Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 125–136

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 125–136

МІНІМАКСНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ГАРМОНІЗОВАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК І В. І. ОСТАПЕНКО

Анотація. Досліджується задача оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$ від невідомих значень ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, гармонізованої стохастичної послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, за спостереженнями послідовності у моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$. Знайдені формули для обчислення похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови спектральної визначеності, тобто коли спектральна щільність послідовності ξ_n відома. У тому випадку, коли спектральна щільність невідома, а задана лише множина допустимих спектральних щільностей, використано мінімаксний метод розв'язування задачі оцінювання функціонала. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

Abstract. The problem of estimation of the functional $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$ that depends on the unknown values ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, of a harmonizable symmetric α-stable random sequence ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, from observations of the sequence at points of time $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$ is investigated under the condition of spectral certainty as well as under the condition of spectral uncertainty. Formulas for calculation the value of the error and spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are derived under the condition of spectral certainty where spectral density of the sequence is exactly known. In the case of spectral uncertainty where spectral density of the sequence is not exactly known, but a class of admissible spectral densities is given, relations that determine the least favorable spectral density and the minimax spectral characteristic are proposed.

Аннотация. Исследуется задача оценивания функционала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$ от неизвестных значений ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, гармонизированной стохастической последовательности ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, по наблюдениях последовательности в моменты времени $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$. Найдены формулы для вычисления ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала в том случае когда спектральная плотность последовательности ξ_n известна. В том случае, когда спектральная плотность неизвестна, а задано лишь множество допустимых спектральных плотностей, используется минимаксный метод оценивания. Для заданных множеств допустимых плотностей определены наименее благоприятные спектральные плотности и минимаксные спектральные характеристики оптимальной линейной оценки функционала.

Методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів та послідовностей розроблені у роботах А.М. Колмогорова [12], Н. Вінера [29], А.М. Яглома [30]. Задачі оцінювання невідомих значень гармонізованих процесів та послідовностей досліджувалась у роботах С. Камбаніса [1], С. Камбаніса та Р. Солтані [2], Ю. Хосоя [9]. Задача інтерполяції гармонізованих симетричних α-стійких послідовностей досліджувалась у роботах А. Верона [28] та М. Поурахмаді [25]. Більшість результатів з теорії оцінюванню невідомих значень стаціонарних та гармонізованих процесів ґрунтується на припущенні, що спектральні щільності

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Гармонізована послідовність, робастна оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

процесів відомі. Проте на практиці результати цих робіт не можна застосувати безпосередньо, оскільки точний вигляд спектральної щільності невідомий. Тому доводиться знаходити оцінки спектральних щільностей параметричними чи непараметричними методами, або підбирати щільності виходячи з інших міркувань. Потім розв'язувати задачі вважаючи вибрані щільності істинними. Такий підхід, як показали К. Вастола та Х. Пур [27] може призвести до значної похибки оцінки. Якщо спектральна щільність невідома, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, доцільніше застосувати мінімаксний метод розв'язування задач оцінювання, який полягає у визначенні оцінки, що мінімізує величину похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу допустимих спектральних щільностей. Огляд робіт з мінімаксних методів оцінювання зробили у свій час С. Кассам та Х. Пур [11]. Вперше мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів застосував У. Гренандер [7]. У роботах Ю. Франке [5] досліджувались задачі мінімаксної екстраполяції та інтерполяції стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. Задачі інтерполяції послідовностей зі стаціонарним приростами вивчались у роботах М. Луза та М. Моклячука [14] – [16]. Задача інтерполяції періодично корельованих послідовностей досліджувалась у роботах І. Дубовецької, О. Масютки та М. Моклячука [3], М. Моклячука та І. Дубовецької [21]. Інтерполяція векторнозначних послідовностей досліджувалась у роботах М. Моклячука та О. Масютки [22], [23]. Більше результатів можна знайти у книгах М. Моклячука [19], М. Моклячука та О. Масютки [24], І. Голіченко та М. Моклячука [6], оглядовій статті І. Дубовецької та М. Моклячука [4].

У даній статті досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень гармонізованої симетричної α-стійкої стохастичної послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, за даними спостережень послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$ за умови спектральної визначеності та спектральної невизначеності. Знайдені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала у тому випадку, коли відома спектральна щільність послідовності ξ_n. У тому випадку, коли спектральна щільність невідома, але задані множини допустимих спектральних щільностей, знайдені співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності для побудови оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_N\xi$.

