Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 90, 2014, стор. 39–51

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 90, 2014, pp. 39–51

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ МОМЕНТУ СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ НЕОДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

УДК 519.21

В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. В даній роботі розглядаються умови за яких гарантовано існування математичного сподівання моменту склеювання для двох незалежних, дискретних, неоднорідних за часом ланцюгів Маркова. Розглядаються дискретні ланцюги з фазовим простором $\{0, 1, \dots\}$, та під моментом склеювання розуміється перший момент одночасного потрапляння в нуль обох ланцюгів. Також розглянуто декілька спеціальних випадків за яких можна отримати оцінку математичного сподівання моменту склеювання.

Abstract. In this paper, we consider conditions which satisfy finitness of the expectation of the first coupling moment for two independent, discrette, time-inhomogeneous Markov chains. We consider discrette chains with a phase space $\{0, 1, \dots\}$, and by the coupling moment we understand first moment of the simultanious visit the zero state for the both chains. Special cases designed for practical use, giving estimates of the coupling moment expectation are also included.

Аннотация. В даной работа рассматриваются условия при которых гарантировано существует конечное математическое ожидание момента склеивания для двух независимых, дискретных, неоднородных по времени цепей Маркова. Рассматриваются дискретные цепи с пространством состояний $\{0, 1, \dots\}$, и под моментом склеивания мы понимаем первый момент одновременного попадания в нулевое состояние обеих цепей. Также представлено несколько частных случаев при которых можно получить оценки математического ожидания момента склеивания пригодные к практическому использованию.

1. Вступ

В даній роботі розглядається питання практичного застосування теоретичних результатів викладених в статті [27]. Представлено декілька наслідків до теореми 5.1 з роботи [27], які дозволяють отримувати практичні умови на існування скінченого математичного сподівання моменту склеювання для двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова. За допомогою отриманих теорем виведено подібні результати для кількох конкртених ланцюгів Маркова.

Для однорідних ланцюгів Маркова, в даній роботі представлений більш сильний результат, а саме теорема 4.4. Ця теорема, дещо ослабляє умову сильної неперіодичності $g_1^1 + g_1^2 > 0$, за якої доведено аналогічний результат в роботі [31]. Теорема доведена в даній роботі показує, що для однорідних процесів відновлення, за умови існування других моментів, та дещо слабшої умови неперіодичності (порівняно з умовою $g_1^1 + g_1^2 > 0$), стала, що фігурує в оцінці моменту склеювання може бути легко обчислена.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.
Ключові слова і фрази. Coupling theory, coupling method, maximal coupling, discrete Markov chains, stability of distributions, дискретні ланцюги Маркова, стійкість розподілів, метод склеювання, теорія склеювання.

2. Умови існування скінченого математичного сподівання для моменту склеювання

В роботі [27] була доведена наступна теорема (теорема 5.1). Для зручності наводимо її формулювання, та основні позначення:

Розглядаємо два неоднорідних ланцюги Маркова $(X_t^1, t \geq 0)$ та $(X_t^2, t \geq 0)$, зі значеннями в просторі $E = \{0, 1, \dots\}$. Ланцюги задаються своїми перехідними ймовірностями на s-тому кроці $P_s(x, A, 1)$, $P_s(x, A, 2)$ — відповідно для ланцюгів X_t^1, X_t^2. Визначимо ймовірності переходу за $n > 0$ кроків:

$$P^{t,n}(x, A, l) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{t+k} \right) (x, A, l). \tag{1}$$

Маючи даний набір перехідних ймовірностей, а також початкові розподіли $\mu^l(\cdot)$ можна побудувати ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ на якому визначено незалежні ланцюги (X_t^l), $l \in \{0, 1\}$, і крім того:

$$\mathsf{P}\{X_s^l \in A\} = \int_E \mu^l(dx) P^{0,s}(x, A, l), \qquad \mathsf{P}\left\{X_{s+1}^l \in A \mid X_s^l = x\right\} = P_s(x, A, l).$$

Визначимо послідовності інтервалів відновлення (θ_k^l), $l \in \{0, 1\}$:

$$\theta_0^l = \inf\{t \geq 0 \colon X_t = 0\}, \qquad \theta_m^l = \inf\{t > \theta_{m-1} \colon X_t = 0\},\ m > 1, \tag{2}$$

заданих на спільному ймовірносному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Класи величин $\{\theta_k^1\}_{k \geq 0}$ та $\{\theta_k^2\}_{k \geq 0}$ незалежні. θ_k^l для кожного $l = 1, 2$ та $k > 0$ приймають цілі доданті значення, та цілі невід'ємні для θ_0^l. Визначимо послідовності відновлення наступним чином:

$$\tau_n^l = \sum_{k=0}^{n} \theta_k^l, \qquad l = 1, 2. \tag{3}$$

Вважаємо, що сусідні величини всередині кожного класу є умовно незалежними (обгрунтування цього можна знайти в статті [27, ст. 2–5]) при фіксованому τ, тобто для всіх k, t, l виконана наступна рівність:

$$\mathsf{E}\left[f(\theta_k^l) g(\theta_{k+1}^l) \mid \tau_k^l\right] = \mathsf{E}\left[f(\theta_k^l) | \tau_k^l\right] \mathsf{E}\left[g(\theta_{k+1}^l) \mid \tau_k^l\right], \tag{4}$$

для довільних обмежених борельових функцій f та g.

