s^{\frac{\alpha}{2}} |\eta(t)|^{\alpha} [1 + i\beta \operatorname{sgn} \eta(t)\, \omega(\eta(t), \alpha)]\, dt\right\},$$

где γ — любое постоянное число, $|\beta| \leqslant 1$, $c \geqslant 0$, $\omega(\eta(t), \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\alpha$, если $\alpha \neq 1$ и $\frac{2}{\pi} \ln |\eta(t)|$, если $\alpha = 1$.

Следствие 4. Если равномерно по k

$$G_{kn}(x, y) \Rightarrow G(x, y), \quad \iint \frac{1}{x} dG_{kn}(x, y) \to \gamma, \quad d_n \to d,$$

$$\iint \frac{1}{y} dG_{kn}(x, y) \to \delta, \quad \lim_{n\to\infty} r_n(t, s) = r(t, s),$$

где

$$G_{kn}(x, y) = n \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} dP\{\nu_{kn} < u,\ \mu_{kn} < v\}$$

и $r(t, s)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} M \exp(-s\xi_n + it\zeta_n) = M \exp\left\{i\sqrt{s}\,\gamma \int_0^1 \eta(x)\, dx + it(\delta + d) + \int_0^1 \iint \left(e^{i\sqrt{s}\,\eta(x)y + itz} - \frac{i\sqrt{s}\,\eta(x)y + itz}{1+y^2+z^2} - 1\right) \frac{1+y^2+z^2}{y^2+z^2} dG(y, z)\, dx\right\}.$$

Далее, предположим, что для каждого n случайные величины ξ_{kn}, $k=\overline{1, n}$ независимы, имеют конечные дисперсии σ_{kn}^2 и

$$\sup_n \left(S_p B_n + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{kn}^2 c_{kn}^2 \right) \leqslant C < \infty,$$

где $B_n = (2a_{ij}^{(n)} \sigma_{in} \sigma_{jn})$ — квадратная матрица n-го порядка.

Очевидно, что, не ограничивая общности, можно считать, что ξ_{kn} имеют нулевые математические ожидания. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $d_{kn} = 0$, $b_n = 0$.

Будем говорить, что для величин ξ_{kn} выполняется условие Линдеберга, если для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{kn}(x\theta_{kn}^{-1}) = 0, \ \ \theta_{kn} = \sqrt{a_{kk}^2 + c_{kn}^2}.$$

Следствие 5. Для того, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \left[Me^{-s\xi_n + it\zeta_n} - \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} ([I + sB_n]^{-1} \vec{d}_n, \vec{d}_n) \right\} \det (I + sB_n)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0$$

и величины $\xi_{kn}\theta_{kn}$ были бесконечно малы, достаточно, а в случае, когда ξ_{kn} симметричны, и необходимо, чтобы для величин $\xi_{kn}\Theta_{kn}$ выполнялось условие Линдеберга. Здесь $\vec{d}_n = (c_{1n}\sigma_{1n}, \ldots, c_{nn}\sigma_{nn})$.

Следствие 6. Пусть $D\xi_{kn} = 1$, $S_{kn} = \sum_{i=1}^{k} \xi_{in}$.

Для того, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} M \exp\left\{ -t \sum_{k=1}^{n} n^{-2} S_{kn}^2 \right\} = \frac{\sqrt[4]{2t}}{\sqrt{sh\sqrt{2t}}}, \ \ t \geqslant 0,$$

и величины $\xi_{kn} n^{-\frac{1}{2}}$ были бесконечно малы, достаточно, а в случае, когда ξ_{kn} симметричны, и необходимо, чтобы для величин $\xi_{kn} n^{-\frac{1}{2}}$ выполнялось условие Линдеберга.

Пусть теперь A_n — произвольная симметричная матрица, $|B_n| = (b_{ij})$ и $\sup_n Sp\ |B_n| \leqslant C$.

Следствие 7. Если для величин $\sqrt{b_{kk} + c_{kn}^2}\ \xi_{kn}$ выполняется условие Линдеберга, то

$$\lim_{n\to\infty} \left[M \exp\{it\xi_n + is\zeta_n\} - \exp\left\{ -\frac{s^2}{2} ([I + itB_n]^{-1} \vec{d}_n, \vec{d}_n) \right\} \times \right.$$
$$\left. \times \det (I + itB_n)^{-\frac{1}{2}} \right] = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Камалов М. К. Распределение квадратичных форм. «Фан», Ташкент, 1972.
2. Малевич Т. Л., Дам Куанг Занг. Класс предельных законов совместного распределения квадратичных и линейных форм от нормальных случайных величин.— В сб.: Исследование по математической статистике. «Фан», Ташкент, 1972.

V. L. Girko

LIMIT THEOREMS FOR THE RANDOM QUADRATIC FORMS. I.

Summary

Some limit theorems for the random quadratic forms are obtained.

Поступила в редколлегию 15.III 1972.