1. Гармонізовані симетричні α-стійкі стохастичні послідовності

Означення 1.1 (Симетрична α-стійка випадкова величина)**.** Дійсна випадкова величина ξ називається симетричною α-стійкою, $S\alpha S$, якщо її характеристична функція має вигляд

$$Eexp(it\xi) = exp(-c|t|^{\alpha}),$$

де $c \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$.

Дійсні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сумісно симетричні α-стійкі, $S\alpha S$, якщо всі лінійні комбінації $\sum_{k=1}^{n} a_k\xi_k$ є симетричними α-стійкими, $S\alpha S$, або, що еквівалентно, коли характеристична функція вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має вигляд

$$\phi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = Eexp(i\sum t_k\xi_k) = exp\{-\int |\sum t_k x_k|^{\alpha} d\Gamma_{\vec{\xi}}(\vec{x})\},$$

де $t_1, \ldots, t_n$– дійсні числа а $\Gamma_{\vec{\xi}}(\cdot)$ – це міра, що визначена на одиничній сфері $S_n \in R^n$.

Комплекснозначні випадкові величини сумісно симетричні α-стійкі, $S\alpha S$, якщо їх дійсні та уявні частини є сумісно симетричними α-стійкими [1], [2].

Означення 1.2 (Симетрична α-стійка стохастична послідовність)**.** Стохастична послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ називається симетричною α-стійкою, $S\alpha S$, стохастичною послідовністю, якщо всі лінійні комбінації $\sum_{k=1}^{n} a_k\xi_k$ є $S\alpha S$ випадковими величинами.

Для сумісно $S\alpha S$ випадкових величин $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ та $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ коваріація ξ та η визначається за формулою

$$[\xi, \eta]_\alpha = \int_{S_4} (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2}(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

де $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}$ з комплексними числами z та $\beta > 0$. Коваріація не обов'язково симетрична та лінійна за другим аргументом [28]. Для сумісно $S\alpha S$ випадкових величин ξ, ξ_1, ξ_2, η маємо

$$[\xi_1 + \xi_2, \eta]_\alpha = [\xi_1, \eta]_\alpha + [\xi_2, \eta]_\alpha,$$
$$|[\xi, \eta]_\alpha| \le ||\xi||_\alpha ||\eta||_\alpha^{\alpha-1}. \tag{1}$$

Функція $||\xi||_\alpha = [\xi, \xi]_\alpha^{1/\alpha}$ є нормою в лінійному просторі $S\alpha S$ випадкових величин, що еквівалентна збіжності за ймовірністю. Зазначимо, що $||\cdot||_\alpha$ не обов'язково є звичайною L^α нормою.

Наведемо найпростіші властивості функції $z^{<\beta>}$, що випливають із означення $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}$.

Лема 1.1. Нехай z, x, y – комплексні числа та нехай $\beta > 0$. Тоді справджуються наступні властивості:

- $\left|z^{<\beta>}\right| = |z|^{<\beta>}$,
- $z^{<1>} = \bar{z}$,
- якщо $z^{<\beta>} = v$, то $z = v^{<1/\beta>} = |v|^{(1-\beta)/\beta}\bar{v}$,
- $(cz)^{<\alpha>} = c^\alpha z^{<\alpha>}$.
- $|z^{<\alpha>}|^\beta = |z|^{\alpha\beta}$.

Розглянемо комплеснозначний $S\alpha S$ випадковий процес $Z = \{Z(t) : -\infty < t < \infty\}$ з незалежними приростами. Спектральна міра процесу Z визначається за формулою $\mu\{(s,t]\} = \|Z(t)-Z(s)\|_\alpha^\alpha$. Для всіх $f \in L^\alpha(\mu)$ можна визначити інтеграли $\int f(t)dZ(t)$, що мають такі властивості [1], [2]:

$$\left\|\int f dZ\right\|_\alpha^\alpha = \int |f|^\alpha d\mu, \quad \left[\int f dZ, \int g dZ\right]_\alpha = \int f(g)^{<\alpha-1>} d\mu. \tag{2}$$

Означення 1.3 (Гармонізована симетрична α-стійка стохастична послідовність)**.** Симетрична α-стійка, $S\alpha S$, стохастична послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ називається гармонізованою, $HS\alpha S$, якщо існує $S\alpha S$ процес $Z = \{Z(\theta); \theta \in [-\pi, \pi]\}$ з незалежними приростами і скінченна міра μ такі, що послідовність ξ_n допускає спектральний розклад (може бути записана у вигляді)

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} dZ(\theta), n \in \mathbb{Z},$$

а її коваріація має спектральний розклад

$$[\xi_n, \xi_m]_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\mu(\theta), m, n \in \mathbb{Z}.$$

Зауважимо, що $HS\alpha S$ стохастична послідовність не обов'язково стаціонарна. Проте при $\alpha = 2$ стохастична $HS\alpha S$ послідовність стаціонарна і гаусівська.