Введемо позначення для умовного розподілу величин θ_k^l (даний розподіл не залежить від k):

$$g_n^{t,l} = \mathsf{P}\{\theta_k^l = n \mid \tau_{k-1} = t\}, \qquad l = 1, 2,\ n \geq 0, \tag{5}$$

будемо вважати, що $g_0^{t,l} = \mathsf{P}\{\theta_k^l = 0 \mid \tau_{k-1} = t\} = 0$. Величини θ_k^l, $k \geq 1$, будемо інтерпритувати як крок відновлення, а θ_0^l — як затримку.

Будемо казати, що $T > 0$ це момент склеювання, якщо:

$$T = \min\left\{t > 0 \colon \exists m, n \colon t = \tau_m^1 = \tau_n^2\right\}. \tag{6}$$

Наша мета — знайти умови за яких $T < \infty$ майже напевно, або $\mathsf{E}[T] < \infty$.

Через $u_n^{(t,l)}$ позначимо послідовність відновлення, для процесу τ^l. Іншими словами, $u_n^{(t,l)}$ — це ймовірність того, що в момент часу $t + n$ відбулось відновлення за умови що відновлення відбулось в момент часу t. Формально $u_n^{(t,l)}$ визначається наступним чином:

$$u_0^{(t,l)} = 1, \qquad u_n^{(t,l)} = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(t,l)} g_{n-k}^{t+k,l}. \tag{7}$$

3. Строге визначення величин $\theta^l(t)$

Як ми бачили раніше розподіл $(k+1)$-го інтервалу відновлення повністю визначається значенням величини τ_k, тобто моментом коли відбулось попереднє відновлення і не залежить від індексу k. Тому ми і ввели позначення $g_n^{t,l}$, та $u_n^{(t,l)}$. Наша мета визначити випадкові величини $\theta^l(t)$ та похідні від них так, щоб $g_n^{t,l}$ був розподілом $\theta^l(t)$.

В цьому розіділі будемо опускати індекс l. Припустимо X_t деякий неоднорідний ланцюг Маркова, з перехідними ймовірностями на t-тому кроці $P_t(x,A)$, як і раніше визначимо:

$$P^{t,n}(x,A) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} P_{t+k}\right)(x,A),$$

перехідну ймовірність за час від t до $t+n$.

Для кожного t визначимо ймовірнісний простір $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_t)$, як канонічний простір для ланцюга Маркова X_{t+n}, що стартує з нуля (тобто початкова міра зосереджена в нулі). Тоді, позначимо:

$$\theta(t) = \min\{j > 0 \colon X_{t+j} = 0\}. \tag{8}$$

Позначимо $g_n^t = \mathsf{P}_t\{\theta(t) = n\}$ — розподіл величини $\theta(t)$. Тоді:

$$g_n^t = \int_{(E\setminus\{0\})^{n-1}} P_t(0,dx_0)\, P_{t+1}(x_0,dx_1)\dots P_{t+n-1}(x_{n-1},\{0\}). \tag{9}$$

Як і в попередньому розіділі визначимо $\theta^l(t)$ як момент першого повернення в нуль для ланцюга $(X^l_{t+k}, k \ge 0)$, що стартує з нуля, тоді величина $\theta^l(t)$ має розподіл $(g_n^{t,l})_{n\ge 0}$.

Визначимо недострибок:

$$D_n(t) = \min\{j \ge 0 \colon X_{t+n+j} = 0\}. \tag{10}$$

Величину $D_n(t)$ слід розуміти як час, що залишився до попадання в $\{0\}$ після моменту $t+n$, якщо відомо, що $X_t = 0$. Зауважимо, що $D_n(t)$, $\theta(t)$ визначені на спільному просторі $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathsf{P}_t)$.

Для доведення основної теореми ключове значення відіграватиме наступне твердження (яке буде доведено пізніше):

Лема 3.1. *Якщо сім'я розподілів g_n^t (або випадкових величин $\theta(t)$) є рівномірно інтегровною, то для кожного $\rho \in (0,1)$ знайдеться стала $C = C(\rho) \ge 0$, така, що для кожного t виконується наступна нерівність:*

$$\mathsf{E}_t[D_n(t)] \le \rho n + C.$$

Теорема 3.1. *Нехай в означеннях введених вище,*

1) Набір випадкових величин $\theta^l(t)$ є рівномірно інтегровним (або іншими словами сім'я ймовірнісних мір $g_n^{t,l}$ є рівномірно інтегровною).

2) Існують така стала $\gamma > 0$ та натуральне число $n_0 > 0$, що для всіх t, l та $n \ge n_0$: $u_n^{(t,l)} \ge \gamma$.

Тоді момент склеювання є інтегровним:

$$\mathsf{E}[T] < \infty$$

4. Наслідки з теореми 3.1

Наслідок 4.1. *Нехай X_t, X'_t два однорідних неперіодичних ланцюги Маркова такі що:*

$$\max\{\mathsf{E}[\theta_0], \mathsf{E}[\theta'_0], \mathsf{E}[\theta_1], \mathsf{E}[\theta'_1]\} < \infty.$$

Тоді $\mathsf{E}[T] < \infty$.

Доведення. Оскільки розподіли всіх θ_k, $k \geq 1$ однакові, так як і розподіли θ'_k, $k \geq 1$ то серед розподілів $g_n^{t,l}$ не більше чотирьох різних, а тому дана сім'я рівномірно інтегровна.

