Теорія йовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 155–160

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 155–160

# МОМЕНТНІ МІРИ ЗМІШАНИХ ЕМПІРИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ І МАРКОВАНИХ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ В КОМПАКТНИХ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ. 2

УДК 519.21

М. Г. СЕМЕЙКО

Анотація. Стаття є продовженням статті М. Г. Семейко, *Моментні міри змішаних емпіричних випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів в компактних метричних просторах. 1*, Теор. ймовір. та матем. статист. **88** (2013), 144–156. Досліджені моментні міри змішаних емпіричних випадкових маркованих точкових процесів, використовуючи твірні функції випадкових лічильних мір.

Abstract. The paper is a sequel to the paper N. G.Semejko, *Moment measures of the mixed empirical random point processes and marked point processes in compact metric spaces. 1*, Teor. Imovir. Mat. Statist. **88** (2013), 144–156. Moment measures of the mixed empirical random marked point processes are investigated using probability generating functions of the random counting measures.

Аннотация. Статья является продолжением статьи М. Г. Семейко, *Моментні міри змішаних емпіричних випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів в компактних метричних просторах. 1*, Теор. ймовір. та матем. статист. **88** (2013), 144–156. Исследованы моментные меры смешанных эмпирических случайных маркированных точечных процессов, используя производящие функции случайных считающих мер.

## 1. Основні поняття теорії змішаних емпіричних випадкових упорядкованих маркованих точкових процесів

Кожна траєкторія $E^*$ скінченного строго простого упорядкованого маркованого точкового процесу (УМТП) $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ в обмеженому просторі (ОП) $(Y = X \times K, \mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K, \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_X \odot \mathcal{B}_K)$ є розрідженою множиною (РМ) декартового добутку $Y = X \times K$ [2]. Якщо $X$ — компактний метричний простір положень з мірою $\vartheta$, метрикою $\rho_X(x_i, x_j)$ і природнім чином вибраними структурами вимірних множин $\mathfrak{A}_X$ й обмежених множин $\mathfrak{B}_X$, а простір марок $K$ є відрізком $[a, b] \subset R^1$, то кожна траєкторія $E^*$ УМТП складається із скінченної послідовності точок: $E^* = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) = ([x_1; k_1], \dots, [x_i; k_i], \dots, [x_n; k_n])$, де $y_i = [x_i; k_i]$, $x_i$ — точка положення, $k_i$ — її марка. [1] Фазовий простір $Y = X \times K$ можна зробити компактним метричним простором, якщо відстань між точками $y_i = [x_i; k_i]$, $y_j = [x_j; k_j]$, $i \neq j$, визначити за формулою: $\rho_Y([x_i; k_i], [x_j; k_j]) = \rho_X(x_i, x_j) + |k_i - k_j|$.

Розглянемо такий випадковий механізм побудови УМТП. Для цього введемо три випадкові величини: $x = x(\omega)$, $k = k(\omega)$, $\nu = \nu(\omega)$. Будемо вважати, що ці випадкові величини задовільняють такі умови:

7.1. Випадкові величини $x(\omega)$, $k(\omega)$ та цілочислова невід'ємна випадкова величина $\nu(\omega)$ визначені на основному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$;

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G55.

*Ключові слова і фрази.* Змішаний емпіричний точкових процес, маркований точковий процес, твірна функція, моментні міри.

[1] Нумерація формул першої та другої частин роботи неперервна.

7.2. Випадкові величини $x(\omega)$, $k(\omega)$ та $\nu(\omega)$ набувають відповідно значення із вибіркових ймовірнісних просторів $(X, \mathfrak{A}_X, P_x)$, $(K, \mathfrak{A}_K, P_k)$ та $(Z_+, \mathfrak{A}_{Z_+}, P_\nu)$, де

$$P_x(B_X) = \mathsf{P}\{\omega\colon x(\omega) \in B_X\} = \mu_1(B_X), \qquad B_X \in \mathfrak{A}_X,$$

$$P_k(B_K) = \mathsf{P}\{\omega\colon k(\omega) \in B_K\} = \mu_2(B_K), \qquad B_K \in \mathfrak{A}_K,$$

$$P_\nu(B_{Z_+}) = \mathsf{P}\{\omega\colon \nu(\omega) \in B_{Z_+}\}, \qquad B_{Z_+} \in \mathfrak{A}_{Z_+};$$

7.3. Розподіл $P_x(B_X)$ випадкової величини $x = x(\omega)$ вважається абсолютно неперервним відносно міри $\vartheta$ у вимірному просторі $(X, \mathfrak{A}_X)$;

7.4. розподіл $P_k(B_K)$ випадкової величини $k = k(\omega)$ вважається абсолютно неперервним відносно міри Лебега у вимірному просторі $(\mathbf{R}^1, \mathfrak{A}_{\mathbf{R}^1})$;

7.5. $x(\omega)$, $k(\omega)$ та $\nu(\omega)$ — незалежні в сукупності випадкові величини.