У даній статті ми розглядатимемо $HS\alpha S$ послідовності лише для $1 < \alpha \le 2$.

Позначимо через $H(\xi)$ замкнутий за нормою $\|\cdot\|_\alpha$ лінійний многовид, породжений всіма значеннями $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Із спектрального розкладу $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ випливає, що відображення $\xi_n \leftrightarrow e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$, можна розширити до ізоморфізму між просторами $H(\xi)$ та $L^\alpha(\mu)$ [26]. При такому ізоморфізмі кожному елементу $\eta \in H(\xi)$ відповідає єдиний елемент $h \in L^\alpha(\mu)$ і при цьому $\eta = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)dZ(\theta)$.

Для кожного замкнутого лінійного підпростору $M \subseteq L^\alpha(\mu)$ та $h \in L^\alpha(\mu)$ існує єдиний елемент підпростору M, що знаходиться на мінімальній відстані від h. Такий елемент називається проекцією h на M або найкращою апроксимацією елемента h в M. Ця проекція позначається $P_M h$ та визначається єдиним чином з умови [25].

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\,(h(\theta) - P_M h(\theta))^{<\alpha-1>}\, d\mu(\theta) = 0 \quad \forall g \in M. \tag{3}$$

Аналогічно, для $HS\alpha S$ стохастичної послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ та замкнутого лінійного підпростору $H^N(\xi)$ простору $H(\xi)$ існує єдиний елемент $\hat{\xi}_n$ підпростору $H^N(\xi)$ який мінімізує відстань до ξ_n та визначається єдиним чином з умови

$$\left[\eta, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha = 0 \quad \forall \eta \in H^N(\xi). \tag{4}$$

Оскільки коваріація лінійна за першим аргументом із останнього співвідношення отримаємо, що

$$||\xi_n - \hat{\xi}_n||_\alpha^\alpha = \left[\xi_n, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha - \left[\hat{\xi}_n, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha = \left[\xi_n, \xi_n - \hat{\xi}_n\right]_\alpha. \tag{5}$$

Це співвідношення відіграє основну роль при характеризації мінімальних $HS\alpha S$ стохастичних послідовностей $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ та розв'язанні задачі оптимальної лінійної інтерполяції.

2. Інтерполяція гармонізованих послідовностей. Класичний підхід

Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j \xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta),$$

$$A_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності ξ_n в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$.

Ми розглядатимемо гармонізовані симетричні α–стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності з абсолютно неперервною спектральною мірою $\mu(\theta)$, що має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, яка задовольняє умову мінімальності [12, 25, 28]

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^{-1/(\alpha-1)} d\theta < \infty. \tag{6}$$

Позначимо через $H^N(\xi)$ замкнуту в $||\cdot||_\alpha$ нормі лінійну оболонку породжену значеннями гармонізованої симетричної α–стійкої, $HS\alpha S$, стохастичної послідовності ξ_n при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$ у просторі $H(\xi)$, що породжений усіма значеннями $HS\alpha S$ послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Оптимальна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ – це проекція елемента $A_N\xi$ на підпростір $H^N(\xi)$. Ця проекція визначається умовами

$$[\eta, A_N\xi - \hat{A}_N\xi]_\alpha = 0, \quad \forall \eta \in H^N(\xi),$$

або, що еквівалентно, умовами

$$[\xi_k, A_N\xi - \hat{A}_N\xi]_\alpha = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{7}$$

Із співвідношень ізоморфізму між просторами $H(\xi)$ та $L^\alpha(\mu)$ випливає, що оптимальну оцінку $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ слід шукати у вигляді

$$\hat{A}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)dZ(\theta). \tag{8}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$ оцінки, що належить підпростору $L^\alpha_N(\mu)$ простору $L^\alpha(\mu)$, який породжується функціями $e^{ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки визначається рівняннями

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta k} \left(A_N(e^{i\theta}) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta)d\theta = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}. \tag{9}$$

Із цих рівнянь випливає співвідношення

$$\left(A_N(e^{i\theta}) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta) = C_N(e^{i\theta}), \quad C_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta},$$

де c_j, $j = 0, 1, \ldots, N$ – невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. З останнього співвідношення випливає, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = A_N(e^{i\theta}) - \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}. \tag{10}$$