Оскільки ланцюги неперіодинчі та мають скінчені моменти повернення, то за теоремою відновлення $u_n \to 1/\,\mathsf{E}[\theta_1] > 0$, $u'_n \to 1/\,\mathsf{E}[\theta'_1] > 0$, $n \to \infty$. Отже обидві послідовності відділені від нуля починаючи з деякого номеру.

Таким чином виконані умови теореми 3.1. □

Зауваження 4.1. Перевіряти умови теореми 3.1 на практиці може бути технічно досить складно. Тому доцільно розглянути деякі спеціальні випадки, які простіше перевіряти і які гарантуватимуть виконання умов теореми 3.1.

Наступні декілька теорем дають умови за яких виконана умова (2) теореми 3.1. Варто зауважити, що фрагмент доведення наступних двох теорем повторює ідею доведення відповідного твердження з монографії [3].

Теорема 4.1. *Нехай θ_n — послідовність відновлення, що породжена неоднорідним ланцюгом Маркова, і $(g_n^{(t)})$ — сім'я її умовних розподілів. Нехай також виконані наступні умови:*

1. Існує такий набір з m номерів $l_1, \ldots, l_m$, з НСД $= 1$, що

$$\inf_{t,i} g_{l_i}^{(t)} > 0.$$

2. Послідовність θ_n стохастично мажорована, $G_n^{(t)} \leq \hat{G}_n \to 0$, $n \to \infty$, причому $\hat{g}_{l_1} > 0$ та існує скінчений момент $\hat{\mu} = \sum_{n\geq 0} \hat{G}_n$.

Тоді існує такий номер n_0, та стала $\gamma > 0$, що для всіх $n \geq n_0$, $t > 0$, що $u_n^{(t)} > \gamma$.

Теорема 4.2. *Нехай в позначеннях теореми 3.1*

a) Існує таке n_0, що для довільних t, l та $n \geq n_0$: $g_n^{(t,l)} > 0$.

b) Існують такі $\gamma_i > 0$, $i = \overline{0, n_0 - 1}$, що для кожних t, l — $g_{n_0+i}^{(t,l)} \geq \gamma_i$, для кожного $i = \overline{0, n_0 - 1}$.

Тоді виконана умова (2) *теореми 3.1*

Наслідок 4.2. *Нехай $(\hat{g}_n)$ — стохастична мажоранта для сім'ї розподілів $(g_n^{t,l})$, тобто $G_n^{t,l} \leq \hat{G}_n$. Якщо $\hat{g}_1 > 0$, то виконана умова* (2) *теореми 3.1, з $n_0 = 1$.*

Теорема 4.3. *Якщо серед розподілів $\{(g_n^{t,l}, n \geq 0)\}$ лише скінчена кількість різних, причому кожен розподіл неперіодичний, тоді виконана умова* (2) *теореми 3.1, з деяким n_0.*

Щодо умови рівномірної інтегровності існує декілька загальновідомих умов які забезпечують рівномірну інтегровність сім'ї випадкових величин. Зокрема:

1) Сім'я θ_n рівномірно інтегровна тоді і лише тоді θ_n стохастично мажоровані деякою величиною ζ зі скінченим математичним сподіванням.

2) Якщо $\sup_n \mathsf{E}[\theta_n^p] < \infty$, для деякого $p > 1$, то сім'я θ_n рівномірно інтегровна. Для перевірки скінченості моментів на практиці можна використовувати метод пробних функцій.

Наступна теорема містить значно сильніші умови ніж були до цього, але натомість дає оцінку математичного сподівання моменту склеювання:

Теорема 4.4. *Розглянемо два однорідні, незалежні, неперіодичні процеси відновлення $\theta^{(l)}$, $l \in \{1, 2\}$. Припустимо виконання наступних умов:*

1) *Існують скінчені другі моменти $\mu_2^{(l)}$,*

2) *Існують такі $\gamma > 0$, та n_0, що для всіх l та $n > n_0$: $u_n^{(l)} \geq \gamma$.*

Тоді:

$$\mathsf{E}[T] \le \mathsf{E}\left[\max(\theta_0^1, \theta_0^2)\right] + \gamma^{-1} \max\left\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right\}.$$

Зауваження 4.2. Зауважимо, що з умов теореми 4.4 випливають умови 3.1, однак доведення теореми 4.4 суттєво відрізняється від доведення теореми 3.1, використовуючи нерівність Дейлі, аналога якої для неоднорідного випадку немає (тому теорема сформульована лише для однорідного випадку).

5. Приклади застосувань для однорідних ланцюгів Маркова

Обернений ланцюг відновлення. Розглянемо спочатку два однорідних ланцюги Маркова, що задаються наступними перехідними матрицями:

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & 1-b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & 0 & 1-b_1 & 0 & \dots \\ b_2 & 0 & 0 & 1-b_2 & \dots \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & 1-b_3 \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} c_0 & 1-c_0 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & 0 & 1-c_1 & 0 & \dots \\ c_2 & 0 & 0 & 1-c_2 & \dots \\ c_3 & 0 & 0 & 0 & 1-c_3 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Обчислимо послідовності G_n^l, g_n^l:

$$G_n^1 = \prod_{k=0}^{n-1}(1-b_k), \qquad G_n^2 = \prod_{k=0}^{n-1}(1-c_k), \quad n \ge 1,$$

$$g_1^1 = b_0, \qquad g_n^1 = \prod_{k=0}^{n-2}(1-b_k)b_{n-1}, \quad n \ge 2,$$

$$g_1^2 = c_0, \qquad g_n^2 = \prod_{k=0}^{n-2}(1-c_k)c_{n-1}, \quad n \ge 2.$$

Обчислимо m_j^l — математичне сподівання часу досягнення стану 0 з точки j.

