Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 123–134

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 123–134

НОРМАЛЬНИЙ ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ НОРМОВАНОГО ЧИСЛА СТОРОННІХ РОЗВ'ЯЗКІВ СУМІСНОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ВИПАДКОВИХ РІВНЯНЬ НАД ПОЛЕМ GF(2)

УДК 519.21

В. І. МАСОЛ І С. Я. СЛОБОДЯН

Анотація. Наведені умови, за яких розподіл відповідним чином нормованого числа сторонніх розв'язків сумісної системи випадкових рівнянь над полем GF(2) прямує до стандартного нормального розподілу.

Abstract. Conditions are presented under which the distribution of the properly normalized number of extraneous solutions of the system of simultaneous stochastic equations over the field GF(2) tends to standard normal distribution.

Аннотация. Представлены условия, при которых распределение соответствующим образом нормированного числа посторонних решений совместной системы случайных уравнений над полем GF(2) сходится к стандартному нормальному распределению.

1. Постановка задачі

Розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{g_q(n)} \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} a^{(q)}_{j_1\dots j_k} x_{j_1}\dots x_{j_k} = b_q, \qquad q=1,2,\dots,N, \tag{1}$$

над полем $GF(2)$, що складається з двох елементів, за умови (A): коефіцієнти $a^{(q)}_{j_1\dots j_k}$, $1\le j_1<\dots<j_k\le n$, $k=1,2,\dots,g_q(n)$, $q=1,2,\dots,N$, — незалежні випадкові величини, $\mathsf{P}\{a^{(q)}_{j_1\dots j_k}=1\} = 1-\mathsf{P}\{a^{(q)}_{j_1\dots j_k}=0\} = p_{qk}$. Тут елементи b_q, $q=1,2,\dots,N$, — результат підстановки у ліву частину системи (1) фіксованого n-вимірного $(0,1)$-вектора $\overline{x}^{(0)}$; функція $g_q(n)$ — невипадкова, $g_q(n)\in\{2,3,\dots,n\}$, $q=1,2,\dots,N$.

Позначимо через $M\left(\overline{x}^{(0)}, f(n)\right)$ сукупність усіх n-вимірних $(0,1)$-векторів $\overline{x}$, які не співпадають з $\overline{x}^{(0)}$ та мають кількість $|\overline{x}|$ ненульових компонент, яка задовольняє нерівності $|\overline{x}|\ge f(n)$, $f(n)\in\{0,1,2,\dots,n\}$.

Число усіх розв'язків системи (1), які належать множині $M\left(\overline{x}^{(0)}, f(n)\right)$, позначимо ν_n і будемо називати їх сторонніми. Нас цікавлять умови, за яких відповідним чином нормована випадкова величина ν_n має граничний $(n\to\infty)$ нормальний розподіл і при цьому $f(n)\ge 2$. Зазначимо, що в роботі [2] розглянуто випадок, коли $f(n)=0$ та $\rho(n)\to\infty$, $n\to\infty$. Тут і далі $\rho(n)$ — це число ненульових компонент вектора $\overline{x}^{(0)}$, $\rho(n)=|\overline{x}^{(0)}|$.

2. Формулювання теореми

Теорема. *Нехай виконуються умови (A), для $n\to\infty$*

$$2^{n-N} = [\lambda], \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60C05, 15A52, 60F99.

Ключові слова і фрази. Випадкові рівняння, поле GF(2), граничний нормальний розподіл, сторонні розв'язки.

де

$$\lambda = \frac{1}{\upsilon(1+\alpha+\omega)} \log_2 \frac{n}{\beta f(n) \log_2 n}, \tag{3}$$

$\upsilon = \upsilon(n)$, $\upsilon \geq 2$, $\alpha = \alpha(n)$, $\omega = \omega(n)$, $\beta = \beta(n)$, $\beta \geq c_0 > 2\ln 2$, $c_0 = \mathrm{const}$, $f(n) \geq 2$, $[\cdot]$ *— знак цілої частини,*

$$\lambda \to \infty, \tag{4}$$

$$\omega\sqrt{\lambda} \to \infty; \tag{5}$$

для довільного q, $q = 1, 2, \ldots, N$, *існує непорожня множина* T_q *така, що*

$$T_q \subseteq \{2, \ldots, g_q(n)\} \cap \{2, \ldots, f(n)\}, \qquad T_q \neq \varnothing, \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} - \delta_{qt} \leq p_{qt} \leq \frac{1}{2} + \delta_{qt}, \qquad \delta_{qt} = \delta_{qt}(n), \qquad t \in T_q,\ q = 1, 2, \ldots, N, \tag{7}$$

$$(2 + (1+\alpha+\omega)\ln 2)\lambda - \frac{\ln\lambda}{2} + \ln\left(\sum_{q=1}^{N} \prod_{t \in T_q} 2\delta_{qt}\right) \to -\infty, \tag{8}$$

$$(\alpha - 1)\lambda u(\alpha) \geq c_1, \tag{9}$$

де $c_1 = \mathrm{const}$, $u(\alpha) = (\alpha-1)^{-1}(\alpha\ln\alpha - \alpha - 1)$ *для* $2 > \ln\alpha > 0$ *та* $u(\alpha) = \ln\alpha - 1$ *для* $\ln\alpha \geq 2$.

Тоді функція розподілу випадкової величини $\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ *прямує* ($n \to \infty$) *до стандартної нормальної функції розподілу.*

3. Допоміжні твердження

Нехай W — множина усіх непорожніх підмножин множини Ω, кількість елементів якої дорівнює $|\Omega| = r$, $1 \leq r < \infty$. Визначимо дві підмножини W_Δ і I_s множини W:

$$W_\Delta \subseteq W, \qquad W_\Delta = \{\omega_1, \ldots, \omega_\Delta\}, \qquad |W_\Delta| = \Delta, \qquad \Delta \geq 1, \qquad \omega_i \neq \omega_j$$

для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, \Delta\}$;

$$I_s \subseteq W, \qquad I_s = \{m_1, \ldots, m_s\}, \qquad |I_s| = s, \qquad s \geq 0, \qquad m_i \neq m_j$$

для $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, s\}$.