Невідомі коефіцієнти c_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, визначаються з умови $h(\theta) \in L^\alpha_N(\mu)$, яка задає систему рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k}\, h(\theta)d\theta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, N. \tag{11}$$

Ці рівняння мають вигляд

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k} \left(\left(\sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta}\right) - \left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right) d\theta = 0, k = 0, 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \right\|_\alpha^\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^\alpha f(\theta)d\theta. \tag{13}$$

Отже справедлива наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай гармонізована симетрична α–стійка, $HS\alpha S$, стохастична послідовність $\{\xi(n), n \in \mathbb{Z}\}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, що має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, яка задовольняє умову мінімальності* (6). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, послідовності ξ_n за спостереженнями послідовності ξ_n в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$ обчислюється за формулою* (8). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд* (10), *де невідомі коефіцієнти c_j, $j = 0, \ldots, N$, визначаються рівняннями* (12). *Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою* (13).

Приклад 2.1. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_0\xi = a\xi_0$, що залежить від невідомого значення ξ_0 гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності ξ_n в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

У цьому випадку спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = a - c^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}.$$

Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_0\xi - A_0\xi\right\|_\alpha^\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \left|c^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right|^\alpha f(\theta)d\theta,$$

де константа c – це розв'язок рівняння

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(a - c^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}\right) d\theta = 0,$$

$$c = \frac{(2\pi a)^{<\alpha-1>}}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\theta)\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}} d\theta\right)^{<\alpha-1>}}.$$

Приклад 2.2. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_1\xi = a_0\xi_0 + a_1\xi_1$, що залежить від невідомих значень ξ_0, ξ_1 гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, з $\alpha = \frac{4}{3}$ та спектральною щільністю $f(\theta) = |e^{i\theta} + d|^{-\frac{4}{3}}$, $-1 < d < 1$, за спостереженнями послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

У цьому випадку спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = a_0 + a_1 e^{i\theta} - \left(c_0 + c_1 e^{-i\theta}\right)^{<3>} |e^{i\theta} + d|^4. \tag{14}$$

Тут

$$\left(c_0 + c_1 e^{-i\theta}\right)^{<3>} = \left(c_0 + c_1 e^{-i\theta}\right) \left(\overline{c_0} + \overline{c_1} e^{i\theta}\right)^2 = b_{-1} e^{-i\theta} + b_0 + b_1 e^{i\theta} + b_2 e^{2i\theta}, \tag{15}$$

де

$$b_{-1} = \overline{c_0}^2 c_1,\ b_0 = c_0 \overline{c_0}^2 + 2\overline{c_0} c_1 \overline{c_1},\ b_1 = 2c_0 \overline{c_0}\,\overline{c_1} + c_1 \overline{c_1}^2,\ b_2 = c_0 \overline{c_1}^2, \tag{16}$$

та

$$|e^{i\theta} + d|^4 = r_{-2} e^{-2i\theta} + r_{-1} e^{-i\theta} + r_0 + r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{2i\theta}, \tag{17}$$

де

$$r_{-2} = d^2,\ r_{-1} = 2d + 2d^3,\ r_0 = 1 + 4d^2 + d^4,\ r_1 = 2d + 2d^3,\ r_2 = d^2. \tag{18}$$

Аналізуючи співвідношення (15) – (18) знаходимо, що спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = h_{-3} e^{-3i\theta} + h_{-2} e^{-2i\theta} + h_{-1} e^{-i\theta} + h_0 + h_1 e^{i\theta} + h_2 e^{2i\theta} + h_3 e^{3i\theta} + h_4 e^{4i\theta},$$

де

$$h_{-3} = -b_{-1} r_{-2},\ h_{-2} = -b_{-1} r_{-1} - b_0 r_{-2},\ h_{-1} = -b_{-1} r_0 - b_0 r_{-1} - b_1 r_{-2},$$
$$h_0 = a_0 - b_{-1} r_1 - b_0 r_0 - b_1 r_{-1} - b_2 r_{-2},\ h_1 = a_1 - b_{-1} r_2 - b_0 r_1 - b_1 r_0 - b_2 r_{-1},$$
$$h_2 = -b_0 r_2 - b_1 r_1 - b_1 r_0,\ h_3 = -b_1 r_2 - b_2 r_1,\ h_4 = -b_2 r_2.$$

Умова (11) виконується, коли

$$h_0 = a_0 - b_{-1} r_1 - b_0 r_0 - b_1 r_{-1} - b_2 r_{-2} = 0,\ h_1 = a_1 - b_{-1} r_2 - b_0 r_1 - b_1 r_0 - b_2 r_{-1} = 0. \tag{19}$$

Ці рівняння та рівняння (16) та (18) задають систему рівнянь, що визначають невідомі коефіцієнти c_0, c_1.