$$m_j^1 = 1 + \sum_{k\ge1}\prod_{i=0}^{k-1}(1-b_{j+i}),\ m_j^2 = 1 + \sum_{k\ge1}\prod_{i=0}^{k-1}(1-c_{j+i}).$$

Обчислимо другі момент повернення в нуль:

$$m^{1,2} = b_0 + \sum_{n\ge2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}(1-b_k)b_{n-1}, m^{2,2} = c_0 + \sum_{n\ge2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}(1-c_k)c_{n-1}.$$

Тепер ми готові сформулювати різні умови за яких будуть скінченими математичні сподівання моменту склеювання.

Теорема 5.1. *Нехай незалежні ланцюги X_n, X_n' з перехідними ймовірностями P, Q знаходяться в початкових станах l, j відповідно. Нехай виконані наступні умови:*

1) $b_n > 0$, $c_n > 0$, $n \ge 1$.
2) $\max\{m_l^1, m_j^2, m_0^l\} < \infty$.

Тоді існує інтегровний момент спільного потрапляння в нуль: $\mathsf{E}[T] < \infty$.

Доведення. Умова (1) гарантує неперіодичність ланцюгів X та X', а умова (2) скінченість моментів θ_j^l, $j \geq 0$. Таким чином за наслідком до теореми 3.1, отримаємо скінченість математичного сподівання моменту склеювання. □

Зауваження 5.1. Зазначимо, що теорема 5.1 не вимагає $b_0 > 0$, або $g_1^l > 0$.

Якщо посилити умови даної теоерми до існування других моментів, то можна отримати оцінку математичного сподівання моменту склеювання:

Теорема 5.2. *Нехай незалежні ланцюги X_n, X'_n з перехідними ймовірностями P, Q знаходяться в початкових станах l, j відповідно. Нехай виконані наступні умови:*

1) $b_n > 0$, $c_n > 0$, $n \geq 1$.
2) $max\{m_l^1, m_j^2, m^{l,2}\} < \infty$.

Тоді має місце наступна нерівність для моменту склеювання:

$$\mathsf{E}[T] < m_l^1 + m_j^2 + \gamma^{-1} \max\left\{\frac{m^{1,2}}{m_0^1}, \frac{m^{2,2}}{m_0^2}\right\},$$

де

$$\gamma = \gamma_0 (1 - \hat{G}_1)^{\frac{\max\left\{m_0^1, m_0^2\right\} - \hat{G}_1}{\hat{G}_1}},$$

$\hat{G}_1 = \max\{G_1^1, G_1^2\}$, $\gamma_0 = \min\{(1-b_0)b_1, (1-b_0)(1-b_1)b_2, (1-c_0)c_1, (1-c_0)(1-c_1)c_2\}$.

Доведення. Скористаємось теоремою 4.4.

Спочатку помітимо, що:

$$\mathsf{E}[\max\{\theta_0^1, \theta_0^2\}] \leq \mathsf{E}[\theta_0^1] + \mathsf{E}[\theta_0^2] = m_l^1 + m_j^2.$$

Для завершення слід перевірити умову (2) теореми 4.4.
Для цього скористаємось теоремою 4.2. Для цього покажемо, що $\min\{g_2^l, g_3^l\} > 0$, дійсно:

$$g_2^1 = (1-b_0)b_1, \qquad g_3^1 = (1-b_0)(1-b_1)b_2, \qquad g_2^2 = (1-c_0)c_1, \qquad g_3^3 = (1-c_0)(1-c_1)c_2.$$

Тоді з умови (1) даної теореми випливає $\gamma_0 = \min\{g_2^l, g_3^l\} > 0$. Вираз для γ випливає з теореми 4.2. □

Зауваження 5.2. Зауважимо, що оцінки для моментів стають особливо простими якщо існує деяке $\gamma > 0$, що $b_n > \gamma$, $c_n > \gamma$. Однак за цієї умови можна скористатися більш сильною теоремою, що викладена в статті [28].

Зауваження 5.3. В роботі [31], доведена теорема аналогічна до теореми 4.4, за умови $g_1^1 + g_1^2 > 0$. Теорема 4.4 дещо послаблює умови теореми зі статті [31], припускаючи, що обидві величини g_1^1, g_1^2 можуть бути рівними нулю, приклад чого ми побачили в теоремі 5.2. Варто зазначити, що оцінки моменту склеювання в роботі [31] та теоремі 4.4 дуже схожі.