На $\sigma$-алгебрі борелівських множин $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_X \otimes \mathfrak{A}_K$ фазового простору $Y = X \times K$ розглянемо добуток ймовірнісних мір $P_y = P_x \otimes P_k$. Тоді $(Y, \mathfrak{A}_Y, P_y)$ можна вважати як вибірковий імовірнісний простір двовимірної випадкової величини $y(\omega) = [x(\omega); k(\omega)]$ з ймовірнісною мірою

$$\begin{aligned} P_y(B_Y) &= P_y(B_X \times B_K) = \mathsf{P}\{\omega\colon [x(\omega); k(\omega)] \in B_X \times B_K\} \\ &= \mathsf{P}\{\omega\colon x(\omega) \in B_X, k(\omega) \in B_K\} = \mathsf{P}\{\omega; x(\omega) \in B_X\}\, \mathsf{P}\{\omega\colon k(\omega) \in B_K\} \\ &= P_x(B_X) P_k(B_K) = \mu_1(B_X)\mu_2(B_K) = \mu(B_X \times B_K) = \mu(B_Y), \end{aligned}$$

де $B_Y = B_X \times B_K \in \mathfrak{E}_Y = \mathfrak{A}_Y \cap \mathcal{B}_Y$.

Нехай $G_1$ і $G_2$ — два незалежних випадкових експерименти, яким відповідають вибіркові імовірнісні простори $(X, \mathfrak{A}_X, P_x)$ і $(K, \mathfrak{A}_K, P_k)$; тоді $G = (G_1, G_2)$ — ”складений” випадковий експеримент з вибірковим ймовірнісним простором $(Y, \mathfrak{A}_Y, P_y)$. Випадково вибирається число $n \in Z_+$, а потім кожна траєкторія

$$E^* = ([x_1; k_1], \dots, [x_i; k_i], \dots, [x_n; k_n])$$

об'єма $n$ УМТП утворюється в результаті $n$ незалежних повторень одного й того ж випадкового “складеного” експерименту $G = (G_1, G_2)$, що полягає у простому випадковому виборі без повернення маркованої пари $y_i = [x_i; k_i]$, $i = 1, \dots, n$, із фазового простору $Y = X \times K$: точки положення $x_i$ із простору $X$ (експеримент $G_1$) і марки $k_i$ із простору $K$ (експернимент $G_2$).

Отже, траєкторію $E^*$ можна розглядати як реалізацію у вибірковому вимірному просторі $(Y, \mathfrak{A}_Y)$ послідовності $E^* = E^*(\omega) = (y_1(\omega), \dots, y_i(\omega), \dots, y_{\nu(\omega)}(\omega)) = ([x_1(\omega);\, k_1(\omega)], \dots, [x_i(\omega); k_i(\omega)], \dots, [x_{\nu(\omega)}(\omega); k_{\nu(\omega)}(\omega)])$, де $y_i(\omega) = [x_i(\omega); k_i(\omega)]$, випадкового об'єму $\nu(\omega)$ незалежних і однаково розподілених з ймовірнісною мірою $P_y$ випадкових елементів (випадкових двовимірних величин), визначених на основному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$.

Очевидно, випадкову величину $\nu(\omega)$ можна подати таким чином: $\nu(\omega) = N^* = N^*(E^*, Y) = \mathrm{card}[E^* \cap Y] = \sum_{y \in E^*} I_Y(y)$, де $N^*(E^*, Y)$ — випадкова величина, що визначає кількість точок множини $E^*$ в просторі $Y$, $I_Y(y)$ — характеристична функція простору $Y$.

**Означення 1.1.** Випадковий процес $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називатимемо строго простим змішаним емпіричним УМТП з незалежним маркуванням в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathcal{B}_Y)$ [2, 3].