Розглянемо задачу для $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $d = 0.5$. У цьому випадку невідомі коефіцієнти обчислюються із зазначених рівнянь. Вони такі: $c_0 \approx 0.44$, $c_1 \approx 0.44$. Спектральна характеристика оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = h_{-3} e^{-3i\theta} + h_{-2} e^{-2i\theta} + h_{-1} e^{-i\theta} + h_2 e^{2i\theta} + h_3 e^{3i\theta} + h_4 e^{4i\theta},$$

with

$$h_{-3} \approx -0.02,\ h_{-2} \approx -0.17,\ h_{-1} \approx -0.57,\ h_2 \approx -0.57,\ h_3 \approx -0.17,\ h_4 \approx -0.02.$$

Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_1\xi - A_1\xi\right\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} \approx \int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(0.44 + 0.44e^{i\theta}\right)^{<3>} \left|e^{i\theta} + 0.5\right|^4\right|^{\frac{4}{3}} \left(|e^{i\theta} + 0.5|^{-\frac{4}{3}}\right) d\theta \approx 5.57.$$

Відповідні результати для $\alpha = 2$ та $f(\theta) = |e^{i\theta} + 0.5|^{-2}$ такі: $c_0 = \frac{4}{7}$, $c_1 = \frac{4}{7}$,

$$\left\|\hat{A}_1\xi - A_1\xi\right\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\left(\frac{4}{7} + \frac{4}{7}e^{-i\theta}\right)^{<1>} \left|e^{i\theta} + 0.5\right|^2\right|^2 \left(|e^{i\theta} + 0.5|^{-2}\right) d\theta = \frac{16\pi}{7}.$$

....

Приклад 2.3. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j\xi_j$, що залежить від невідомих значень ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n з $\alpha = \frac{4}{3}$ та спектральною щільністю $f(\theta)$ за спостереженнями послідовності в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$.

У цьому випадку спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала має вигляд

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} - \left(\sum_{k=0}^{N} c_k e^{-ik\theta}\right)^{<3>} (f(\theta))^{-3}. \tag{20}$$

Скориставшись розкладами у ряди Фур'є

$$\left(\sum_{k=0}^{N} c_k e^{-ik\theta}\right)^{<3>} = \left(\sum_{k=0}^{N} c_k e^{-ik\theta}\right) \left(\sum_{k=0}^{N} \overline{c}_k e^{ik\theta}\right)^2 = \sum_{k=-N}^{2N} b_k e^{ik\theta}$$

та

$$(f(\theta))^{-3} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k e^{ik\theta}, \quad r_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^{-3} e^{-ik\theta} d\theta,$$

матемимо

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{ik\theta} - \left(\sum_{k=-N}^{2N} b_k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k e^{ik\theta}\right). \tag{21}$$

Щоб вивести систему рівнянь для обчислення невідомих коефіцієнтів $c_0, c_1, \ldots, c_N$ визначимо $(N+1) \times (2N+1)$ матрицю $\mathbf{C}_N$ з елементами $C_{k,j} = c_{N+k-j}$ при $k \leq j \leq N+k$ та $C_{k,j} = 0$ при $k > j$ та $j > N+k$, де $k = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, 2N$. Як результат добутку $\vec{\alpha} = \vec{c}\mathbf{C}_N$ вектора $\vec{c} = (\overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_N)$ на матрицю $\mathbf{C}_N$ ми отримаємо $2N+1$ вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_{-N}, \ldots, \alpha_N)$. Аналогічно тому, як була визначена матриця $\mathbf{C}_N$, визначимо $(N+1)\times(3N+1)$ матрицю Λ_N з елементами $\Lambda_{k,j} = \alpha_{-N-k+j}$ при $k \leq j \leq 2N+k$ та $\Lambda_{k,j} = 0$ при $k > j$ та $j > 2N+k$, де $k = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, 3N$. Як результат добутку $\vec{b} = \vec{c}\Lambda_N$ вектора $\vec{c}$ на матрицю Λ_N ми отримаємо $3N+1$ вектор $\vec{b} = (b_{-N}, \ldots, b_{2N})$.