Випадкове блукання. Розглянемо два однорідних ланцюги Маркова, що задаються наступними перехідними матрицями:

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ 0 & p & 0 & 1-p & \dots \\ 0 & 0 & p & 0 & 1-p \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} q & 1-q & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 1-q & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & 1-q & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & 1-q \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Обчислимо ймовірності першого повернення в нуль. Для цього скористаємось теоремою 2, ст. 86 з [2].

$$g_1^1 = p, \qquad g_{2n}^1 = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} p^n (1-p)^n, \quad n \geq 1,$$

$$g_1^2 = 1, \qquad g_{2n}^1 = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} q^n (1-q)^n, \quad n \geq 1.$$

Обчислимо моменти повернення в нуль:

$$m_0^1 = p + 2p(1-p)\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n,$$

$$m_0^2 = 1 + 2q(1-q)\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n} q^n (1-q)^n.$$

Обчислимо тепер момент попадання в нуль з деякого стану $j > 0$. Для цього порахуємо кількість шляхів що не проходять через 0, зі стану j в 0 за час n. Зауважимо, що кількість таких шляхів рівна кількості шляхів, що не проходять через 0, з 0 в j за час n, а за теоремою 1, ст 85 з [2] вона рівна: $\frac{j}{n}\binom{n}{(n+j)/2}$ Тоді:

$$m_j^1 = j\sum_{k\geq j}\binom{k}{(k+j)/2} p^{(k+j)/2}(1-p)^{(k-j)/2},$$

$$m_j^2 = j\sum_{k\geq j}\binom{k}{(k+j)/2} q^{(k+j)/2}(1-q)^{(k-j)/2}.$$

І нарешті запишемо вирази для других моментів повернення в нуль:

$$m_0^{1,2} = p + 2p(1-p)\sum_{n\geq 0}(n+1)\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n,$$

$$m_0^{2,2} = 1 + 2q(1-q)\sum_{n\geq 0}(n+1)\binom{2n}{n} q^n (1-q)^n.$$

Теорема 5.3. *Нехай X та X' — два ланцюги Маркова з перехідними ймовірностями P та Q, для яких $p > 1/2$ та $q > 1/2$. Тоді існує інтегровний момент склеювання для цих ланцюгів, що стартують зі станів i, та j відповідно, причому має місце наступна оцінка:*

$$\mathsf{E}[T] \leq m_i^1 + m_j^1 + \gamma^{-1}\max\left\{\frac{m^{1,2}}{m_0^1}, \frac{m^{2,2}}{m_0^2}\right\}.$$

Де в якості γ можна вибрати $\min\{1/m_0^1, 1/m_0^2\} - \delta$, для довільного $\delta > 0$

Доведення. Покажимо, що за умови $p > 1/2$ існують перші та другі моменти, для цього скористаємось еквівалентністю:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

тоді $4p(1-p) < 1$, а отже ряд m_0^1 еквівалентний геометричному, а тому збіжний.

Аналогічно можна показати скінченість других моментів.

Отже всі математичні сподівання для обох ланцюгів існують. Неперіодичність випливає з того факту, що $g_1^l > 0$.

В якості γ можна вибрати $\min\{\frac{1}{m_0^1}, \frac{1}{m_0^2}\} - \delta$, для довільного $\delta > 0$. Тоді з теореми відновлення випливативе, що всі u_n^l будуть більшими за γ починаючи з деякого номеру. □

6. Приклади застосувань для неоднорідних ланцюгів Маркова

В цьому розділі розглянемо неоднорідні аналоги прикладів з попередніх розділів.

Обернений ланцюг відновлення. Розглянемо два неоднорідних ланцюга Маркова, що задаються наборами матриць перехідних ймовірностей на t-тому кроці:

$$P_t = \begin{pmatrix} b_0^{(t)} & 1-b_0^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ b_1^{(t)} & 0 & 1-b_1^{(t)} & 0 & \dots \\ b_2^{(t)} & 0 & 0 & 1-b_2^{(t)} & \dots \\ b_3^{(t)} & 0 & 0 & 0 & 1-b_3^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} c_0^{(t)} & 1-c_0^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ c_1^{(t)} & 0 & 1-c_1^{(t)} & 0 & \dots \\ c_2^{(t)} & 0 & 0 & 1-c_2^{(t)} & \dots \\ c_3^{(t)} & 0 & 0 & 0 & 1-c_3^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Обчислимо послідовності $G_n^{t,l}$, $g_n^{t,l}$, як і в однорідному випадку їх можна обчислити явно:

$$G_n^{t,1} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-b_k^{(t+k)}\right), \qquad G_n^{t,2} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1-c_k^{(t+k)}\right), \qquad n \geq 1,$$

$$g_1^{t,1} = b_0^{(t)}, \qquad g_n^{t,1} = \prod_{k=0}^{n-2}\left(1-b_k^{(t+k)}\right) b_{n-1}^{t+n-1}, \quad n \geq 2,$$

$$g_1^{t,1} = c_0^{(t)}, \qquad g_n^{t,2} = \prod_{k=0}^{n-2}\left(1-c_k^{(t+k)}\right) c_{n-1}^{(t+n-1)}, \quad n \geq 2.$$

Обчислимо m_j^l — математичне сподівання часу досягнення стану 0 з точки j.

$$m_j^{t,1} = 1 + \sum_{k\geq 1}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-b_{j+i}^{(t+i)}\right), \qquad m_j^{t,2} = 1 + \sum_{k\geq 1}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-c_{j+i}^{(t+i)}\right).$$

Зауважимо, що в неоднорідному випадку теорема про оцінку математичного сподівання моменту склеювання не доведена, і окрім того для того щоб гарантувати скінченість цього мат. сподівання треба перевіряти більш складні умови теореми 3.1. В нашому випадку для перевірки рівномірної інтегровності скористаємось тим фактом, що послідовність рівномірно інтегровна, якщо другі моменти рівномірно обмежені. Тому як і раніше обчислимо другі моменти:

Другі момент повернення в нуль:

$$m^{1,2,t} = b_0^{(t)} + \sum_{n\geq 2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}\left(1-b_k^{(t+k)}\right) b_{n-1}^{(t+n-1)},$$

$$m^{2,2,t} = c_0^{(t)} + \sum_{n\geq 2} n^2 \prod_{k=0}^{n-2}\left(1-c_k^{(t+k)}\right) c_{n-1}^{(t+n-1)}.$$

Тепер ми готові сформулювати теорему про скінченість математичного сподівання моменту склеювання:

Теорема 6.1. *Нехай незалежні, та неоднорідні за часом ланцюги Маркова X_n, X'_n з перехідними ймовірностями на t-тому кроці P_t, Q_t знаходяться в початкових станах l, j відповідно. Нехай виконані наступні умови:*

1) $\inf_{t,n}\{b_n^{(t)}, c_n^{(t)}\} > 0$, $n \geq 1$.
2) $\sup\{m_l^{t,1}, m_j^{t,2}, m_0^{t,l}, m^{l,2,t}\} < \infty$.

Тоді існує скінчене математичне сподівання моменту спільного потрапляння в нуль: $\mathsf{E}[T] < \infty$.

Доведення. Умова (1) гарантує відділеність від нуля величин $g_n^{t,l}$, $n \geq 2$, а отже за теоремою 4.1 виконана умова (2) теореми 3.1. Умова (2) даної теореми, гарантує рівномірну інтегровність розподілів $g_n^{t,l}$.

Таким чином за теоремою 3.1, математичне сподівання моменту першого попадання в нуль скінчене. □

Зауваження 6.1. Зазначимо, що як і раніше, ми не вимагаємо $b_0^{(t)} > 0$, або $g_1^{t,l} > 0$.

Випадкове блукання. Розглянемо два неоднорідних ланцюги Маркова, що задаються наступними матрицями перехідних ймовірностей на t-тому кроці:

$$P_t = \begin{pmatrix} p^{(t)} & 1-p^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ p^{(t)} & 0 & 1-p^{(t)} & 0 & \dots \\ 0 & p^{(t)} & 0 & 1-p^{(t)} & \dots \\ 0 & 0 & p^{(t)} & 0 & 1-p^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix},$$

$$Q_t = \begin{pmatrix} q^{(t)} & 1-q^{(t)} & 0 & 0 & \dots \\ q^{(t)} & 0 & 1-q^{(t)} & 0 & \dots \\ 0 & q^{(t)} & 0 & 1-q^{(t)} & \dots \\ 0 & 0 & q^{(t)} & 0 & 1-q^{(t)} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що в даному випадку ймовірності розподіл послідовності відновлення явно обчислити не можна. Але за певних умов його, а також математичні сподівання моментів повернення в нуль можна оцінити, що і зроблено в наступній теоремі:

Теорема 6.2. *Нехай X та X' — два неоднорідних за часом ланцюги Маркова з перехідними ймовірностями на t-тому кроці P_t та Q_t, для яких існують $p > 1/2$, $q > 1/2$, що $p^{(t)} \geq p$ та $q^{(t)} \geq q$. Тоді існує скінчений момент склеювання для цих ланцюгів, що стартують зі станів i, та j відповідно:*

$$\mathsf{E}[T] < \infty.$$

Доведення. Зауважимо, що якщо $p^{(t)} \geq p > 1/2$, то $p^{(t)}(1-p^{(t)}) < p(1-p)$, тому мають місце наступні оцінки:

$$g_1^{t,1} = p^{(t)}, \qquad g_{2n}^{t,1} \leq \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} p^n(1-p)^n, \quad n \geq 1,$$

$$g_1^{t,2} = 1, \qquad g_{2n}^{t,1} \leq \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} q^n(1-q)^n, \quad n \geq 1.$$

Оцінимо моменти повернення в нуль:

$$m_0^{t,1} \le p + 2p(1-p)\sum_{n\ge 0}\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n,$$

$$m_0^{t,2} \le 1 + 2q(1-q)\sum_{n\ge 0}\binom{2n}{n}q^n(1-q)^n.$$

Обчислимо тепер момент попадання в нуль з деякого стану $j>0$. Для цього порахуємо кількість шляхів що не проходять через 0, зі стану j в 0 за час n. Зауважимо, що кількість таких шляхів рівна кількості шляхів, що не проходять через 0, з 0 в j за час n, а за теоремою 1, ст 85 з [2] вона рівна: $\frac{j}{n}\binom{n}{(n+j)/2}$ Тоді:

$$m_j^{t,1} \le j\sum_{k\ge j}\binom{k}{(k+j)/2}p^{(k+j)/2}(1-p)^{(k-j)/2},$$

$$m_j^{t,2} \le j\sum_{k\ge j}\binom{k}{(k+j)/2}q^{(k+j)/2}(1-q)^{(k-j)/2}.$$

І нарешті запишемо оцінки для других моментів повернення в нуль:

$$m_0^{1,2,t} = p + 2p(1-p)\sum_{n\ge 0}(n+1)\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n,$$

$$m_0^{2,2,t} = 1 + 2q(1-q)\sum_{n\ge 0}(n+1)\binom{2n}{n}q^n(1-q)^n.$$

Скориставшись еквівалентністю:

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

а також тим, що $4p(1-p)<1$, отримаємо рівномірну обмеженість других моментів, а отже і рівномірну інтегровність.