Для заданого $n$, $N^* = n$, і довільної фіксованої обмеженої вимірної множини $B_Y = B_X \times B_K (B_X \in \mathfrak{E}_X, B_K \in \mathfrak{A}_K)$ розглянемо випадкову емпіричну лічильну міру УМТП

$$N^*(B_Y) = N^*(E^*, B_Y) = \mathrm{card}[E^* \cap B_Y] = \sum_{i=1}^{n} I_{B_Y}([x_i; k_i]).$$

При цьому лічильна міра $N^*(B_Y)$ має біноміальний закон розподілу $B(n, \mu(B_Y))$ з параметричною мірою $\mu(B_Y)$ [3]:

$$\begin{aligned} P^*\{N^*(B_Y) = k \mid N^* = n\} &= C_n^k \mu^k(B_Y)[1-\mu(B_Y)]^{n-k} \\ &= C_n^k \mu_1^k(B_X)\mu_2^k(B_K)[1-\mu_1(B_X)\mu_2(B_K)]^{n-k}, \\ & k = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{34}$$

Якщо $\left\{B_Y^j = B_X^j \times B_K^j \colon j = 1, \ldots, s, s \geq 2, \bigcup_{j=1}^s B_Y^j = Y\right\}$ — довільна скінченна послідовність обмежених вимірних множин із фазового простору $Y$, що попарно не перетинаються, $k_j \in Z_+$, $j = 1, \ldots, s$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$, то для заданого $n$, $N^* = n$, сумісний умовний розподіл лічильних мір $\{N^*(B_Y^j), j = 1, \ldots, s\}$ обчислюється за поліноміальним законом [4]:

$$P^*\left\{N^*(B_Y^j) = k_j, j = 1, \ldots, s \mid N^* = n\right\} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!} \mu^{k_1}\left(B_Y^1\right) \ldots \mu^{k_s}\left(B_Y^s\right), \tag{35}$$

де $\sum_{j=1}^s \mu(B_Y^j) = 1$.

## 2. Моментні міри змішаного емпіричного випадкового УМТП з незалежним маркуванням

Побудуємо сумісну твірну функцію випадкових лічильних мір

$$\left\{N^*(B_Y^j), j = 1, \ldots, s\right\},$$

де $\bigcup_{j=1}^s B_Y^j = Y (B_Y^i \cap B_Y^r = \varnothing, 1 \leq i, r \leq s, i \neq r)$, використовуючи сумісний умовний розподіл (35) і подібні обчислення із розділу 4 [1]:

$$\begin{aligned} \Pi_{N^*(B_Y^1), \ldots, N^*(B_Y^s)}(z_1, \ldots, z_s) &= \Pi_{N^*}(z_1\mu(B_Y^1) + \cdots + z_s\mu(B_Y^s)) \\ &= \Pi_{N^*}(z_1\mu_1(B_X^1)\mu_2(B_K^1) + \cdots + z_s\mu_1(B_X^s)\mu_2(B_K^s)). \end{aligned} \tag{36}$$

Введемо позначення мір УМТП $\mathcal{D}$: $\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = M[\{N^*(B_Y^j)\}^h]$ — моментна міра порядку $h$, $h = 1, 2, \ldots$, $\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^{j_1} \times \cdots \times B_Y^{j_h}) = M[N^*(B_Y^{j_1}) \ldots N^*(B_Y^{j_h})]$ — змішана моментна міра порядку $h$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_h \leq s$, $h = 1, \ldots, s$), $\alpha_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = M[N^*(B_Y^j)(N^*(B_Y^j) - 1) \ldots (N^*(B_Y^j) - h + 1)]$ — факторіальна моментна міра порядку $h$, $\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) = M[N^*(B_Y^{j_1})N^*(B_Y^{j_2})]$ — змішана моментна міра другого порядку, $1 \leq j_1, j_2 \leq s$, $j_1 \neq j_2$, $D(N^*(B_Y^j)) = \nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^j) - \{\nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j)\}^2$ — дисперсія лічильної міри $N^*(B_Y^j)$, $cov[N^*(B_Y^{j_1}), N^*(B_Y^{j_2})] = \nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) - \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^{j_1})\nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^{j_2})$ — коваріаційна міра залежності між лічильними мірами $N^*(B_Y^{j_1})$ і $N^*(B_Y^{j_2})$.