Інше рівняння ми отримаємо із умови (11) скориставшись виглядом спектральної характеристики (21). Матимемо $\vec{a} = \vec{b}\mathbf{R}$, де $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_N)$, $\mathbf{R}$ – це $(3N+1)\times(N+1)$ матриця з елементами $\{R_{k,j}\}_{k=0,j=0}^{3N,N}$, $R_{k,j} = r_{N-k+j}$, побудована з коефіцієнтів Фур'є $r_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta))^{-3}e^{-ik\theta}d\theta$ функції $(f(\theta))^{-3}$. Вказані рівняння

$$\vec{\alpha} = \vec{c}\mathbf{C}_N, \quad \vec{b} = \vec{c}\Lambda_N, \quad \vec{a} = \vec{b}\mathbf{R}$$

визначають невідомі коефіцієнти $c_0, c_1, \ldots, c_N$.

У частинному випадку $N = 1$ та $f(\theta) = |e^{i\theta} + d|^{-\frac{4}{3}}$ матимемо

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{1} a_k e^{ik\theta} - \left(\sum_{k=-1}^{2} b_k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=-2}^{2} r_k e^{ik\theta}\right)$$

та рівняння

$$b_{-1} = \overline{c_0}^2 c_1,\ b_0 = c_0\overline{c_0}^2 + 2\overline{c_0}c_1\overline{c_1},\ b_1 = 2c_0\overline{c_0}\overline{c_1} + c_1\overline{c_1}^2,\ b_2 = c_0\overline{c_1}^2$$

$$a_0 - b_{-1}r_1 - b_0r_0 - b_1r_{-1} - b_2r_{-2} = 0,\ a_1 - b_{-1}r_2 - b_0r_1 - b_1r_0 - b_2r_{-1} = 0,$$

що співпадають з рівняннями (16), (19).

3. Інтерполяція гармонізованих послідовностей. Мінімаксний підхід

Величина похибки $\Delta(h(f);f) := \left\|\hat{A}_N\xi - A_N\xi\right\|_\alpha^\alpha$ та спектральна характеристика $h(f) := h(\theta)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ визначаються вказаними формулами лише у тому випадку, коли відома спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо ж задано лише множину D допустимих спектральних щільностей, то застосовується мінімакний підхід до задачі оцінювання функціонала, тобто визначається оцінка, яка мінімізує значення середньоквадратичної похибки одночасно для всіх спектральних щільностей із класу D [19].

Означення 3.1. Для заданного класу спектральних щільностей D спектральна щільність $f_0 \in D$ називається найменш сприятливою в D для оптимальної лінійної оцінки $A_N\xi$, якщо виконується наступне співвідношення:

$$\triangle(f_0) = \triangle(h(f_0); f_0) = \max_{f\in D}\triangle(h(f); f).$$

Позначимо через $L^\alpha_-(f)$ підпростір функцій в $L^\alpha(f)$, який породжений $\{e^{i\lambda k}, k < 0\}$, а через $L^\alpha_N(f)$ підпростір, що породжений $\{e^{i\lambda k}, k > N\}$.

Означення 3.2. Для заданого класу спектральних щільностей D спектральна характеристика $h^0(f)$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{f\in D} L^\alpha_-(f) \oplus L^\alpha_N(f),$$

$$\min_{h\in H_D}\max_{f\in D}\triangle(h; f) = \max_{f\in D}(h^0; f).$$

Найменш сприятлива спектральна щільність $f_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ утворюють сідлову точку функції $\triangle(h; f)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\triangle(h; f_0) \geq \triangle(h^0; f_0) \geq \triangle(h^0; f) \quad \forall f \in D, \forall h \in H_D$$

виконуються коли $h^0 = h(f_0)$ та $h(f_0) \in H_D$, де f_0 – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\triangle}(f) = -\triangle(h(f_0); f) \to \inf, \quad f \in D, \tag{22}$$

$$\triangle(h(f_0); f) = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}(f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^\alpha f(\theta)d\theta. \tag{23}$$

Така задача на умовний екстремум еквівалентна задачі на безумовний екстремум

$$\tilde{\triangle}_D(f) = \tilde{\triangle}(f) + \delta(f|D) \to \inf,$$

де $\delta(f|D)$ – індикаторна функція множини D. Розв'язок f_0 цієї задачі на безумовний екстремум характеризується умовою $0 \in \partial\tilde{\triangle}_D(f_0)$ [10, 20], де $\partial\tilde{\triangle}_D(f_0)$ – субдиференціал опуклого функціонала $\tilde{\triangle}_D(f_0)$.

Вигляд (23) функціонала $\triangle(h(f_0); f)$ зручний для застосування методу невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (22). Користуючись методом Лагранжа та виглядом субдиференціалів індикаторних функцій $\delta(f|D)$ множини D спектральних щільностей, ми знайдемо співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності для конкретних класів щільностей (додаткові результати можна знайти у книгах [19, 24, 6]).