З умови $p^{(t)} \ge p > 1/2$ випливає, що $g_1^{t,1} > 1/2$, а з умови $q^{(t)} \ge q > 1$, що $g_1^{t,2} > 1/2$. Отже за наслідком до теореми 4.2 отримаємо виконання умови (2) теореми 3.1.

Враховуючи доведену вище рівномірну інтегровність, отримаємо скінченість математичного сподівання моменту спільного попадання в нуль. □

7. Доведення інших теорем

Доведення теоерми 4.1. Має місце наступне твердження з теорії чисел: якщо числа $l_1,\dots,l_m$ — взаємно прості, то існує такий номер n_1, що довільне $n\ge n_1$ зображується у вигляді суми $n=\sum_{k=1}^m a_k l_k$, де a_k деякі натуральні числа. А це означає, що для кожного $n\ge n_1$: $u_n^{(t)} \ge \prod_{k=1}^m \big(g_{l_k}^{(t)}\big)^{a_k} > 0$.

Також з умови випливає, що існує такий номер l, що $\inf_t g_l^{(t)} > 0$, не втрачаючи загальності вважаємо $l<n_1$.

Позначимо, через $\gamma_0 := \inf_t \min\big\{u_n^{(t)}, n_1 < n \le n_1 + l\big\} > 0$.

Тоді маємо:

$$u_{n_1+l+1}^{(t)} = \sum_{n=0}^{n_1+l+1} g_n^{(t)} u_{n_1+l+1-n}^{(t+n)} \ge \sum_{n=0}^{l} g_n^{(t)} u_{n_1+l+1-n}^{(t+n)} \ge \gamma_0(1-G_l^{(t)}) \ge \gamma_0(1-\hat{G}_l).$$

Отже для кожного $t>0$ та $n>n_1+l$, маємо:

$$u_n^{(t)} \ge \gamma_0 \prod_{n\ge l}(1-\hat{G}_n).$$

Розглянемо функціонал $F(G) = \prod_{n\geq l}(1-G_l)$, що заданий на послідовностях G_n, $n \geq l$, що задовільняють умовам:

1) G_n спадає до нуля,
2) $0 \leq G_n \leq \hat{G}_l$,
3) $\sum_{n\geq l} G_l = \hat{\mu} - \hat{G}_{l-1}$.

Цей функціонал є угнутим, а множина допустимих G — опукла, а отже фунціонал має інфімум на крайових точках, отже

$$\inf_G F(G) = (1-\hat{G}_l)^{\frac{\hat{\mu}-\hat{G}_l}{\hat{G}_l}}.$$

Тоді $\gamma = \gamma_0(1-\hat{G}_l)^{\frac{\hat{\mu}-\hat{G}_l}{\hat{G}_l}}$ — і є шуканим γ. □

Доведення теореми 4.2. Доведення проведемо за індукцією, починаючи з $2n_0$.

$$u_{2n_0}^{(k)} \geq \left(g_{n_0}^{(k)}\right)^2 > \gamma_0^2.$$

Нехай тепер твердження виконане для всіх k та для всіх $j = 2n_0, \dots, n$. Покажемо, що воно має місце і для $n+1$, де $n+1 \geq 3n_0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{(k)} &= \sum_{j=0}^{n+1} g_j^{(k)} u_{n+1-j}^{k+j} \geq \sum_{j=n_0}^{n+1} g_j^{(k)} u_{n+1-j}^{k+j} \\ &\geq \sum_{j=n_0}^{n+1-2n_0} g_j^{(k)} u_{n+1-j}^{k+j} \geq \gamma^{(n)}\left(G_{n_0}^{(k)} - G_{n+1-2n_0}^{(k)}\right) \\ &\geq \gamma^{(n)}\left(G_{n_0}^{(k)} - \hat{G}_{n+1-2n_0}\right) \geq \gamma^{(n)}\left(a - \hat{G}_{n+1-2n_0}\right), \end{aligned}$$

де

$$a := \inf_k \left(G_{n_0}^{(k)}\right) \geq \sum_{i=0}^{n_0-1} \gamma_i > 0.$$

А отже маємо зв'язок: $\gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)}\big(a - \hat{G}_{n+1-2n_0}\big)$.

Покажемо, що добуток:

$$\prod_{i\geq n_0}\left(a - \hat{G}_i\right) > 0.$$

Для цього розглянемо функціонал:

$$F(G) = \prod_{i\geq 1}(a - G_i),$$

визначений на множині таких послідовностей G_i, що

$$0 \leq G_i \leq a - \gamma_0, \qquad \sum_i G_i \leq \hat{m}.$$

Цей функціонал є опуклим, о отже досягає свого мінінмуму на межі, тобто на такій послідовності, що:

$$\sum_i G_i = \hat{m}, \qquad G_i \in \{0, a-\gamma_0\},$$

В цьому випадку, $\hat{m}/(a-\gamma_0)$ елементів будуть рівними $a-\gamma_0$ а всі інші рівними 0.