Проводячи обчислення, подібні до обчислень розділу 4 [1], одержимо:

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^{j_1} \times \cdots \times B_Y^{j_h}) = \mu(B_Y^{j_1}) \ldots \mu(B_Y^{j_h})\Pi_{N^*}^{(h)}(1), \tag{37}$$

$$\alpha_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = \mu^h(B_Y^j)\Pi_{N^*}^{(h)}(1), \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j) = \mu(B_Y^j)\Pi'_{N^*}(1), \tag{38}$$

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^j) = \mu^2(B_Y^j)\Pi''_{N^*}(1) + \mu(B_Y^j)\Pi'_{N^*}(1), \tag{39}$$

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) = \mu(B_Y^{j_1})\mu(B_Y^{j_2})\Pi''_{N^*}(1), \tag{40}$$

$$D(N^*(B_Y^j)) = \mu^2(B_Y^j)[\Pi''_{N^*}(1) - \{\Pi'_{N^*}(1)\}^2] + \mu(B_Y^j)\Pi'_{N^*}(1), \tag{41}$$

$$\mathrm{cov}[N^*(B_Y^{j_1}), N^*(B_Y^{j_2})] = \mu(B_Y^{j_1})\mu(B_Y^{j_2})[\Pi''_{N^*}(1) - \{\Pi'_{N^*}(1)\}^2]. \tag{42}$$

## 3. Змішаний емпіричний пуассонівський випадковий УМТП з незалежним маркуванням

**Теорема 3.1.** *Якщо*

1. *Об'єм вибірки* $\nu = \nu(\omega) = N^*$ *є випадкова величина, що розподілена по однорідному закону Пуассона з параметром* $\lambda$*;*
2. *випадкова величина* $\nu$ *незалежна від випадкових величин* $\{[x_i(\omega); k_i(\omega)] \colon i = 1, \ldots, \nu(\omega)\}$*;*
3. $N^*(B_Y) = \sum_{i=1}^{\nu} I_{B_Y}([x_i; k_i])$ *— випадкова емпірична лічильна міра УМТП;*
4. $\left\{B_Y^j = B_X^j \times B_K^j \colon j = 1, \ldots, s, s \geq 2\right\}$ *— довільна скінченна послідовність обмежених вимірних множин простору* $Y$*, що попарно не перетинаються:* $B_Y^i B_Y^j = \varnothing$ $i, j = 1, \ldots, s$, $i \neq j$,

*то:*

1*. *Лічильна міра* $N^*(B_Y^j)$, $j = 1, \ldots, s$, *емпіричного УМТП* $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ *розподілена по закону Пуассона із параметричною мірою* $\lambda\mu(B_Y^j)$*:*

$$P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j\} = \frac{[\lambda\mu(B_Y^j)]^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda\mu(B_Y^j)},$$

*де* $\mu(B_Y^j) = P_y(B_Y^j)$, $k_j = 0, 1, 2, \ldots$*;*

2*. *Лічильні міри* $\{N^*(B_Y^j), j = 1, \ldots, s\}$ *є незалежними в сукупності випадковими величинами:*

$$P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j, j = 1, \ldots, s\} = \prod_{j=1}^{s} P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j\}.$$

*Доведення.* Доведемо перше твердження, використовуючи формулу повної ймовірності і біноміальний закон розподілу (34).

$$\begin{aligned} P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j\} &= \sum_{n \geq k_j} P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j \mid N^* = n\} P^*\{N^* = n\} \\ &= \sum_{n - k_j \geq 0} \frac{n!}{k_j!\,(n-k_j)!} \mu^{k_j}(B_Y^j)[1 - \mu(B_Y^j)]^{n-k_j} \frac{\lambda^{n-k_j}\lambda^{k_j}}{n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{[\lambda\mu(B_Y^j)]^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda} \sum_{m \geq 0} \frac{[\lambda(1 - \mu(B_Y^j))]^m}{m!}, \end{aligned}$$

де $m = n - k_j$. Оскільки

$$\sum_{m \geq 0} \frac{[\lambda(1 - \mu(B_Y^j))]^m}{m!} = e^{\lambda} e^{-\lambda\mu(B_Y^j)},$$

то одержуємо

$$P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j\} = \frac{[\lambda\mu(B_Y^j)]^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda\mu(B_Y^j)}.$$