Твердження 1 ([3]). *Нехай*

$$|m_i \cap \omega_j| \equiv 0 \pmod 2, \qquad i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, \Delta; \tag{10}$$

$$\Delta \in [2^{k-1}, 2^k - 1], \qquad 1 \leq k \leq r.$$

Тоді

$$s \leq 2^{r-k} - 1.$$

Твердження 2 ([3]). *Нехай* $\Omega = \{1, \ldots, r\}$, $3 \leq r < \infty$. *Якщо умови (10),*

$$\Delta = 2^k - 1, \qquad s = 2^{r-k} - 1, \qquad 1 \leq k \leq r - 2;$$

$$|\omega_j| \geq 3, \qquad j = 1, \ldots, \Delta, \tag{11}$$

виконуються для множин W_Δ *і* I_s, *то існує таке число* α, $\alpha \in \{1, \ldots, \Delta\}$, *що для деяких* m_{i_ν}, $m_{i_\nu} \in I_s$, $\nu = 1, 2, 3$,

$$|\omega_\alpha \cap m_{i_\nu}| = 2, \qquad \nu = 1, 2, 3, \qquad |\omega_\alpha \cap (a \cup b)| = 3,$$

де $a \neq b$, $a, b \in \{m_{i_\nu} : \nu = 1, 2, 3\}$.

Зауваження 1. В роботі [3] встановлено, що умова (11) не виконується для $k = r-1$, $s = 1$.

Нехай $\overline{x}^{(1)}, \dots, \overline{x}^{(r)}$ — попарно-відмінні n-вимірні $(0,1)$-вектори, що не співпадають з $\overline{x}^{(0)}$, $\overline{x}^{(\nu)} = \left(\overline{x}_1^{(\nu)}, \dots, \overline{x}_n^{(\nu)}\right)$, $\nu = 0, \dots, r$, $1 \le r < \infty$.

Для параметра t, $t \in \{1, \dots, n\}$, набору $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$, $1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_t \le n$, параметра $\nu, \nu \in \{1, \dots, r\}$, і набору $\{u_1, \dots, u_\nu\}$, $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le r$, розглянемо множину

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_t; u_1, \dots, u_\nu) = \left\{ x_{\alpha_1}^{(u_z)} \dots x_{\alpha_t}^{(u_z)} \oplus x_{\alpha_1}^{(0)} \dots x_{\alpha_t}^{(0)} \colon z = 1, \dots, \nu \right\}.$$

Будемо казати, що множина $m(\alpha_1, \dots, \alpha_t; u_1, \dots, u_\nu)$ має властивість E, якщо $x_{\alpha_1}^{(u_z)} \dots x_{\alpha_t}^{(u_z)} \oplus x_{\alpha_1}^{(0)} \dots x_{\alpha_t}^{(0)} = 1$, $z = 1, \dots, \nu$, і для довільного v, $v \in \{1, \dots, r\} \setminus \{u_1, \dots, u_\nu\}$, $x_{\alpha_1}^{(v)} \dots x_{\alpha_t}^{(v)} \oplus x_{\alpha_1}^{(0)} \dots x_{\alpha_t}^{(0)} = 0$, де $\oplus$ — знак додавання у полі $GF(2)$. Позначимо $\gamma_t^{\{u_1, \dots, u_\nu\}}$– число усіх елементів множини $\{m(\alpha_1, \dots, \alpha_t; u_1, \dots, u_\nu) \colon 1 \le \alpha_1 < \dots < \alpha_t \le n\}$, які мають властивість E. Нехай для $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le r$, $\nu = 1, \dots, r$, $t = 1, \dots, n$

$$\Gamma_{t,r}^{\{u_1, \dots, u_\nu\}} = \sum_{\psi=1}^{\nu} 2^{-1} \left(1 - (-1)^\psi\right) \sum_{W_1} \sum_{l=0}^{r-\nu} \sum_{W_2} \gamma_t^{\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi, \mu_1, \dots, \mu_l\}}, \tag{12}$$

де $W_1 = \{1 \le \sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \le r, \sigma_z \in \{u_1, \dots, u_\nu\}, z = 1, \dots, \psi\}$, $W_2 = \{1 \le \mu_1 < \dots < \mu_l \le r, \mu_z \notin \{u_1, \dots, u_\nu\}, z = 1, \dots, l\}$, $\sum_{W_1}$ $(\sum_{W_2})$ — символ додавання за усіма наборами $\{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi\}$ $(\{\mu_1, \dots, \mu_l\})$, що належать множині W_1 (W_2). Далі введемо такі позначення: $i_{\{u_1 \dots u_\nu\}}$ $\left(j_{\{u_1 \dots u_\nu\}}\right)$ — це кількість одиниць (нулів) розміщених на тих і тільки тих позиціях в усіх векторах $\overline{x}^{(u_1)}, \dots, \overline{x}^{(u_\nu)}$, на яких в усіх векторах $\overline{x}^{(u_{\nu+1})}, \dots, \overline{x}^{(u_r)}$, $\overline{x}^{(0)}$ розміщені нулі (одиниці); $F_{u_1, \dots, u_\nu}$ $(\Phi_{u_1, \dots, u_\nu})$ — це кількість одиниць (нулів) розміщених на одних і тих же позиціях в усіх векторах $\overline{x}^{(u_1)}, \dots, \overline{x}^{(u_\nu)}$, а у векторі $\overline{x}^{(0)}$ на цих позиціях знаходяться нулі (одиниці).

За допомогою введених позначень отримуємо

$$F_{u_1, \dots, u_\nu} = \sum_{l=0}^{r-\nu} \sum_{\substack{1 \le \mu_1 < \dots < \mu_l \le r \\ \mu. \notin \{u_1, \dots, u_\nu\}}} i_{\{u_1 \dots u_\nu \mu_1 \dots \mu_l\}}, \tag{13}$$

$$\Phi_{u_1, \dots, u_\nu} = \rho(n) - \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{\substack{v_1 < \dots < v_q \\ v. \in \{u_1, \dots, u_\nu\}}} \sum_{l=0}^{r-\nu} \sum_{\substack{1 \le \mu_1 < \dots < \mu_l \le r \\ \mu. \notin \{u_1, \dots, u_\nu\}}} j_{\{v_1 \dots v_q \mu_1 \dots \mu_l\}}, \tag{14}$$

$$\gamma_t^{\{m_1 \cap m_2\}} \ge C_{i_{m_1} + i_{m_2}}^t - C_{i_{m_1}}^t - C_{i_{m_2}}^t, \tag{15}$$

де $m_i \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$, $i = 1, 2$, $m_1 \ne m_2$, $m_1 \cap m_2 \ne \varnothing$. В роботі [3] встановлено, що

$$\begin{aligned} \Gamma_{t,r}^{\{u_1 \dots u_\nu\}} &= \sum_{\psi=1}^{\nu} (-2)^{\psi-1} \sum_{\substack{\sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \\ \sigma. \in \{u_1, \dots, u_\nu\}}} C_{F_{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi} + \Phi_{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi}}^t \\ &+ \frac{1 - (-1)^\nu}{2} \left(C_{\rho(n)}^t + \sum_{\psi=1}^{\nu} (-2)^\psi \sum_{\substack{\sigma_1 < \dots < \sigma_\psi \\ \sigma. \in \{u_1, \dots, u_\nu\}}} C_{\Phi_{\sigma_1, \dots, \sigma_\psi}}^t \right), \end{aligned} \tag{16}$$

де число $\Gamma_{t,r}^{\{u_1 \dots u_\nu\}}$, $\overline{x}^{(0)}$, $1 \le u_1 < \dots < u_\nu \le r$, $\nu \in \{1, \dots, r\}$, $t = 1, 2, \dots, g_q(n)$, $q = 1, 2, \dots, N$, визначено співвідношенням (12).