Тоді:

$$F(G) \geq \gamma_0^{\hat{m}/(a-\gamma_0)} = \exp\left(\frac{\hat{m}\ ln\gamma_0}{a-\gamma_0}\right) = \exp\left(\frac{\hat{m}\ ln\gamma_0}{\sum_{i=1}^{n_0-1}\gamma_i}\right).$$ □

Доведення наслідку до теореми 4.2. Якщо послідовність мажорована і $\hat{g}_1 > 0$, то для кожного k $g_1^{(k)} \geq \hat{g}_1 > 0$, а отже теорема 4.2 виконана з $n_0 = 1$, $\gamma_0 = \hat{g}_1$. $\square$

Доведення теореми 4.3. Ясно, що скінчений набір різних розподілів мажорований. Оскільки кожен з розподілів неперіодичний, то існує таке n_0, що всі $g_{n_0}^{(k)} > 0$. Оскільки серед $g_n^{(k)}$ не більше ніж k різних, то виберемо $\gamma_i = \min_k g_{n_0+i}^{(k)}$, $i = 0, \ldots, n_0-1$. $\square$

Доведення теореми 4.4. Як і раніше припустимо спочатку, що $\theta_0^2 = 0$.

Зауважимо, що в цьому випадку для довільного однорідного процесу відновлення мають місце такі нерівності (див. Lindvall, [14], ст. 26, та Daley, [25]):

$$\mathsf{E}[D_n] \leq \mu\, \mathsf{E}[U_n] - n, \tag{11}$$

$$\mathsf{E}[U_n] \leq n/\mu + \mu_2/(\mu)^2, \tag{12}$$

де, U_n кількість відновлень за час n, μ серердній час відновлення, скомбінувавши нерівності (11) та (12) отримаємо наступну оцінку:

$$\mathsf{E}[B_n \mid \mathfrak{B}_{n-1}] \leq C := \max\left\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right\}. \tag{13}$$

А отже:

$$T \leq \theta_0^1 + \sum_{n=0}^{\tau} B_n = \theta_0^1 + C \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\tau \geq n}, \tag{14}$$

$$\mathsf{E}[T] = \mathsf{E}\left[\theta_0^1\right] + C\,\mathsf{E}[\tau] \leq \mathsf{E}\left[\theta_0^1\right] + C/\gamma 0\,\mathsf{E}\left[\theta_0^1\right] + \gamma^{-1} \max\left\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right\}.$$

Відмовившись, від припущення: $\theta_0^2 = 0$, отримаємо оцінку:

$$\mathsf{E}[T] \leq \max\left\{\mathsf{E}\left[\theta_0^1\right], \mathsf{E}\left[\theta_0^2\right]\right\} + \gamma^{-1} \max\left\{\frac{\mu_2^{(1)}}{\mu^{(1)}}, \frac{\mu_2^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right\}. \qquad \square$$

Література

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique **2** (1938), 77–105.
2. W. Feller, *An Intoduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1966.
3. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
4. Н. В. Карташов, *Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления*, Асимптотические задачи для случайн. процессов, Препр. Ин-та матем.АНУ, no. 77-24, Киев, 1977, 2–43.
5. E. Nummelin, *A splitting technique for Harris recurrent chains*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **43** (1978), 309–318.
6. E. Nummelin and R. L. Tweedie, *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov chains*, Ann. Probab. **6** (1978), 404–420.
7. T. Lindvall, *On coupling of discrete renewal sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **48** (1979), 57–70.
8. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, *Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем*, Препринт АН УССР, no. 80-12, Киев, Институт кибернетики, 1980.
9. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl. **11** (1981), 11–26.
10. E. Numemelin and P. Tuominen, *Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applicatoins to renewal theory*, Stoch. Proc. Appls. **12** (1982), 187–202.
11. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

12. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
13. С. Т. Рачев, *Задача Монжа–Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике*, Теор. вероятност. и применен. **29** (1984), №4, 625–653.
14. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
15. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
16. P. Tuominen and R. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Adv. in Appl. Probab. **26** (1994), 775–798.
17. P. Tuominen and R. L. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov Chains*, Advances in Applied Probability **26** (1994), 775–798.
18. R. L. Tweedie and J. N. Corcoran, *Perfect sampling of ergodic Harris chains*, Annals of Applied Probability **11** (2001), no. 2, 438–451.
19. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.
20. S. F. Jarner and G. O. Roberts, *Polynomial convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **12** (2001), 224–247.
21. R. Douc, E. Moulines, and J. S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), 1643–1664.
22. R. Douc, E. Mouliness, and J. S. Rothenthal, *Quantitative bounds on convergence of time-inhomogeneous Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), №4, 1643–1665.
23. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1353–1377.
24. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Computable convergence rates for subgeometrically ergodic Markov chains*, Bernoulli **13** (2007), no. 3, 831–848.
25. D. J. Daley, *Tight bounds for the renewal function of a random walk*, Ann.Probab. **8** (1980), no. 3, 615–621.
26. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 3, 897–923.
27. В. В. Голомозий, М. В. Карташов, *On integrability of the coupling moment for time-inhomogeneous Markov chains*, Теор. ймовір. та матем. статист. **89** (2014), 1–12.
28. В. В. Голомозий, *Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова*, Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки **4** (2009), 10–15.
29. В. В. Голомозий, *Субгеометрична оцінка стійкості для однорідних ланцюгів Маркова*, Теор. ймовір. та матем. статист. **81** (2010), 31–46.
30. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теор. ймовір. та матем. статист. **81** (2009), 65–75.
31. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Середній час склеювання незалежних дискретних процесів відновлення*, Теор. ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 78–85.
32. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, I*, Теор. ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 81–92.
33. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, II*, Теор. ймовір. та матем. статист. **87** (2012), 58–70.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: mailtower@gmail.com

Надійшла 01/09/2013