Теорія йморвір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 151–160

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 151–160

L_p-КРИТЕРІЇ ПРО ВИГЛЯД КОВАРІАЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

УДК 519.21

Т. О. ЯНЕВИЧ

Анотація. В статті побудовані L_p-критерії для перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції для центрованих стаціонарний гауссових послідовностей. Було досліджено як працюють такі критерії в конкретних випадках за допомогою моделювання.

Abstract. In this paper we construct the L_p-criteria for testing hypothesis on the covariance function for the centered stationary Gaussian sequence. It was investigated how such criteria work in some particular cases using the simulation study.

Аннотация. В статье построены L_p-критерии для проверки гипотезы о виде ковариационной функции для центрированной стационарной гауссовой последовательности. Было иследовано как работают такие критерии в конкретных случаях при помощи моделирования.

1. Вступ

Однією з важливих з точки зору практичних застосувань задач є дослідження властивостей випадкових послідовностей, або як їх частіше називають, часових рядів. Оскільки деякі явища ми можемо спостерігати лише в певні моменти часу, і навіть при спостереженні неперервних величин, таких як, наприклад, температура повітря чи напруга, їх значення фіксуються лише в дискретні моменти часу. Тому на практиці ми в основному працюємо саме з випадковими послідовностями, що зумовлює актуальність і важливість їх розгляду.

В даній роботі були досліджені центровані гаусові стаціонарні в широкому сенсі випадкові послідовності. Для них були побудовані L_p-критерії для перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції. Класичні книги з теорії часових рядів, такі як, наприклад, [1], [2], [4] містять розділи, що присвячені тому, як перевіряється, чи дійсно дані відповідають запропонованій моделі, чи ні. Такі критерії в основному базуються на деякому припущенні щодо залишків (похибок) моделі. Наприклад, Q-статистика Бокса–Пірса (див.[3]) та її удосконалена версія Льюнга–Бокса (див. [10]) базуються на вибірковій автокореляції похибок. Для нелінійних моделей часових рядів, тест побудований Маклеодом та Лі [11] базується на дослідженні автокореляції квадратів похибок. Чен та Део [6] для виявлення статистичних властивостей випадкових послідовностей запропонували спектральний підхід. При використанні такого типу тестів потрібно підраховувати залишки моделей, що може бути досить проблематичним завданням, особлико коли модель не може бути зображена у вигляді авторегресії скінченного порядку. Також в цьому випадку, залишки можуть не бути однозначно визначеними.

Ми ж запропонували підхід, класичний з точки зору теорії випадкових процесів, де властивості процесу визначаються його математичним сподіванням та коваріаційною функцією. Саме такий підхід застосовують в машинному навчанні (англ.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15; Secondary 60G10.

Ключові слова і фрази. Квадратичного гауссові випадкові величини, випадкові послідовності, часові ряди, коваріаційні функції.

machine learning, див. [12]). Побудовані тести не потребують підрахунку залишків моделі та можуть бути використаними навіть коли процес має представлення нескінченного порядку. Для побудови L_p-критеріїв було використано теорію квадратично гауссових випадкових величин. Простір квадратично гауссових випадкових величин було вперше введено в [9]. В книзі [5] було досліджено властивості цих просторів та встановлено їх зв'язок з іншими просторами випадкових величин.

Дана стаття є продовженням того, що було зроблено в роботах [14] та [8]. Зокрема, в першій з цих статей будувались критерії для перевірки гіпотези про коваріаційну функцію центрованої гауссової послідовності в рівномірній метриці. Друга стаття була присвячена побудові критерію в рівномірній метриці для випадкових послідовностей, коли потрібно одночасно зробити висновок щодо математичного сподівання та коваріаційної функції, або коли послідовність є векторнозначною. В цій роботі ми вже використовували L_p-метрику для побудови критеріїв, що є альтернативою рівномірної метрики. Зокрема, L_p-метрику можна використовувати в задачах апроксимації (див. [7]).