Нехай $M(\nu_n)_r$ — r-й факторіальний момент випадкової величини ν_n, $r \ge 1$.

Твердження 3. *Якщо виконується умова (A), то для* $1 \le r < \infty$ *та* $0 \le f(n) \le n$

$$M\left(\nu_n\right)_r = 2^{-rN} S(n, r; Q), \tag{17}$$

де

$$S(n,r;Q)=\sum_{s=0}^{n-\rho(n)}\sum(n-\rho(n))!\left((n-\rho(n)-s)!\prod_{i\in I}i!\right)^{-1}$$
$$\times\sum_{\substack{s'=0\\ s'+s\geq 1}}^{\rho(n)}\sum{}'\,(\rho(n))!\left((\rho(n)-s')!\prod_{j\in J}j!\right)^{-1}Q, \qquad (18)$$

$$Q=\prod_{q=1}^{N}\left(1+\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{1\leq u_1<\dots<u_\nu\leq r}\prod_{t=1}^{g_q(n)}(1-2p_{qt})^{\Gamma_{t,r}^{\{u_1,\dots,u_\nu\}}}\right),$$

підсумовування $\sum$ ($\sum'$) *здійснюється за всіма* $i\in I$ ($j\in J$), *де*

$$I=\left\{i_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}\colon 1\leq u_1<\dots<u_\nu\leq r, \nu=1,\dots,r\right\},$$

$J=\left\{j_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}\colon 1\leq u_1<\dots<u_\nu\leq r, \nu=1,\dots,r\right\}$, *такими, що*

$$\sum_{i\in I}i=s \qquad \left(\sum_{j\in J}j=s'\right);$$

в рівності (18) *числа* i, $i\in I$, j, $j\in J$, *задовольняють співвідношенням*

$$\sum_{i\in I_{\{u\}},j\in J_{\{u\}}}(i+j)\geq 1, \qquad u=1,\dots,r, \qquad (19)$$

$$\sum_{i\in I_{\{u\}}}i+\rho(n)-\sum_{j\in J_{\{u\}}}j\geq f(n), \qquad u=1,\dots,r, \qquad (20)$$

$$\sum_{i\in I_{\{u_1,u_2\}},j\in J_{\{u_1,u_2\}}}(i+j)\geq 1, \qquad 1\leq u_1<u_2\leq r; \qquad (21)$$

для $1\leq u_1<\dots<u_\nu\leq r$, $\nu\in\{1,\dots,r\}$ *і* $t\in\{1,\dots,n\}$ *виконується нерівність*

$$\Gamma_{t,r}^{\{u_1,\dots,u_\nu\}}\geq\sum_{(i,j)\in T}\left(C_i^t+C_j^t\right), \qquad (22)$$

де $T=I_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}\times J_{\{u_1,\dots,u_\nu\}}$; *тут*

$$I_{\{u_r,\dots,u_\nu\}}=\left\{i_{\{\sigma_1,\dots,\sigma_\psi,\mu_1,\dots,\mu_l\}}\colon A(\psi,l,r)\right\},$$
$$J_{\{u_r,\dots,u_\nu\}}=\left\{j_{\{\sigma_1,\dots,\sigma_\psi,\mu_1,\dots,\mu_l\}}\colon A(\psi,l,r)\right\},$$

де $A(\psi,l,r)$ — *скорочений запис такого набору обмежень:* $1\leq\sigma_1<\dots<\sigma_\psi\leq r$, $\sigma_z\in\{u_1,\dots,u_\nu\}$, $z=1,\dots,\psi$, $\psi=1,\dots,\nu$, $\psi\equiv 1 \pmod 2$, $1\leq\mu_1<\dots<\mu_l\leq r$, $\mu_1,\dots,\mu_l\notin\{u_1,\dots,u_\nu\}$, $l=0,\dots,r-\nu$.

Доведення рівності (17) виконується аналогічно доведенню рівності (2.21) роботи [3], здійсненого для значення параметра $f(n)=0$; оцінка (22) еквівалентна оцінці (2.12), яка встановлена в [3].

Твердження 4. *Якщо виконується умова (A), то для* $0\leq f(n)\leq n$ *математичне сподівання випадкової величини* ν_n *дорівнює*

$$\mathsf{E}\,\nu_n=\sum_{i=0}^{n-\rho(n)}C_{n-\rho(n)}^{i}\sum_{\substack{j=0\\ i+j\geq 1}}^{\rho(n)}C_{\rho(n)}^{j}Q^*, \qquad (23)$$

де

$$Q^*=\prod_{q=1}^{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\prod_{t=1}^{g_q(n)}(1-2p_{qt})^{\Gamma_t(i,j)}\right), \qquad (24)$$

$$\Gamma_t(i,j) = C^t_{i+\rho(n)-j} + C^t_{\rho(n)} - 2C^t_{\rho(n)-j}, \tag{25}$$
$$t = 1,2,\dots,g_q(n), \qquad q = 1,2,\dots,N,$$
$$i+\rho(n)-j \geq f(n).$$

Справедливість співвідношення (23) випливає з (17) для $r = 1$.

Твердження 5. *Нехай мають місце умови* (19) *та* (20). *Тоді для* $t \in \{1,2,\dots,f(n)\}$

$$\Gamma^{\{u\}}_{t,r} \geq C^{t-1}_{f(n)-1}, \qquad u = 1,2,\dots,r. \tag{26}$$

Доведення. Використовуючи рівності (13), (14) та (16), одержимо

$$\Gamma^{\{u\}}_{t,r} = C^t_{F_u+\Phi_u} + C^t_{\rho(n)} - 2C^t_{\Phi_u}, \qquad u = 1,2,\dots,r, \tag{27}$$

де $F_u = \sum_{i\in I_{\{u\}}} i$, $\Phi_u = \rho(n) - \Phi^*_u$, $\Phi^*_u = \sum_{j\in J_{\{u\}}} j$. Внаслідок (19) очевидно, що $F_u + \Phi^*_u \geq 1$. Тому, щоб довести (26), достатньо знайти оцінку для $\Gamma^{\{u\}}_{t,r}$ у двох випадках:

1) $\Phi^*_u \geq 0$, $F_u \geq 1$,
2) $\Phi^*_u \geq 1$, $F_u = 0$.

