Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 92, 2015, стор. 41–60

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 92, 2015, pp. 41–60

АСИМПТОТИКА РОЗПОДІЛУ МАРКОВСЬКИХ МОМЕНТІВ НЕОДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА, ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ДИСКРЕТНІЙ МОДЕЛІ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА

УДК 519.21

М. В. КАРТАШОВ

Анотація. Розглядається неоднорідний за часом дискретний ланцюг Маркова, та сім'я субстохастичних матриць (Q_s), що підпорядковані (не перевищують) перехідним ймовірностям (P_s) ланцюга за один крок. З сім'єю (Q_s) пов'язаний марковський момент τ - момент обриву ланцюга з перехідними матрицями (Q_s). Вважається, що (P_s) та (Q_s) близькі у певному сенсі, тобто $\tau \to \infty$ у схемі серій. Обчислено асимптотику ймовірності банкрутства (обриву) $P(\tau < \infty) \to 0$. Для наявності нульової границі цієї ймовірності накладається умова типу транзієнтності ланцюга, як в теоремі Крамера–Лундберга. Наведено ряд застосувань.

Abstract. Time-inhomogeneous discrete Markov chain and a family of substochastic matrices (Q_s) subordinated to (not greater than) the one-step transition matrices (P_s) of the chain are considered. With family (Q_s) is connected the Markov moment τ - as the killing moment for the chain with transitions (Q_s). We assume that P_s and Q_s are close in some sense, so the moment $\tau \to \infty$ in the scheme of series. The asymptotic of the ruin (killing) probabilities $P(\tau < \infty) \to 0$ is calculated. To obtain the zero limit value of these probabilities the transience condition on the chain is assumed. Applications are also considered.

Аннотация. Рассматривается неоднородная по времени дискретная цепь Маркова, и семья субстохастических матриц (Q_s), подчиненных (не превышающих) переходные вероятности (P_s) цепи за один шаг. С семьей (Q_s) связан марковский момент τ - момент обрыва цепи с переходными матрицами (Q_s). Считается, что (P_s) и (Q_s) близки в некотором смысле, то есть $\tau \to \infty$ в схеме серий. Найдена асимптотика вероятности разорения (обрыва) $P(\tau < \infty) \to 0$. Для наличия нулевого предела етой вероятности принимаются условия типа транзиентности цепи, как и в теореме Крамера–Лундберга. Приведены применения

1. Вступ

Дослідження стійкості розподілів та асимптотики розподілу марковських моментів загальних ланцюгів Маркова при широких припущеннях на характер перемішування детально висвітлене у монографії автора [2, 1996], де наведено також ряд застосувань. Основу доведень складали аналітичні операторні методи, що використані і в даній статті.

Основи теорії стійкості стохастичних моделей викладено у монографії В. Золотарьова [3, 1986]. Важливі досягнення у теорії стійкості наведено у книзі С. Мейна, Р. Твіді [4, 1993].

У роботі автора [6, 2013] досліджено асимптотику розподілу загальних марковських моментів, що задані на неоднорідному ланцюгу Маркова, та прямують у схемі серій до нескінченості. Ланцюг мав задовольняти умову типу ергодичності: рівномірного перемішування, сильного або V-сильного перемішування. За такого припущення відповідний момент зупинки (що інтерпретується як момент банкрутства)

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Inhomogeneous discrete Markov chains, rare Markov moments, ruin probability,analytical methods, Cramer's risk model неоднорідні дискретні ланцюги Маркова, проріджені моменти Маркова,ймовірність розорення, модель ризику Крамера аналітичний метод.

є майже напевне скінченним для кожного початкового значення ланцюга. Тому в [6] обрано схему скінченого "горизонту ризику": досліджено асимптотику ймовірності банкрутства на обмеженому часовому інтервалі (що одночасно зростає у схемі серій). Така постановка задачі відрізняється від класичної моделі Крамера, де розглядається нескінчений "горизонт ризику".

У даній роботі вивчається саме модель типу Крамера, що є неоднорідною у часі і є породженою дискретним ланцюгом Маркова. Останній може змінюватись у схемі серій та як правило має транзієнтний характер для дограничної додатності імовірності не банкрутства на нескінченному "горизонті". Наприклад, рекурентний незвідний ланцюг (у однорідному випадку) досягає будь-якого стану майже напевне на необмеженому часовому проміжку, зокрема, має одиничну імовірність банкрутства. У статті вивчається випадок нульової границі ймовірності банкрутства за додаткового припущення необмеженого зростання початкового капіталу (початкового значення ланцюга).

На відміну від класичного результату Крамера–Лундберга, в статті досліджено не тільки граничну поведінку ймовірності банкрутства, але також доведені явні двобічні нерівності для неї, що дозволяє чисельно апроксимувати дограничні значення вказаної ймовірності.