Робота організована таким чином. Перший розділ є вступом, де представлено основний зміст роботи, її актуальність та зв'язок з іншими роботами. Другий розділ присвячений теорії квадратично гауссових випадкових величин і містить основні означення та результати. Зокрема, знайдено оцінку для розподілу суми степенів p квадратично гаусових випадкових величин двома способами. В розділі 3 наведено спосіб за допомогою якого ми оцінюємо коваріаційну функцію та показано які величини при такому оцінюванні будуть квадратично гауссовими. Використовуючи оцінки отримані в розділі 2, в четвертому розділі було побудовано критерії для перевірки гіпотези про коваріаційну функцію стаціонарної центрованої гауссової послідовності. В п'ятому розділі за допомогою моделювання таких послідовностей було перевірено як працюють ці критерії в конкретних випадках. Розділ 6 містить висновки та аналіз отриманих результатів.

2. Квадратично гаусові випадкові величини

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ — стандартний імовірнісний простір, на якому визначені сумісно гауссові центровані вектори $\overrightarrow{\gamma}^{\mathrm{T}} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ довільної розмірності $r \geq 1$. Розглянемо сім'ю $SG_{(0)}(\Omega)$ випадкових величин, які можна придставити у вигляді $\overrightarrow{\gamma}^{\mathrm{T}} A \overrightarrow{\gamma}$, де A — це будь-яка дійснозначна матриця розмірності $r \times r$, причому r пробігає множину натуральних чисел. Як було показано в [5] сім'я $SG_{(0)}(\Omega)$ являє собою лінійний підпростір в просторі $L_2(\Omega)$. Тоді лінійне замикання цієї сім'ї в середньому квадратичному буде підпростором в просторі $L_2(\Omega)$, яке ми і будемо називати простором квадратично гауссових випадкових величин.

Наведемо більш формальне означення.

Означення 2.1. [5] Простір $SG(\Omega)$ будемо називати простором квадратично гаусових випадкових величин якщо будь-який елемент $\xi \in SG(\Omega)$ можна подати у вигляді

$$\xi = \overrightarrow{\gamma}^{\mathrm{T}} A \overrightarrow{\gamma} - \mathsf{E}\, \overrightarrow{\gamma}^{\mathrm{T}} A \overrightarrow{\gamma}, \tag{1}$$

де $\overrightarrow{\gamma}^{\mathrm{T}} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ $(r \in \mathbb{N})$ — вектор сумісно гауссових центрованих випадкових величин, A — дійснозначна матриця; або елемент $\xi \in SG(\Omega)$ є границею у середньому квадратичному послідовності випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ виду (1)

$$\xi = \operatorname*{l.i.m}_{n\to\infty} \xi_n.$$

Для квадратично гауссових випадкових величин справедливі наступні теореми.

Теорема 2.1 ([5]). *Нехай $\xi \in SG(\Omega)$ та $\mathbf{D}\,\xi > 0$, тоді наступна нерівність виконується для всіх $|s| < 1$*

$$\mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi}}\right\} \le \frac{1}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}. \tag{2}$$

Теорема 2.2. *Для будь-яких $|s| < 1$, $p \ge 0$ та $\xi \in SG(\Omega)$*

$$\mathsf{E}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi}}\right|^p \le \frac{2p^pe^{-p}}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}. \tag{3}$$

Доведення. З того, що для всіх $x > 0$ та $p \ge 0$ $x^pe^{-x} \le p^pe^{-p}$, тобто $x^p \le p^pe^{-p}e^x$ випливає, що для всіх $|s| < 1$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi}}\right|^p &\le p^pe^{-p}\,\mathsf{E}\exp\left\{\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi}}\right|\right\}\\
&\le p^pe^{-p}\left(\mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi}}\right\}+\mathsf{E}\exp\left\{-\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi}}\right\}\right)\\
&\le \frac{2p^pe^{-p}}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}
\end{aligned}$$

оскільки нерівність (2) виконується як для додатніх, так і для від'ємних s. $\square$

Теорема 2.3. *Для будь-якого набору випадкових величин ξ_m, $m = 1,\dots,M$, $M < \infty$ з простору квадратичного гауссових випадкових величин $SG(\Omega)$, для всіх $p > 0$ та $\delta > \frac{pM^{1/p}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{p}}\right)$*

$$\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \delta\right\} \le 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}\delta}{M^{1/p}}}\exp\left\{-\frac{\delta}{\sqrt{2}M^{1/p}}\right\}. \tag{4}$$