Нехай $\Phi^*_u \geq 0$. Тоді $F_u \geq 1$ і з урахуванням (27)

$$\Gamma^{\{u\}}_{t,r} \geq C^t_{F_u+\Phi_u} - C^t_{\Phi_u} \geq C^{t-1}_{F_u+\Phi_u-1} \geq C^{t-1}_{f(n)-1},$$

де остання нерівність забезпечена умовою (20).

Якщо $F_u = 0$ і $\Phi^*_u \geq 1$, то $\Gamma^{\{u\}}_{t,r} \geq C^t_{\rho(n)} - C^t_{\Phi_u} \geq C^{t-1}_{\Phi_u} \geq C^{t-1}_{f(n)-1}$.

Твердження 5 доведене. □

Твердження 6. *Нехай мають місце умови* (20) *та* (21). *Тоді для* $t \in \{1,2,\dots,f(n)\}$

$$\Gamma^{\{u_1,u_2\}}_{t,r} \geq C^{t-1}_{f(n)-1}, \qquad 1 \leq u_1 < u_2 \leq r. \tag{28}$$

Доведення. Використовуючи рівності (13), (14) та (16), одержимо

$$\Gamma^{\{u_1,u_2\}}_{t,r} = C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}} + C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - 2C^t_{F_{u_1,u_2}+\Phi_{u_1,u_2}}, \qquad 1 \leq u_1 < u_2 \leq r, \tag{29}$$

де $F_{u_1,u_2} = \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{\substack{1\leq\mu_1<\dots<\mu_l\leq r \\ \mu.\notin\{u_1,u_2\}}} i_{\{u_1u_2\mu_1\dots\mu_l\}}$,

$$\Phi_{u_1,u_2} = \rho(n) - \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{\substack{1\leq\mu_1<\dots<\mu_l\leq r \\ \mu.\notin\{u_1,u_2\}}} \left(j_{\{u_1\mu_1\dots\mu_l\}} + j_{\{u_2\mu_1\dots\mu_l\}}\right)$$
$$- \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{\substack{1\leq\mu_1<\dots<\mu_l\leq r \\ \mu.\notin\{u_1,u_2\}}} j_{\{u_1u_2\mu_1\dots\mu_l\}}, \qquad 1 \leq u_1 < u_2 \leq r.$$

Далі перепишемо (29) так

$$\Gamma^{\{u_1,u_2\}}_{t,r} = C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}} - C^t_{F_{u_1,u_2}+\Phi_{u_1,u_2}} + C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - C^t_{F_{u_1,u_2}+\Phi_{u_1,u_2}}, \qquad 1 \leq u_1 < u_2 \leq r.$$

Звідси, використовуючи визначення чисел F_u, Φ_u, $u \in \{u_1,u_2\}$, та F_{u_1,u_2}, Φ_{u_1,u_2}, отримуємо для $1 \leq u_1 < u_2 \leq r$

$$\Gamma^{\{u_1,u_2\}}_{t,r} = C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}} - C^t_{F_{u_1}+\Phi_{u_1}-\psi_*} + C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}-\psi^*}, \tag{30}$$

де

$$\psi_* = \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{\substack{1\le\mu_1<\dots<\mu_l\le r \\ \mu_\cdot\notin\{u_1,u_2\}}} \left(i_{\{u_1\mu_1\dots\mu_l\}} + j_{\{u_2\mu_1\dots\mu_l\}}\right),$$

$$\psi^* = \sum_{l=0}^{r-2} \sum_{\substack{1\le\mu_1<\dots<\mu_l\le r \\ \mu_\cdot\notin\{u_1,u_2\}}} \left(i_{\{u_2\mu_1\dots\mu_l\}} + j_{\{u_1\mu_1\dots\mu_l\}}\right).$$

Згідно умови (21) має місце нерівність $\psi_* + \psi^* \ge 1$. Якщо $\psi_* \ge 0$ і $\psi^* \ge 1$, то

$$\Gamma_{t,r}^{\{u_1,u_2\}} \ge C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}} - C^t_{F_{u_2}+\Phi_{u_2}-1} = C^{t-1}_{F_{u_2}+\rho(n)-\Phi^*_{u_2}-1} \ge C^{t-1}_{f(n)-1},$$

(тут були використані, зокрема, (30) та умова (20)). Якщо $\psi_* \ge 1$ і $\psi^* = 0$, то

$$\Gamma_{t,r}^{\{u_1,u_2\}} \ge C^{t-1}_{F_{u_1}+\rho(n)-\Phi^*_{u_1}-1} \ge C^{t-1}_{f(n)-1}.$$

Твердження 6 доведене. □

Твердження 7 ([2])**.** *Нехай X та Y — випадкові величини, які набувають цілих невід'ємних значень, та $MX = \lambda^*$. Якщо розподіли цих випадкових величин залежать від параметра n так, що для усіх $r \le (\alpha+\gamma)\lambda^*$*

$$M(Y)_r \le C(\lambda^*)^r \tag{31}$$

для деякої сталої C, і для $n\to\infty$ $\lambda^*\to\infty$,

$$\varliminf_{n\to\infty} (\alpha-1)\lambda^* u(\alpha) \ge c_1, \tag{32}$$

де c_1, $u(\alpha)$ та α визначені у формулюванні теореми,

$$\gamma \ge 0, \tag{33}$$

$$\max_{1\le r\le(\alpha+\gamma)\lambda^*} \left| M(X)_r (M(Y)_r)^{-1} - 1\right| \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0, \qquad n\to\infty, \tag{34}$$

то

$$\max_{0\le t\le\gamma\lambda^*} \left|\mathsf{P}\{X\ge t\} - \mathsf{P}\{Y\ge t\}\right| \to 0, \qquad n\to\infty.$$

Зауваження 2. Для $\alpha=5$, $\gamma=2$ твердження 7 доведене у [4].

Зауваження 3. У подальшому перехід до границі виконується за параметром n, $n\to\infty$.

4. Доведення теореми

Покажемо, що за умов теореми можна скористатися твердженням 7. Нехай у зазначеному твердженні випадкова величина Y має розподіл Пуассона з параметром 2^m, $m = n - N$, а розподіл випадкової величини X співпадає з розподілом випадкової величини ν_n; параметр γ дорівнює $\gamma = 1+\omega$.