Для доведення другого твердження про незалежність в сукупності випадкових величин $\{N^*(B_Y^j), j = 1, \ldots, s\}$ використовуємо формулу повної ймовірності, поліноміальний закон розподілу (35) і вважатимемо, що $B_Y^{s+1} = \left(\bigcup_{j=1}^{s} B_Y^j\right)^c$, $k = \sum_{j=1}^{s} k_j$,

$k_{s+1} = n - k$ для $n \geq k$. Маємо

$$\begin{aligned} &P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j, j = 1, \ldots, s\} \\ &\quad = \sum_{n \geq k} P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j, j = 1, \ldots, s+1 \mid N^* = n\} P^*\{N^* = n\} \\ &\quad = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!(n-k)!} \mu^{k_1}(B_Y^1) \ldots \mu^{k_s}(B_Y^s) \mu^{n-k}(B_Y^{s+1}) \frac{\lambda^k \lambda^{n-k}}{n!} e^{-\lambda} \\ &\quad = \sum_{n-k \geq 0} \frac{n!}{k_1! \ldots k_s!(n-k)!} \mu^{k_1}(B_Y^1) \ldots \mu^{k_s}(B_Y^s) \mu^{n-k}(B_Y^{s+1}) \frac{\lambda^{k_1 + \cdots + k_s} \lambda^{n-k}}{n!} e^{-\lambda} \\ &\quad = \prod_{j=1}^{s} \frac{[\lambda\mu(B_Y^j)]^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda} \left[ \sum_{m \geq 0} \frac{[\lambda\mu(B_Y^{s+1})]^m}{m!} \right] (m = n - k). \end{aligned} \tag{43}$$

Оскільки

$$\sum_{m \geq 0} \frac{[\lambda\mu(B_Y^{s+1})]^m}{m!} = e^{\lambda\mu(B_Y^{s+1})}, \qquad \sum_{j=1}^{s+1} \mu(B_Y^j) = 1,$$

то

$$\exp\{-\lambda[(\cdot)]\} = \exp\left\{-\lambda\left(\sum_{j=1}^{s+1} \mu(B_Y^j)\right)\right\} \exp\{\lambda\mu(B_Y^{s+1})\} = \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{s} \mu(B_Y^j)\right\}. \tag{44}$$

Таким чином, якщо підставити (44) в (43) то одержуємо:

$$P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j, j = 1, \ldots, s\} = \prod_{j=1}^{s} \frac{[\lambda\mu(B_Y^j)]^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda\mu(B_Y^j)} = \prod_{j=1}^{s} P^*\{N^*(B_Y^j) = k_j\}.$$

□

**Означення 3.1.** Випадковий процес $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$, що задовольняє теоремі 9.1, називатимемо строго простим змішаним емпіричним пуассонівським УМТП з незалежним маркуванням в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathcal{B}_Y)$ [2, 3].

**Наслідок 3.1.** *Якщо випадкова величина $N^*$ розподілена по однорідному закону Пуассона з параметром $\lambda$, то, використовуючи загальні формули (37)–(42), одержуємо моментні характеристики змішаного емпіричного пуассонівського УМТП $\mathcal{D}$ з незалежним маркуванням:*

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j) = \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_X^j \times B_K^j) = \lambda\mu(B_X^j \times B_K^j) = \lambda\mu_1(B_X^j)\mu_2(B_K^j) = \nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^j)\mu_2(B_K^j),$$

*де $\nu_{\widetilde{\mathcal{D}}}^{(1)}(B_X^j) = \lambda\mu_1(B_X^j)$ — моментна міра першого порядку змішаного емпіричного пуассонівського УТП $\widetilde{\mathcal{D}}$ точок положень із розділу 5* [1],

$$\begin{gathered} \nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^{j_1} \times \cdots \times B_Y^{j_h}) = \lambda^h \mu(B_Y^{j_1}) \ldots \mu(B_Y^{j_h}) = \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^{j_1}) \ldots \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^{j_h}), \\ \lambda_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = \lambda^h \mu^h(B_Y^j) = [\nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j)]^h, \qquad \nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^j) = \lambda^2\mu^2(B_Y^j) + \lambda\mu(B_Y^j), \\ \nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) = \lambda^2 \mu(B_Y^{j_1})\mu(B_Y^{j_2}), \\ D(N^*(B_Y^j)) = \lambda\mu(B_Y^j), \qquad \mathrm{cov}[N^*(B_Y^{j_1}), N^*(B_Y^{j_2})] = 0. \end{gathered}$$

## 4. Змішаний емпіричний негативний біноміальний УМТП з незалежним маркуванням

**Означення 4.1.** Випадковий процес $\mathcal{D} = (\mathcal{E}^*, \mathfrak{X}^*, P^*)$ називатимемо строго простим змішаним емпіричним негативним біноміальним УМТП з незалежним маркуванням в ОП $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathcal{B}_Y)$, якщо об'єм вибірки $N^*$ є випадкова величина, що розподілена по негативному біноміальному закону.