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$, $|s| < 1$ та $r \ge 1$. Тоді, застосувавши нерівність Чебишева ми отримаємо, що

$$\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \le \frac{1}{\varepsilon^{pr}}\,\mathsf{E}\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^r.$$

З нерівності Мінковського та нерівності (2) випливає, що

$$\begin{aligned}
\left(\mathsf{E}\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^r\right)^{1/r} &\le \sum_{m=1}^{M}\left(\mathsf{E}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^{pr}\right)^{1/r}\\
&\le \sum_{m=1}^{M}\left(\frac{2(pr)^{pr}e^{-pr}}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}\right)^{1/r}\\
&= 2^{1/r}M(pr)^pe^{-p}\frac{1}{(1-|s|)^{1/2r}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2r}\right\}.
\end{aligned}$$

А отже,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^{pr}}\,\mathsf{E}\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^r &\le \frac{2}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}r^{rp}\left(\frac{Mp^p}{e^p\varepsilon^p}\right)^r\\
&= \frac{2}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}\varphi(r),
\end{aligned} \tag{5}$$

де $\varphi(r) = r^{rp}a^r$, $r > 0$, $a = \frac{Mp^p}{e^p\varepsilon^p}$.

Дослідимо функцію $\varphi(r) = r^{rp}a^r$, $r > 0$:

$$\ln\varphi(r) = rp\ln r + r\ln a,$$
$$(\ln\varphi(r))' = p(\ln r + 1) + \ln a = 0, \quad \text{коли } r^* = a^{-1/p}e^{-1}.$$

В точці $r^* = \frac{\varepsilon}{pM^{1/p}}$ функція $\varphi(r)$ набуває свого мінімального значення $\varphi(r^*) = \exp\{-pa^{-1/p}e^{-1}\} = \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{M^{1/p}}\right\}$. Але нерівність Мінковського справедлива лише для $r \geq 1$, тому для того, щоб мінімізувати вираз в (5) по r ми розглянемо лише випадок коли $r^* \geq 1$, тобто якщо $\varepsilon \geq pM^{1/p}$.

Таким чином, для $\varepsilon \geq pM^{1/p}$

$$\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq \frac{2}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{M^{1/p}}\right\}.$$

Визначимо $\delta := \frac{\sqrt{2}}{|s|}\varepsilon > 0$, де $0 < |s| < 1$. Тоді,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \delta\right\} &= \mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \varepsilon\right\}\\ &\leq \frac{2}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2} - \frac{|s|\delta}{\sqrt{2}M^{1/p}}\right\}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}c\right\} =: f(s),\end{aligned}$$

де $c = 1 + \frac{\sqrt{2}\delta}{M^{1/p}}$.

Дослідимо функцію $f(s)$, $0 < |s| < 1$. Оскільки вона парна, тому будемо розглядати її при $0 < s < 1$.

$$\ln f(s) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1-s) - s\frac{c}{2},$$
$$(\ln f(s))' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-s} - \frac{c}{2} = 0, \quad \text{коли } s^* = 1 - \frac{1}{c} > 0.$$

Оскільки при всіх $\delta > 0$ $c = 1 + \frac{\sqrt{2}\delta}{n^{1/p}} > 1$, тому $0 < s^* < 1$. В точці s^* функція f набуває свого мінімального значення

$$\begin{aligned}f(s^*) &= \frac{2}{\sqrt{1-(1-\frac{1}{c})}}\exp\left\{-\frac{c}{2}\left(1-\frac{1}{c}\right)\right\}\\ &= 2\sqrt{c}\exp\left\{-\frac{c-1}{2}\right\}\\ &= 2\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}\delta}{M^{1/p}}}\exp\left\{-\frac{\delta}{\sqrt{2}M^{1/p}}\right\}.\end{aligned}$$