Перевіримо умову (31). Користуючись рівністю (23), дамо оцінку для математичного сподівання випадкової величини ν_n. З цією метою за допомогою (25) та твердження 5 для $r=1$ знаходимо $\Gamma_t(i,j) \ge 1$ для усіх $t\in T_q$, де T_q задовольняє умові (6), $q = 1,2,\dots,N$.

Остання нерівність та співвідношення (4), (7), (8) дозволяють отримати таку оцінку для добутку Q^*, визначеного в (24),

$$Q^* = 2^{-N}\left(1 + O\left(\sum_{q=1}^{N}\prod_{t\in T_q} 2\delta_{qt}\right)\right),$$

звідси з урахуванням (23) знаходимо

$$M\nu_n = 2^{-N}\left(1 + O\left(\sum_{q=1}^{N}\prod_{t\in T_q} 2\delta_{qt}\right)\right)\left(2^n - \sigma_0\right), \tag{35}$$

де $\sigma_0 = 1 + \sum_i C^i_{n-\rho(n)}\sum_j C^j_{\rho(n)}$, $i + j \geq 1$, $i + \rho(n) - j < f(n)$.

Оскільки внаслідок умов (3) та (4) $f(n) = o\left(\frac{n}{\log_2 n}\right)$, то

$$\sigma_0 \leq 2^{2nH(p)}, \tag{36}$$

де $H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$, $p = \frac{f(n)}{n}$. (Тут була використана нерівність

$$\sum_{k=0}^{r} C^k_n \leq 2^{nH\left(\frac{r}{n}\right)}, \tag{37}$$

де $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ (див. [5, с. 193])). Користуючись співвідношеннями (2), (35) та (36), маємо

$$M\nu_n = [\lambda]\left(1 + O\left(2^{-n(1-2H(p))}\right) + O\left(\sum_{q=1}^{N}\prod_{t\in T_q} 2\delta_{qt}\right)\right), \tag{38}$$

або з урахуванням позначень, наведених у твердженні 7,

$$\lambda^* = [\lambda]\left(1 + o(1)\right). \tag{39}$$

Умови (2), (3), (8) та рівності $M(Y)_r = 2^{mr}$, (38) дають можливість стверджувати, що (31) має місце для сталої C, $C > 1$.

Перейдемо до перевірки умови (34). З цією метою подамо рівність (17) так

$$M\left(\nu_n\right)_r = \frac{1}{2^{rN}}\sum_{\Delta=0}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n, r; Q\right), \tag{40}$$

де $S^{(\Delta)}(n, r; Q)$ відрізняється від $S(n, r; Q)$ тим, що усі i та j, $i \in I$, $j \in J$, які приймають участь у записі $S(n, r; Q)$ згідно з (18), набувають лише таких значень, що існує точно Δ наборів

$$\begin{gathered}\omega_k = \left\{u^{(k)}_1, \ldots, u^{(k)}_{\xi_k}\right\}, \qquad 1 \leq u^{(k)}_1 < \cdots < u^{(k)}_{\xi_k} \leq r, \\ \xi_k \in \left\{1, 2, \ldots, r\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \Delta,\end{gathered} \tag{41}$$

для кожного з яких знайдеться число $t^{(k)} \in \{2, \ldots, f(n)\}$ таке, що

$$\Gamma^{\omega_k}_{t^{(k)}, r} = 0, \tag{42}$$

і для наборів $\{\theta_1, \ldots, \theta_q\}$, $1 \leq \theta_1 < \cdots < \theta_q \leq r$, $q = 1, \ldots, r$, що задовольняють співвідношенню $\{\theta_1, \ldots, \theta_q\} \neq \omega_k$, $k = 1, 2, \ldots, \Delta$, має місце оцінка для усіх $t \in \{2, \ldots, f(n)\}$

$$\Gamma^{\{\theta_1, \ldots, \theta_q\}}_{t, r} \geq 1. \tag{43}$$

Покажемо, що

$$\sup_{1\leq r\leq(\alpha+\gamma)\lambda^*}\left|\frac{S^{(0)}\left(n, r; Q\right)}{2^{rN}M\left(Y\right)_r} - 1\right|\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{44}$$

Спочатку зазначимо, що рівність $\Delta = 0$ дійсно може виконуватись. Справді, якщо для усіх i, $i \in I$, та (або) усіх j, $j \in J$, має місце принаймні одна з двох нерівностей $i \geq f(n)$ або $j \geq f(n)$, то внаслідок (22) оцінка (43) справджується для усіх наборів $\{\theta_1, \ldots, \theta_q\}$, $1 \leq \theta_1 < \cdots < \theta_q \leq r$, $q = 1, \ldots, r$ та $t \in \{2, \ldots, f(n)\}$. У свою чергу, рівність $i = f(n)$ та (або) рівність $j = f(n)$ може виконуватися для усіх $i \in I$, та (або) усіх $j \in J$, оскільки для $r \le (\alpha+\gamma)\lambda^*$ з урахуванням умови (3) та рівності (39) маємо таке

$$2^r f(n) \le \max\left(n-\rho(n), \rho(n)\right).$$

Отже, параметр Δ може набувати значення $\Delta = 0$.

Нехай $u = (2^r-1)\sum_{q=1}^{N}\prod_{t\in T_q} 2\delta_{qt}$. Тоді для $\Delta = 0$, використовуючи нерівності (7), (43) та співвідношення

$$u \to 0, \tag{45}$$

добуток Q можна подати асимптотично так $Q = 1 + O\,(u)$. Звідси отримуємо

$$S^{(0)}\,(n,r;Q) = (1+O\,(u))\left(2^{rn}-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3\right), \tag{46}$$

де

$$\sigma_1 = \sum_{\mu=1}^{r}\ \sum_{1\le u_1<\dots<u_\mu\le r} S^{(0)}_{\langle u_1,\dots,u_\mu\rangle}\,(n,r;1), \tag{47}$$

доданки з правої частини (47) мають вигляд

$$S^{(0)}_{\langle u_1,\dots,u_\mu\rangle}\,(n,r;1) = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)}\sum (n-\rho(n))!\left((n-\rho(n)-s)!\prod_{i\in I} i!\right)^{-1}$$
$$\times \sum_{\substack{s'=0\\ s'+s\ge 1}}^{\rho(n)}\sum\nolimits' (\rho(n))!\left((\rho(n)-s')!\prod_{j\in J} j!\right)^{-1},$$