Аналогічні розділу 6 [1] обчислення дають такі твірні функції:

$$\Pi_{N^*(B_Y^1),\dots,N^*(B_Y^s)}(z_1,\dots,z_s) = \left[1 + \beta \sum_{j=1}^{s} \mu(B_Y^j)(1 - z_j)\right]^{-\alpha}, \tag{45}$$

$$\Pi_{N^*(B_Y^j)}(z_j) = \left[1 + \beta\mu(B_Y^j)(1 - z_j)\right]^{-\alpha}, \qquad j = 1,\dots,s. \tag{46}$$

Тоді для сукупності обмежених вимірних множин $\{B_Y^j, j = 1,\dots,s\}$, що попарно не перетинаються і утворюють розбиття фазового простору $Y = X \times K$, використовуючи результати (37)–(42) і (45), (46) одержуємо такі моментні характеристики:

$$\nu_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^{j_1} \times \dots \times B_Y^{j_h}) = \beta^h \prod_{i=1}^{h} (\alpha + i - 1)\mu(B_Y^{j_1}) \dots \mu(B_Y^{j_h})$$
$$1 \le j_1 < \dots < j_h \le s, \qquad h = 1,\dots,s,$$
$$\alpha_{\mathcal{D}}^{(h)}(B_Y^j) = \beta^h \prod_{i=1}^{h} (\alpha + i - 1)\mu^h(B_Y^j), \qquad \nu_{\mathcal{D}}^{(1)}(B_Y^j) = \lambda\beta\mu(B_Y^j),$$
$$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^j) = \lambda\beta\mu(B_Y^j)[(\alpha + 1)\beta\mu(B_Y^j) + 1],$$
$$\nu_{\mathcal{D}}^{(2)}(B_Y^{j_1} \times B_Y^{j_2}) = \alpha(\alpha + 1)\beta^2\mu(B_Y^{j_1})\mu(B_Y^{j_2}),$$
$$D(N^*(B_y^j)) = \alpha\beta\mu(B_Y^j)[\beta\mu(B_Y^j) + 1],$$
$$\operatorname{cov}[N^*(B_Y^{j_1}), N^*(B_Y^{j_2})] = \alpha\beta^2\mu(B_Y^{j_1})\mu(B_Y^{j_2}), \qquad 1 \le j_1,\ j_2 \le s,\ j_1 \ne j_2. \tag{47}$$

Аналіз формул (45)–(47) дає можливість зробити такі висновки:

а) Лічильні міри $N^*(B_Y^1),\dots,N^*(B_Y^s)$ утворюють сукупність взаємно корельованих випадкових величин, кожна з яких розподілена по негативному біноміальному закону з параметрами $\beta\mu(B_Y^j) > 0$, $\alpha > 0$, $j = 1,\dots,s$.

б) Між лічильними мірами $N^*(B_Y^i)$ і $N^*(B_Y^r)$ існує позитивний коваріаційний зв'язок $(1 \le i, r \le s, i \ne r)$.

## Література


1. М. Г. Семейко, *Моментні міри змішаних емпіричних випадкових точкових процесів і маркованих точкових процесів в компактних метричних просторах. 1*, Теор. ймовір. та матем. статист. **88** (2013), 144–156.
2. Ю. І. Петунін, М. Г. Семейко, *Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах. 1*, Теор. ймовір. та матем. статист. **74** (2006), 98–107.
3. Ю. І. Петунін, М. Г. Семейко, *Змішані емпіричні випадкові точкові процеси в компактних метричних просторах. 2*, Теор. ймовір. та матем. статист. **75** (2006), 121–126.
4. D. I. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer-Verlag, New York, 1988.



Кафедра вищої математики, факультет управління персоналом та маркетингу, Київський Національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана, проспект Перемоги, 54/1, Київ 03680, Україна

*Адреса електронної пошти*: semejko@ukr.net


Надійшла 15/09/2011