Звідси і отримуємо нерівність (4) для тих $\delta > 0$ для яких $\frac{s^*}{\sqrt{2}}\delta = \frac{\sqrt{2}\delta}{M^{1/p}+\sqrt{2}\delta}\frac{\delta}{\sqrt{2}} > pM^{1/p}$. Остання умова буде виконуватись коли $\delta > \frac{pM^{1/p}}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{p}}\right)$. $\square$

Теорема 2.4. *Для будь-якого набору випадкових величин* ξ_m, $m = 1, \ldots, M$, $M < \infty$ *з простору квадратичного гауссових випадкових величин* $SG(\Omega)$, *для всіх* $p > 0$ *та*

$\delta > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \delta\right\} \le \frac{1}{\delta^p}\frac{2^{\frac{p}{2}+1}M\exp\left\{-\frac{p}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{p}}\right)\right\}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}}-1\right)^p\sqrt{1+p-p\sqrt{1+\frac{2}{p}}}}. \tag{6}$$

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2.3, але замість нерівності Мінковського ми застосуємо нерівність Чебишева. У цьому випадку точність оцінки буде меншою, але таким чином ми уникнемо умов на параметр δ. Отже, для всіх $\delta > 0$ та $0 < |s| < 1$

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \delta\right\} &= \mathsf{P}\left\{\left(\sum_{m=1}^{M}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p\right)^{1/p} > \frac{|s|}{\sqrt{2}}\delta\right\} \\
&\le \left(\frac{|s|}{\sqrt{2}}\delta\right)^{-p}\sum_{m=1}^{M}\mathsf{E}\left|\frac{s}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\xi_m}{\sqrt{\mathbf{D}\,\xi_m}}\right|^p \\
&\le \left(\frac{|s|}{\sqrt{2}}\delta\right)^{-p}\sum_{m=1}^{M}\frac{2p^pe^{-p}}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\} \\
&= \frac{M2^{\frac{p}{2}+1}p^pe^{-p}}{\delta^p}\frac{1}{|s|^p}\frac{1}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\} =: Cf(s),
\end{aligned}$$

де $C = \frac{M2^{\frac{p}{2}+1}p^pe^{-p}}{\delta^p}$ та $f(s) = \frac{1}{|s|^p}\frac{1}{\sqrt{1-|s|}}\exp\left\{-\frac{|s|}{2}\right\}$.

Дослідимо функцію $f(s)$, $0 < |s| < 1$. Ця функція парна, тому будемо розглядати її лише при $0 < s < 1$:

$$\ln f(s) = -p\ln s - \frac{1}{2}\ln(1-s) - \frac{s}{2},$$

$$(\ln f(s))' = -\frac{p}{s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-s} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{коли } s^* = p\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}}-1\right) > 0.$$

При всіх $p > 0$ $0 < s^* < 1$ та в точці s^* функція f набуває свого мінімального значення

$$f(s^*) \quad = \quad \frac{\exp\left\{-\frac{p\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}}-1\right)}{2}\right\}}{\left(p\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}}-1\right)\right)^p\sqrt{1-p\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}}-1\right)}}.$$

Звідси і отримуємо нерівність (6). □

3. Коваріаційна функція стаціонарної гауссової послідовності

Розглянемо стаціонарну гауссову послідовність $\{\gamma_i, i \ge 1\}$ таку, що для всіх i $\mathsf{E}\,\gamma_i = 0$ та $\mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{i+m} = B(m)$, $m \ge 0$ — коваріаційна функція цієї послідовності. Припустимо, що ми маємо N спостережень цієї послідовності.