символи Σ та Σ' визначені в рівності (18) з додатковою умовою

$$\sum_{i\in I_{\{u\}}} i + \rho(n) - \sum_{j\in J_{\{u\}}} j < f(n), \qquad u \in \{u_1,u_2,\dots,u_\mu\},$$

$$\sum_{i\in I_{\{u\}}} i + \rho(n) - \sum_{j\in J_{\{u\}}} j \ge f(n), \qquad u \in \{1,2,\dots,r\}\setminus\{u_1,u_2,\dots,u_\mu\},$$

і

$$\Gamma^{\{\theta_1,\dots,\theta_\mu\}}_{t,r} \ge 1, \qquad 1 \le \theta_1 < \dots < \theta_\mu \le r, \qquad \mu = 1,\dots,r; \tag{48}$$

$$\sigma_2 = \sum_{q=1}^{2^r-1} S^{(0)}_q\,(n,r;1),$$

$S^{(0)}_q\,(n,r;1)$, $1 \le q \le 2^r-1$, відрізняється від $S\,(n,r;1)$ тим, що числа $i \in I$ та $j \in J$ у правій частині рівності (18) змінюються так, що існує точно q виразів виду $\Gamma^{\{u_1,\dots,u_\nu\}}_{t,r}$, для кожного з яких

$$\Gamma^{\{u_1,\dots,u_\nu\}}_{t,r} = 0 \tag{49}$$

принаймні для одного значення параметра t, $t \in \{2,\dots,f(n)\}$, і, крім того, підсумовування Σ (Σ') здійснюється за всіма $i \in I$ ($j \in J$) такими, що $\sum_{i\in I} i = s$ ($\sum_{j\in J} j = s'$) та виконуються (19) і (21);

$$\sigma_3 = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)}\sum \frac{(n-\rho(n))!}{\left(\prod_{i\in I} i!\right)(n-\rho(n)-s)!}\sum_{s'=0}^{\rho(n)}\sum\nolimits' \frac{\rho(n)!}{\left(\prod_{j\in J} j!\right)(\rho(n)-s')!}$$

підсумовування Σ (Σ') здійснюється за всіма $i \in I$ ($j \in J$) такими, що $\sum_{i\in I} i = s$ ($\sum_{j\in J} j = s'$) і, крім того, не виконується принаймні одна з C^2_{r+1} нерівностей, визначених співвідношеннями (19) та (21).

Оцінимо σ_1. Для цього спочатку дамо оцінку для $S^{(0)}_{\langle u_1,\ldots,u_\mu\rangle}(n,r;1)$. Зазначимо, що

$$S^{(0)}_{\langle u_1,\ldots,u_\mu\rangle}(n,r;1) \le S^{(0)}_{\langle u_1\rangle}(n,r;1),$$

оскільки у правій частині нерівності відсутнє обмеження

$$\sum_{i\in I_{\{u\}}} i + \rho(n) - \sum_{j\in J_{\{u\}}} j < f(n),$$

$u \in \{u_2,\ldots,u_\mu\}$, але зберігається $\sum_{i\in I_{\{u_1\}}} i + \rho(n) - \sum_{j\in J_{\{u_1\}}} j < f(n)$. У свою чергу, суму $S^{(0)}_{\langle u_1\rangle}(n,r;1)$ можна подати так

$$S^{(0)}_{\langle u_1\rangle}(n,r;1) = \sum_{s=0}^{n-\rho(n)} C^s_{n-\rho(n)} \sum_{s_1+s_2=s} C^{s_1}_s \left\{\sum\nolimits_1 \frac{s_1!}{\prod_{i\in I_{\{u_1\}}} i!}\right\} \left\{\sum\nolimits_2 \frac{s_2!}{\prod_{i\in I\setminus I_{\{u_1\}}} i!}\right\}$$
$$\times \sum_{\substack{s'=0\\ s'+s\ge 1}}^{\rho(n)} C^{s'}_{\rho(n)} \sum_{s'_1+s'_2=s'} C^{s'_2}_{s'} \left\{\sum\nolimits'_1 \frac{s'_1!}{\prod_{j\in J_{\{u_1\}}} j!}\right\} \left\{\sum\nolimits'_2 \frac{s'_2!}{\prod_{j\in J\setminus J_{\{u_1\}}} j!}\right\}, \tag{50}$$

де Σ_1 (Σ'_1) — це сума за всіма $i \in I_{\{u_1\}}$ ($j \in J_{\{u_1\}}$) такими, що $\sum i = s_1$ ($\sum j = s'_1$), Σ_2 (Σ'_2) — це сума за всіма $i \in I\setminus I_{\{u_1\}}$ ($j \in J\setminus J_{\{u_1\}}$) такими, що $\sum i = s_2$ ($\sum j = s'_2$).

Оскільки $\left|I_{\{u_1\}}\right| = \left|J_{\{u_1\}}\right| = 2^{r-1}$, $s_1 < f(n)$, $s'_1 > \rho(n) - f(n)$, то з урахуванням (37) і (50) маємо

$$S^{(0)}_{\langle u_1\rangle}(n,r;1) \le 2^{(r-1)(n+2f(n))+3nH(p)},$$

звідки отримуємо оцінку $\sigma_1 \le 2^{r+(r-1)(n+2f(n))+3nH(p)}$, яка для $r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$ дає

$$\frac{\sigma_1}{2^{rn}}\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{51}$$

Покажемо, що

$$\frac{\sigma_2}{2^{rn}}\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{52}$$

З цією метою позначимо M_1 ($\widetilde{M}_1$) сукупність усіх i, $i \in I$, (j, $j \in J$), що не належать $I_{\{u_1,\ldots,u_\nu\}}$ ($J_{\{u_1,\ldots,u_\nu\}}$) для усіх наборів $\{u_1,\ldots,u_\nu\}$, які задовольняють (49). Тоді

$$\sigma_2 \le 2^{r+(r-1)n+r2^{r+1}f(n)+2nH(\widetilde{p})},$$

де $\widetilde{p} = \frac{2^r f(n)}{n}$. (Тут було використано твердження 1, яке для $2^{z-1} \le q \le 2^z - 1$ дає $|M_1| \le 2^{r-z} - 1$, $\left|\widetilde{M}_1\right| \le 2^{r-z} - 1$). Звідси отримуємо для $r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$ нерівність

$$\frac{\sigma_2}{2^{rn}}\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\left(\frac{1+o(1)}{2}\right)^n,$$

яка приводить до (52).