3.1. Найменш сприятливі щільності в класі D_0. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, невідома, а задано лише множину D_0 допустимих спектральних щільностей, де

$$D_0 = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = P \right\}.$$

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (22), отримаємо співвідношення

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| \left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} - \lambda \right) f(\theta)d\theta = 0.$$

З леми Лагранжа випливає, що

$$\left| \left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} = \lambda.$$

Із цього співвідношення можемо зробити висновок, що найменш сприятлива спектральна щільність у класі D_0 має вигляд

$$f_0(\theta) = C \left| \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right|. \tag{24}$$

Ми переконались у справедливості такого твердження.

Теорема 3.1. *Спектральна щільність* (24)*, що задовольняє умову мінімальності* (6)*, рівняння* (12) *та умову $f_0 \in D_0$, тобто $\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\theta)d\theta = P$, є найменш сприятливою спектральною щільністю у класі D_0 для оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$. Мінімаксна спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi$ обчислюється за формулою* (10) *при $f(\theta) = f_0(\theta)$.*

3.2. Найменш сприятливі щільності в класі D_β. Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n невідома, проте задано множину допустимих спектральних щільностей

$$D_\beta = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta))^{\beta} d\theta = P \right\}, \quad \beta \neq \frac{-1}{\alpha-1}, \beta \neq 1.$$

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (22), отримаємо співвідношення

$$\left| \left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} = \lambda \left(f_0(\theta)\right)^{\beta-1},$$

яке можна записати у вигляді

$$\left| \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (f_0(\theta))^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}} = \lambda \left(f_0(\theta)\right)^{\beta-1}.$$

Із цього співвідношення можемо зробити висновок, що найменш сприятлива спектральна щільність у класі D_β має вигляд

$$f_0(\theta) = C\left|\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta}\right|^{\frac{-\alpha}{-\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)}}. \tag{25}$$

Отже справджується така теорема.

Теорема 3.2. *Спектральна щільність* (25), *що задовольняє умову мінімальності* (6), *рівняння* (12) *та умову* $f_0 \in D_\beta$, *тобто* $\int_{-\pi}^{\pi} (f_0(\theta))^\beta \, d\theta = P$, *є найменш сприятливою спектральною щільністю у класі* D_β *для оптимального лінійного оцінювання функціонала* $A_N\xi$. *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *обчислюється за формулою* (10) *при* $f(\theta) = f_0(\theta)$.

3.3. **Найменш сприятливі щільності в класі D_M^-.** Розглянемо задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\theta)$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності ξ_n невідома, а задано множину допустимих спектральних щільностей

$$D_M^- = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\theta) cos(m\theta) d\theta = r_m, m = 0, \dots, M \right\},$$

де r_m, $m = 0, \dots, M$ – строго позитивна послідовність дійсних чисел. За цієї умови проблема моментів має розв'язки і множина D_M^- містить нескінченну кількість щільностей [13].

Застосувавши метод невизначених множників Лагранжа до розв'язання задачі на умовний екстремум (22), отримаємо співвідношення

$$\left| \left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} = \left(\sum_{m=0}^{M} \lambda_m cos(m\theta) \right) (f_0(\theta))^{-2},$$

де λ_j, $j = 0, \dots, M$ – множники Лагранжа. Вираз $\left(\sum_{m=0}^{M} \lambda_m cos(m\theta)\right)$ можна подати у вигляді [8]

$$\left(\sum_{m=0}^{M} \lambda_m cos(m\theta) \right) = \left| \sum_{m=0}^{M} p_m e^{im\theta} \right|^2.$$

Із отриманих співвідношень можемо зробити висновок, що найменш сприятлива спектральна щільність у класі D_M^- має вигляд $(1 < \alpha < 2)$

$$f_0(\theta) = \left| \sum_{j=0}^{N} c_j e^{-ij\theta} \right|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left| \sum_{m=0}^{M} p_m e^{im\theta} \right|^{2\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}. \tag{26}$$

Отже справджується така теорема.

Теорема 3.3. *Спектральна щільність* (26), *що задовольняє умову мінімальності* (6), *рівняння* (12), *та умову* $f_0 \in D_M^-$, *тобто* $\int_{-\pi}^{\pi} f_0^{-1}(\theta) cos(m\theta) d\theta = r_m$, $m = 0, \dots, M$, *є найменш сприятливою спектральною щільністю у класі* D_M^- *для оптимального лінійного оцінювання функціонала* $A_N\xi$. *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0)$ *оптимальної оцінки функціонала* $A_N\xi$ *обчислюється за формулою* (10) *при* $f(\theta) = f_0(\theta)$.