В якості оцінки коваріаційної функції $B(m)$ розглянемо статистику

$$\widehat{B}_N(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m}\gamma_i\gamma_{i+m}, \qquad N \ge 1.$$

Оцінка $\widehat{B}_N(m)$ є незміщеною:

$$\mathsf{E}\,\widehat{B}_N(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m}\mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{i+m} = B(m).$$

Величина $\Delta_N(m) = \widehat{B}_N(m) - B(m)$ є квадратично гауссовою випадковою величиною, оскільки $\widehat{B}_N(m)$ можна записати у вигляді $(\gamma_1,\ldots,\gamma_{N-m})^{\mathrm{T}}A(\gamma_m,\ldots,\gamma_N)$, де матриця

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{N-m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{N-m} \end{pmatrix}.$$

Підрахуємо дисперсію для $\Delta_N(m)$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\,\Delta_N(m) &= \mathsf{E}(\widehat{B}_N(m) - B(m))^2 = \mathsf{E}\left[\frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m}(\gamma_i\gamma_{i+m} - B(m))\right]^2 \\ &= \frac{1}{(N-m)^2}\,\mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{N-m}\sum_{j=1}^{N-m}(\gamma_i\gamma_{i+m} - B(m))(\gamma_j\gamma_{j+m} - B(m))\right] \\ &= \frac{1}{(N-m)^2}\sum_{i=1}^{N-m}\sum_{j=1}^{N-m}\mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{i+m}\gamma_j\gamma_{j+m} - B^2(m).\end{aligned}$$

За формулою Іссерліса для центрованих гауссових випадкових величин

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{i+m}\gamma_j\gamma_{j+m} &= \mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{i+m}\,\mathsf{E}\,\gamma_j\gamma_{j+m} + \mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_j\,\mathsf{E}\,\gamma_{i+m}\gamma_{j+m} + \mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{j+m}\,\mathsf{E}\,\gamma_{i+m}\gamma_j \\ &= B^2(m) + B^2(j-i) + B(j-i+m)B(j-i-m).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\,\Delta_N(m) &= \frac{1}{(N-m)^2}\sum_{i=1}^{N-m}\sum_{j=1}^{N-m}\left[B^2(j-i) + B(j-i+m)B(j-i-m)\right] \\ &= \frac{2}{N-m}\sum_{k=0}^{N-m}\left(1 - \frac{k}{N-m}\right)\left[B^2(k) + B(k+m)B(k-m)\right]\end{aligned}$$

4. L_p-критерії перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції

Припустимо, що ми маємо N послідовних спостережень деякої випадкової послідовності $\{\gamma_i, i \geq 1\}$ і маємо підстави припускати, що ця послідовність є центрованою, стаціонарною та гауссовою з коваріаційною функцією $B(m)$.

Критерій 4.1. Нехай основна гіпотеза H_0 полягає в тому, що $B(m)$, $m \geq 0$ є коваріаційною функцією послідовності $\{\gamma_i, i \geq 1\}$, а альтернативна гіпотеза H_a — в тому, що $B(m)$ не є коваріаційною функцією цієї послідовності. Якщо для рівня значущості α, деякого фіксованого значення $p > 0$ та $M < N$

$$\left(\sum_{m=0}^{M-1}\left|\frac{\Delta_N(m)}{\sqrt{\mathbf{D}\,\Delta_N(m)}}\right|^p\right)^{1/p} > \delta_\alpha,$$

де δ_α — це значення, при якому

$$2\sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}\delta_\alpha}{M^{1/p}}}\exp\left\{-\frac{\delta_\alpha}{\sqrt{2}M^{1/p}}\right\} = \alpha,$$

(причому, $\delta_\alpha > \frac{pM^{1/p}}{\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{1+\frac{2}{p}}\big)$) тоді гіпотеза H_0 відхиляється, та не відхиляється в іншому випадку.

Критерій 4.2. Нехай основна гіпотеза H_0 полягає в тому, що $B(m)$, $m \geq 0$ є коваріаційною функцією послідовності $\{\gamma_i, i \geq 1\}$, а альтернативна гіпотеза H_a — в тому, що $B(m)$ не є коваріаційною функцією цієї послідовності. Якщо для рівня значущості α, деякого фіксованого значення $p > 0$ та $M < N$

$$\left(\sum_{m=0}^{M-1}\left|\frac{\Delta_N(m)}{\sqrt{\mathbf{D}\,\Delta_N(m)}}\right|^p\right)^{1/p} > \delta_\alpha^*,$$

де δ_α^* — це значення, при якому

$$\frac{1}{(\delta_\alpha^*)^p}\frac{2^{\frac{p}{2}+1}M\exp\left\{-\frac{p}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{p}}\right)\right\}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{p}}-1\right)^p\sqrt{1+p-p\sqrt{1+\frac{2}{p}}}} = \alpha,$$

тоді гіпотеза H_0 відхиляється, та не відхиляється в іншому випадку.