Співвідношення

$$\frac{\sigma_3}{2^{rn}}\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0 \tag{53}$$

має місце, оскільки $\sigma_3 \le \exp\left\{\left(C^2_{r+1} + rn - n\right)\ln 2\right\}$ і для $r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$

$$\frac{\sigma_3}{2^{rn}}\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\left(\frac{1+o(1)}{2}\right)^n.$$

Використовуючи умову (8), знаходимо для $r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$

$$u\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{54}$$

З урахуванням (46) подамо дріб $\frac{S^{(0)}(n,r;Q)}{2^{rn}}$ у вигляді $1 - 2^{-rn}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k + O\left(u\right)$, за допомогою якого співвідношення (44), яке підлягає перевірці, можна записати так

$$\sup_{1\le r\le (1+\alpha+\omega)\lambda^*}\left(2^{-rn}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k + O\left(u\right)\right)\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{55}$$

У свою чергу, справедливість (55) випливає безпосередньо з (51)–(54).

Внаслідок (40) та (44) для завершення перевірки умови (34) потрібно встановити, що для $1 \le r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$

$$\frac{1}{2^{rn}}\left(\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n,r;Q\right)\right)\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0. \tag{56}$$

З цією метою подамо суму $\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n,r;Q\right)$ у вигляді

$$\sum_{\Delta=1}^{2^r-1} S^{(\Delta)}\left(n,r;Q\right) = S_1 + S_2, \tag{57}$$

де $S_1 = \sum_{z=2}^{r}\sum_{\Delta\in\mathbf{G}_{1z}} S^{(\Delta)}\left(n,r;Q\right)$, $\mathbf{G}_{1z} = \left\{\Delta\colon 2^{z-1} \le \Delta < 2^z - 1\right\}$, $z = 2,3,\dots,r$, $S_2 = \sum_{z=1}^{r}\sum_{\Delta\in\mathbf{G}_{2z}} S^{(\Delta)}\left(n,r;Q\right)$, $\mathbf{G}_{2z} = \{\Delta\colon \Delta = 2^z - 1\}$, $z = 1,2,\dots,r$.

Використовуючи (43), умови (6) та (7), отримуємо для $\Delta \in \mathbf{G}_{1z}$

$$|Q| \le 2^{zN} Q_1, \tag{58}$$

де $Q_1 = \left(1 - 2^{-z}\right)^N \exp\left\{\frac{2^z-\Delta-1}{(2^z-1)(2^r-1)}u\right\}$.

Аналогічно для $\Delta \in \mathbf{G}_{2z}$ знаходимо

$$|Q| \le 2^{zN} Q_2, \tag{59}$$

де $Q_2 = \exp\left\{\frac{2^r-\Delta-1}{2^z(2^r-1)}u\right\}$.

Позначимо через M_1 ($\widetilde{M_1}$) сукупність усіх i, $i \in I$ (j, $j \in J$), що не належать I_{ω_k} (J_{ω_k}) для усіх множин ω_k, $k = 1,2,\dots,\Delta$, що задовольняють (41) та (42). Покладемо $M_2 = I \setminus M_1$, $\widetilde{M_2} = J \setminus \widetilde{M_1}$. Нехай z — найменше ціле число, для якого $\Delta \le 2^z - 1$, $1 \le z \le r$. Тоді, застосовуючи твердження 1, знаходимо

$$|M_1| \le 2^{r-z} - 1, \qquad \left|\widetilde{M_1}\right| \le 2^{r-z} - 1. \tag{60}$$

За допомогою (22) та (42) встановлюємо

$$0 \le i \le f(n) \qquad (0 \le j \le f(n)) \tag{61}$$

для усіх $i \in M_2$ ($j \in \widetilde{M_2}$).

З урахуванням (58), (60) та (61) приходимо до нерівності для $1 \le r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$

$$2^{-rn}\left|S_1\right|\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \le \frac{1+O(u)}{\sqrt{\lambda^*}}\exp\left\{-2^{-r}n\left(1 - \beta^{-1}2\ln 2 + o(1)\right)\right\},$$

звідки

$$2^{-rn}S_1\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0, \tag{62}$$

тому що $2^{-r}n \to \infty$ для зазначеного r, $\beta \ge c_0 > 2\ln 2$ згідно умови (3) та має місце (45).

Покажемо, що

$$2^{-rn}S_2\frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \to 0 \tag{63}$$

для $1 \le r \le (1+\alpha+\omega)\lambda^*$.

Нехай для $\Delta \in \mathbf{G}_{2z}$ виконуються нерівності

$$|M_1| < 2^{r-z} - 1, \qquad \left|\widetilde{M}_1\right| < 2^{r-z} - 1. \tag{64}$$

Тоді, використовуючи (59) та (61), знаходимо

$$2^{-rn} |S_2| \frac{e^{2\lambda^*}}{\sqrt{\lambda^*}} \leq \lambda^{-3/2} (1 + O(u)) \exp\left\{-2^{-r+1} n \left(1 - \beta^{-1} \ln 2 + o(1)\right)\right\},$$

звідки випливає (63).

Перевіримо, що коли $\Delta = 2^z - 1$, $1 \leq z \leq r$, і $z \in \{r-1, r\}$ або $r \in \{1, 2\}$, то існує таке k, $k \in \{1, 2, \ldots, \Delta\}$, для якого параметр ξ_k, визначений в (41), не перевищує $\xi_k \leq 2$. Дійсно, якщо $z = r$ або $r \in \{1, 2\}$, то існує, очевидно, зазначене k. Якщо $z = r - 1$, то на основі зауваження 1 існує параметр k, для якого $\xi_k \leq 2$. Оскільки для значень k, $k \in \{1, 2, \ldots, \Delta\}$, для яких $\xi_k \leq 2$, справджується нерівність $\Gamma_{t,r}^{\omega_k} \geq 1$ (внаслідок тверджень 5, 6 та умови (6)), що суперечить (42), то у подальшому запис $\Delta = 2^z - 1$ поширюється на усі z, $1 \leq z \leq r - 2$, $3 \leq r < \infty$, та значення k, для яких $\xi_k \geq 3$. Отже, нехай мають місце обмеження

$$\xi_k \geq 3, \qquad k = 1, 2, \ldots, \Delta, \quad \Delta = 2^z - 1, \quad 1 \leq z \leq r - 2, \quad 3 \leq r < \infty, \tag{65}$$

$$|M_1| = \left|\widetilde{M}_1\right| = 2^{r-z} - 1. \tag{66}$$

Згідно твердження 2, умови якого виконуються внаслідок (65) та (66), множина M_1 ($\widetilde{M}_1$) містить принаймні три елементи $i_{m_\nu} \in M_1$ ($j_{\widetilde{m}_\nu} \in \widetilde{M}_1$), $\nu = 1, 2, 3$, такі, що для деякого $k \in \{1, 2, \ldots, \Delta\}$ ($\tilde{k} \in \{1, 2, \ldots, \Delta\}$) множина ω_k ($\omega_{\widetilde{k}}$), що задіяна у співвідношенні (42), задовольняє рівностям

$$|\omega_\eta \cap m(\eta, \nu)| = 2, \qquad \nu = 1, 2, 3, \qquad |\omega_\eta \cap (a_\eta \cup b_\eta)| = 3, \qquad \eta \in \{k, \widetilde{k}\}, \tag{67}$$