4. Висновки

У даній статті ми запропонували метод розв'язання задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналу $A_N\xi = \sum_{i=0}^{N} a_i\xi_i$, що залежить від невідомих значень ξ_j, $j = 0, 1, \ldots, N$, гармонізованої α-стійкої стохастичної послідовності ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, за спостереженнями послідовності у моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \ldots, N\}$. Знайдені формули для обчислення варіації та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови, що спектральна щільність послідовності ξ_n відома. У тому випадку, коли спектральна щільність невідома, проте задана множина допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний метод задачі оцінювання функціонала. Для певних заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

Література

1. S. Cambanis, *Complex stable variables and processes*, Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson (P. K. Sen, ed.), North-Holland, New York, 1983, pp. 63–79.
2. S. Cambanis and R. Soltani, *Prediction of stable processes: spectral and moving average representations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **66** (1984), 593–612.
3. I. I. Dubovets'ka, O. Yu. Masyutka, and M. P. Moklyachuk, *Interpolation of periodically correlated stochastic sequences*, Theory Probab. Math. Stat. **84** (2012), 43–56.
4. I. I. Dubovets'ka and M. P. Moklyachuk, *On Minimax Estimation Problems for Periodically Correlated Stochastic Processes*, Contemporary Mathematics and Statistics **2** (2014), no. 1, 1–24.
5. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahr. Verw. Geb. **68** (1985), 337–364.
6. I. I. Голіченко, М. П. Моклячук, *Оцінки функціоналів від періодично корельовапих стохастичних процесів*, "Інтерсервіс", Київ, 2014.
7. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
8. E. J. Hannan, *Multiple time series*, John Wiley & Sons, Inc., 1970.
9. Y. Hosoya, *Harmonizable stable processes*, Z. Wahr. Verw. Geb. **60** (1982), 517–533.
10. A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 6, North-Holland Publishing Company., Amsterdam–New York–Oxford, 1979.
11. S. A. Kassam and H. V. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proc. IEEE **73** (1985), 433–481.
12. A. N. Kolmogorov, *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics* (A. N. Shiryayev, ed.), Mathematics and Its Applications. Soviet Series, vol. 26, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
13. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, "Наука", 1973.
14. М. М. Луз, М. П. Моклячук, *Інтерполяція функціоналів від стохастичних послідовностей зі стаціонарними приростами за спостереженнями з шумом*, Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика **2** (2012), 131–148.
15. M. M. Luz and M. P. Moklyachuk, *Interpolation of functionals of stochastic sequenses with stationary increments*, Theory Probab. Math. Stat. **87** (2013), 117–133.
16. M. M. Luz and M. P. Moklyachuk, *Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments*, Statistics, Optimization & Information Computing **3** (2015), 30–41.
17. M. P. Moklyachuk, *Robust procedures in time series analysis*, Theory Stoch. Process. **6** (2000), no. 3–4, 127–147.
18. M. P. Moklyachuk, *Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems*, Theory Stoch. Process. **7** (2001), no. 1–2, 253–264.
19. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, "Київський університет", Київ, 2008.
20. М. П. Моклячук, *Негладкий аналіз та оптимізація*, "Київський університет", Київ, 2008.
21. М. П. Моклячук, І. І. Дубовецька, Мінімаксна інтерполяція періодично корельованих процесів, Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика **23** (2012), no. 2, 51-–62.

22. M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka, *Interpolation of multidimensional stationary sequences*, Theory Probab. Math. Stat. **73** (2006), 125–133.
23. M. P. Moklyachuk and O. Yu. Masyutka, *Robust estimation problems for stochastic processes*, Theory Stoch. Process. **12** (2006), no. 3–4, 88–113.
24. M. Moklyachuk and O. Masyutka, *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
25. M. Pourahmadi, *On minimality and interpolation of harmonizable stable processes*, SIAM J. Appl. Math. **44** (1984), no. 5, 1023—1030.
26. I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1970.
27. K. S. Vastola and H. V. Poor, *An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering*, Automatica **28** (1983), 289–293.
28. A. Weron, *Harmonizable stable processes on groups: spectral, ergodic and interpolation properties*, Z. Wahr. Verw. Geb. **68** (1985), no. 4, 473–491.
29. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Whis Engineering Applications*, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966.
30. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. Vol. 2: Suplementary notes and references*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна
Адреса електронної пошти: vt.ostapenko@gmail.com

Надійшла 15/05/2015