Зауваження 4.1. Помилка першого роду для критеріїв 4.1 та 4.2, тобто, ймовірність того, що буде зроблено висновок про те, що $B(m)$ не може бути коваріаційною функцією послідовності $\{\gamma_i, i \geq 1\}$, хоча насправді це так, буде меншою або рівною α.

Зауваження 4.2. Другий критерій є більш універсальним оскільки не містить обмежень на критечне значення δ_α^*, що має місце для першого критерію. Тим не менше перевагою першого критерію є те, що нерівність, на основі якої він побудований, є більш точною.

5. Порівняльний аналіз L_p-критеріїв в деяких конкретних випадках

Розглянемо як працюють критерії 4.1 та 4.2 в деяких конкретних випадках при різних значеннях параметра p.

Для цього ми будемо моделювати центровану гауссову випадкову послідовність з коваріаційною функцією $B(m) = e^{-|m|/l}$, $m \in \mathbb{Z}$, де l — параметр масштабу. Для цього скористаємось тим, що така послідовність може бути подана у вигляді моделі ковзного середнього

$$\gamma_i = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\zeta_{i-k}, \qquad i \geq 1$$

де $\beta_k = \sqrt{1-e^{-2/l}} \cdot e^{-|k|/l}$ та $\{\zeta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ — це послідовність незалежних гауссових випадкових величин, таких, що для всіх k $\mathsf{E}\,\zeta_k = 0$, $\mathsf{E}\,\zeta_k^2 = 1$. В цьому випадку $\mathsf{E}\,\gamma_i = 0$ для всіх i та для $m \geq 0$

$$B(m) = \mathsf{E}\,\gamma_i\gamma_{i+m} = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\beta_{k+m} = \left(1-e^{-2/l}\right)\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k/l}e^{-(k+m)/l} = e^{-m/l}.$$

Для моделювання ми скористаємось скінченою сумою

$$\widehat{\gamma}_i = \sum_{k=0}^{K}\beta_k\zeta_{i-k}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Використовуючи результати роботи [13], було досліджено, що при рівні значущості 0.99 та точності 0.001 достатньо, щоб $K > 11$.

Дослідимо, як будуть реагувати критерії 4.1 та 4.2 при значеннях параметрів $p = 1, 2, 3$ та $M = 3, 5, 10$, якщо за головну гіпотезу ми приймаємо, що $B_0(m) = e^{-m^2/l}$, при різних значеннх параметра масштабу $l = 1$ та 10, хоча насправді будемо генерувати послідовність з каваріаційною функцією $B(m) = e^{-|m|}$.

Приклад 5.1. Нехай параметер масштабу для коваріаційної функції $B_0(m)$ дорівнює 1, тобто $B_0(m) = e^{-m^2}$. В цьому випадку різниця між дійсною коваріаційною функцією $B(m) = e^{-|m|}$ та тією, що припускається, буде не дуже великою (див. рис. 1).