для довільних $a_\eta, b_\eta \in \{m(\eta, \nu) \colon \nu = 1, 2, 3\}$, $a_\eta \neq b_\eta$, де $m(\eta, \nu) = \{m_\nu, \text{якщо } \eta = k; \widetilde{m}_\nu, \text{якщо } \eta = \widetilde{k}\}$, $\nu = 1, 2, 3$. Із (67) випливає, що $|\omega_\eta \cap a_\eta \cap b_\eta| = 1$, $\eta \in \{k, \widetilde{k}\}$, і, отже, згідно (12), (15) та нерівності $C_\alpha^t - C_{\alpha-\beta}^t \geq \beta C_{\alpha - \frac{1}{2}(1+\beta)}^{t-1}$, де α, β, t — цілі додатні, такі, що $\alpha - \beta \geq t$, встановленої в роботі [1], отримуємо

$$\Gamma_{t,r}^{\omega_\eta} \geq \gamma_t^{\{a_\eta \cap b_\eta\}} \geq t^{-1} l_* (l^* - 2^{-1}(l_* - 1)) C_{(l^*/2) + (3l_*/4) - (5/4)}^{t-2}, \tag{68}$$

де $(l_*, l^*) \in \{(i_*, i^*), (j_*, j^*)\}$, $i_* = \min\left\{i_{a_\eta}, i_{b_\eta}\right\}$, $i^* = \max\left\{i_{a_\eta}, i_{b_\eta}\right\}$,

$$j_* = \min\left\{j_{a_\eta}, j_{b_\eta}\right\}, \qquad j^* = \max\left\{j_{a_\eta}, j_{b_\eta}\right\}, \qquad \eta \in \{k, \widetilde{k}\}.$$

Якщо $i_* \geq f(n)$ та $j_* \geq f(n)$, то для $t \in \{2, \ldots, f(n)\}$ співвідношення (68) дає $\Gamma_{t,r}^{\omega_\eta} \geq 1$, що суперечить (42). Таким чином, за обмежень (65), (66) у множині M_1 ($\widetilde{M}_1$) існує принаймні один елемент $i \in M_1$ ($j \in \widetilde{M}_1$), значення якого

$$i < f(n) \qquad (j < f(n)). \tag{69}$$

Звідси отримуємо таку оцінку для S_2 за умов (59), (65), (66) та (69)

$$|S_2| \leq (1 + O(u))\, 2^{r 2^{r+1} f(n) + rn + 2nH(\widetilde{p})} \sum_{z=1}^{r-2} 2^{-zm} \left(1 - 2^{-r+z+1}\right)^n.$$

За допомогою останньої нерівності та (45) приходимо до (63).

Залишилося перевірити співвідношення (63) за умов (65), $|M_1| = 2^{r-z} - 1$, $\left|\widetilde{M}_1\right| < 2^{r-z} - 1$ та за умов (65), $|M_1| < 2^{r-z} - 1$, $\left|\widetilde{M}_1\right| = 2^{r-z} - 1$. Зазначену перевірку можна виконати аналогічно тому, як це було зроблено вище за припущеннями (64) та (65), (66).

Співвідношення (57), (62) і (63) доводять (56). Поєднуючи (40), (44) та (56), переконуємося у справедливості умови (34) твердження 7. Нерівність (33) виконується, оскільки $\gamma = 1 + \omega$ і $\omega > 0$ внаслідок (5). За допомогою (4), (9) та (39) знаходимо, що має місце (32). Усі умови твердження 7 перевірені. Звідси

$$\max_{0 \le t \le (1+\omega)\lambda^*} \left| \mathsf{P}\left\{\nu_n \ge t\right\} - \mathsf{P}\left\{Y \ge t\right\} \right| \to 0, \tag{70}$$

де $\lambda^* = M\nu_n$, Y — випадкова величина, яка має розподіл Пуассона з параметром $[\lambda]$. Оскільки випадкова величина $\frac{Y-[\lambda]}{\sqrt{[\lambda]}}$ для $\lambda \to \infty$ має стандартний нормальний розподіл, то співвідношення (70) рівносильно такому

$$\max_{-\sqrt{\lambda(1+o(1))} \le l \le \omega\sqrt{\lambda(1+o(1))}} \left| \mathsf{P}\left\{\frac{\nu_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \ge l\right\} - \mathsf{P}\left\{\frac{Y - [\lambda]}{\sqrt{[\lambda]}} \ge l\right\} \right| \to 0,$$

де $l = \frac{t-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Теорема доведена.

5. Висновки

Знайдені умови, за яких нормоване число сторонніх розв'язків сумісної системи нелінійних випадкових рівнянь з n невідомими над полем GF(2) має граничний ($n \to \infty$) нормальний розподіл. Вказані явні вирази нормуючих послідовностей.

Література

1. V. I. Masol, *Moments of the number of solutions of system of random Boolean equations*, Random Oper. Stoch. Eq. **1** (1993), no. 2, 171–179.
2. V. I. Masol and S. Y. Slobodyan, *On the asymptotic normality of the number of false solutions of a system of nonlinear random Boolean equations*, Theory Stoch. Proc. **13(29)** (2007), no. 1–2, 144–151.
3. В. И. Масол, *Теорема о предельном распределении числа ложных решений системы нелинейных случайных булевых уравнений*, Теор. вероятн. и применен. **43** (1998), № 1, 41–56.
4. В. Г. Михайлов, *Предельные теоремы для числа ненулевых решений одной системы случайных уравнений над полем GF(2)*, Теор. вероятн. и применен. **43** (1998), № 33, 598–606.
5. К. А. Рыбников, *Введение в комбинаторный анализ*, 2-е изд., МГУ, Москва, 1985.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4Г, Київ, 03127, Україна

Адреса електронної пошти: vimasol@ukr.net

Кафедра статистики і вищої математики, факультет математики та інформатики, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна

Адреса електронної пошти: slobodian_s@ukr.net

Надійшла 18/03/2013