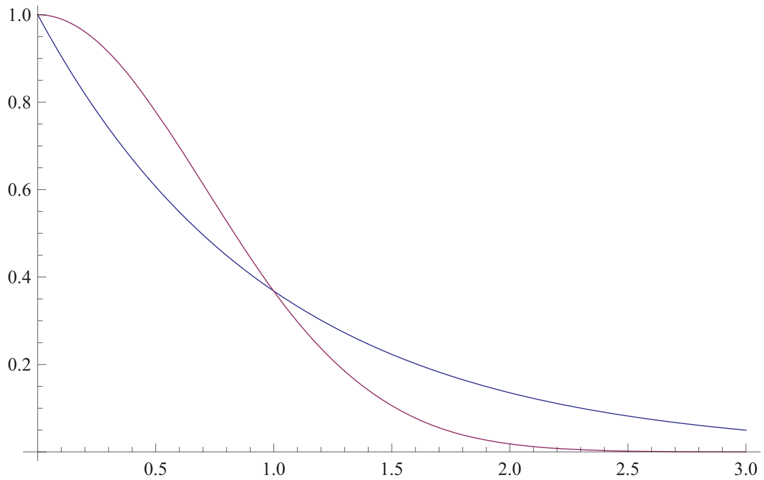

Рис. 1. Коваріаційні функції $B_0(m) = e^{-m^2}$ та $B(m) = e^{-|m|}$

Проводячи 1000 симуляцій послідовності з коваріаційною функцією $B(m) = e^{-|m|}$ при різних розмірах вибірки ми досліджували коли критерії будуть розрізняти ці дві коваріаційні функції. Ми задаємо рівень довіри $1 - \alpha = 0.9$. Під терміном "розрізняти" ми будемо розуміти ситуацію, при якій критерій буде робити правильний висновок, тобто говорити, що згенерована послідовність має іншу коваріаційну функцію, ніж ми припускаємо, хоча б в одному випадку з тисячі. Як показують результати моделювання, при збільшенні розміру вимірки частота привильних висновків після того, як критерій почав розрізняти коваріаційні функції, досить швидко досягає 100%.

Приблизні значення розміру вибірки, коли критерії при різних значеннях параметрів починають розрізняти ці 2 коваріаційні функції подані в Таблиці 1. Перші два рядки були отримані при використанні критерію 4.1 коли ми враховували 3 та 10 перших значень коваріаційної функції. Останній рядок в Таблиці 1 ми отримали застосовуючи критерій 4.2 при використанні перших 10 значень коваріаційної функції.

Табл. 1

N	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$M = 3$	25 000	10 000	7 000
$M = 10$	$>$100 000	50 000	25 000
$M = 10^*$	$>$100 000	70 000	25 000

Приклад 5.2. Нехай тепер параметер масштабу для коваріаційної функції $B_0(m)$ дорівнює 10, тобто $B_0(m) = e^{-m^2/10}$. В цьому випадку різниця між дійсною коваріаційною функцією $B(m) = e^{-|m|}$ та тією, що припускається буде вже більш значною (див. рис. 2).

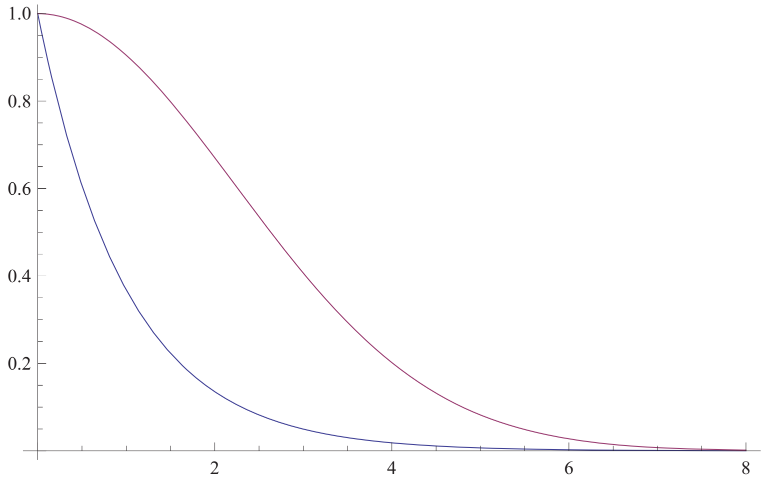

Рис. 2. Коваріаційні функції $B_0(m) = e^{-m^2/10}$ та $B(m) = e^{-|m|}$

Ми знову провели 1000 симуляцій послідовності з коваріаційною функцією $B(m) = e^{-|m|}$ при різних розмірах вибірки для дослідження того, коли критерії будуть розрізняти ці дві коваріаційні функції. Рівень довіри, що ми задавали дорівнював $1 - \alpha = 0.9$.

Приблизні значення розміру вибірки, коли критерії при різних значеннях параметрів починають розрізняти коваріаційні функції подані в Таблиці 2. Перші два рядки були отримані при використанні критерію 4.1 коли ми враховували 3 та 10 перших значень коваріаційної функції. Останній рядок в Таблиці 2 ми отримали застосовуючи критерій 4.2 при використанні перших 10 значень коваріаційної функції.

Табл. 2

N	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$M = 3$	2 500	2 000	1 000
$M = 10$	7 000	4 000	3 000
$M = 10^*$	>10 000	5 000	3 000

Зауваження 5.1. Оцінки похибки першого роду у всіх розглянутих випадках, при застосування обох критеріїв, не перевершували заданого рівня значущості $\alpha = 0.1$.

6. Висновки

Як показали приклади 5.1 та 5.2, те як працюють критерії 4.1 та 4.2 залежить від багатьох складових. Основні висновки можна сформулювати так:

- якщо різниця між коваріаційними функціями досить значна (приклад 5.2), тоді для того, щоб критерії починали їх розрізняти необхідня менша вибірка, ніж коли вони є досить схожими (приклад 5.1) при одних і тих же значеннях інших параметрів.
- якщо порівнювати роботу критеріїв при різних значеннях $p = 1, 2, 3$, то очевидно, що використання при $p = 1$ є малоефективним. Якщо порівнювати $p = 2$ та $p = 3$, то критерії краще працюють при $p = 3$. Але важливою є також можливість знаходження практичної інтерпритації таких критеріїв.

А це легше зробити при $p = 2$. Тому вибір параметра p залежить в першу чергу від конкретної задачі.

- як показали результати моделювання, при використанні $M = 3$ перших значень коваріаційної функції, критерій 4.1 працює краще, ніж при $M = 10$. Це може бути пов'язане з оцінками, які використовувались при побудові критеріїв. Для перших значень коваріаційної функції ці оцінки є досить точними, в той час як для всіх наступних значень коваріаційної функції точність буде спадати. Тобто, для даних критерії рекомендовано не використовувати дуже багато значень коваріаційної функції для перевірки критерії про вигляд коваріаційної функції.
- порівнюючи роботу критеріїв 4.1 та 4.2 при $M = 10$ ми побачили, що при збільшенні параметра p різниця в точності між ними стає все менш значною. Але при використанні L_2-критеріїв краще все-таки використовувати критерій 4.1.

Література

1. T. W. Anderson, *The statistical analysis of time series*, John Wiley & Sons, New York, 1971.
2. G. E. P. Box, G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 4th Edition, Wiley Series in Probability and Statistics, 2011.
3. G. E. P. Box and D. A. Pierce, *Distribution of the residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models*, J. Amer. Statist. Assoc. **65** (1970), 1509–1526.
4. P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*, Second Edition, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 2009.
5. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 2000.
6. W. W. Chen and R. S. Deo, *A generalized portmanteau goodness-of-git test for time series models*, Econometric Theory **20** (2004), no. 2, 382–416.
7. O. Ye. Kamenshchikova and T. O. Ianevych, *An approximation of $L_p(\Omega)$ processes*, Theory Probab. Math. Stat. **83** (2011), 71–82.
8. Yu. V. Kozachenko and T. O. Ianevych, *Some goodness of fit tests for random sequences*, Lithuanian Journal of Statistics **52** (2013), no. 1, 5–13.
9. Yu. V. Kozachenko and O. V. Stus, *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*, Math. Communications **3**, (1998), no. 1, 83–94.
10. G. M. Ljung and G. E. P. Box, *On a measure on lack of fit in time series models*, Biometrica **65** (1978), no. 2, 297–303.
11. A. I. McLeod and W. K. Li, *Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations*, J. Time Series Anal. **4** (1983), 269–273.
12. S. E. Rasmussen and C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, The MIT press, 2006.
13. О. І. Василик, Ю. В. Козаченко, Т. О. Яковенко, *Моделювання стаціонарних випадкових послідовностей*, Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки (2009), no. 1, 7–10.
14. Ю. В. Козаченко, Т. О. Яковенко, *Критерій перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції стаціонарної гаусової випадкової послідовності*, Вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика (2010), no. 20, 39–43.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна

Адреса електронної пошти: yata452@univ.kiev.ua

Надійшла 05/05/2015