Перша частина роботи містить формулювання результатів, наприкінці наведені доведення.

2. Марковські моменти та підпорядковані матриці

Розглянемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова $X = (X_t, t = 0, 1, \dots)$ відносно потоку сигма-алгебр $(\mathfrak{F}_t, t = 0, 1, \dots)$ зі значеннями у дискретному фазовому просторі $E = \{i, j, k, \dots\}$.

Визначимо матриці $P_t = (P^{(t)}_{ij}, i, j \in E)$ ймовірностей переходу ланцюга за один крок (з моменту tдо моменту $t+1$): $P^{(t)}_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$, $t \geq 0$. Позначимо через P_{ti}, E_{ti} умовні ймовірності та математичні сподівання на ймовірнісному просторі, де заданий ланцюг Маркова X, з початковою умовою $X_t = i$.

Для $n \geq 0$ позначимо матриці ймовірностей переходу за n кроків:

$$P^{(t,n)} \equiv \prod\nolimits_{s=t}^{t+n-1} P_s = (\mathrm{P}_{ti}(X_{t+n} = j), i, j \in E), P^{(t,0)} \equiv I. \tag{1}$$

Символом $x \in E$ нижче позначається початковий стан ланцюга у початковий момент t: $X_t = x$. Крім того, будемо припускати виродженість сигма-алгебри $\mathfrak{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Надалі підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину індексів поширюється на простір E. Позначення $x^{\pm}$ є додатною та від'ємною частиною числа x, $\delta_{ij} = 1_{i=j}$ - символи Кронекера.

Розглянемо довільний $(\mathfrak{F}_t)$-марковський момент τ такий, що $\tau \geq 1$. З ним пов'язані субстохастичні матриці $Q_s = (Q^{(s)}_{ij}, i.j \in E)$ для $s \geq 0$, де

$$Q^{(s)}_{ij} \equiv \mathbb{P}(X_{s+1} = j, \tau > s+1 \mid X_s = i, \tau > s). \tag{2}$$

Тотожності для умовних імовірностей коректно визначені лише за припущення додатності імовірності відповідної умови. При порушенні останнього будемо вважати, що $0/0 = 0$, та $1/0 = 1$. Крім того, слід врахувати, що за формулою повної імовірності значення умовної імовірності не впливає на результат при нульовій імовірності умови.

Лема 1. *Рівності (2) еквівалентні при $t \geq 1$, $i_0 = i, i_1, \dots, i_t \in E$ рівностям*

$$\mathrm{P}_{0i}(\tau > t,\ X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = \prod\nolimits_{s=0}^{t-1} Q^{(s)}_{i_s, i_{s+1}}. \tag{3}$$

Зауважимо, що сім'я (Q_s) підпорядкована (P_s), тобто

$$Q_{ij}^{(s)} \leq P_{ij}^{(s)}, i, j \in E, s \geq 0. \tag{4}$$

Навпаки, нехай $Q_s = (Q_{ij}^{(s)})$ - сім'я субстохастичних матриць, що підпорядковані (4) перехідним матрицям (P_s) ланцюга X.

Розглянемо розширення $\overline{E} = E \times \{0, 1\}$ простору E, та визначимо $\overline{E}$-значний ланцюг Маркова $\overline{X} = (\overline{X}_t)$ з $\overline{X}_t = (X_t, d_t)$ рекурентно наступним чином. Покладемо $\overline{X}_0 = (x, 0)$. Нехай $\overline{X}_s = (i, d)$, $s \geq 0$. Згенеруємо E-значну випадкову величину Y незалежно від усіх попередньо згенерованих величин, з розподілом $\mathbb{P}(Y = j) = P_{ij}^{(s)}$. Якщо $d = 1$, оберемо $d_{s+1} = 1$ та $X_{s+1} = Y$. Якщо ж $d = 0$, оберемо випадково $d_{s+1} = 1$ з імовірністю $r = (P_{ij}^{(s)} - Q_{ij}^{(s)})/P_{ij}^{(s)}$ та $d_{s+1} = 0$ з імовірністю $1 - r$, та $X_{s+1} = Y$. Цей вибір також робитимемо незалежно від попередніх. Тут за означенням $r = 0$, якщо$P_{ij}^{(s)} = 0 = Q_{ij}^{(s)}$. Нарешті, покладемо $\overline{X}_{s+1} = (X_{s+1}, d_{s+1})$.

Таким чином рекурентно побудована послідовність $\overline{X} = (\overline{X}_t)$ є ланцюгом Маркова відносно потоку сигма-алгебр $(\overline{\mathfrak{F}}_t = \sigma[\overline{X}_s, s \leq t])$. Одночасно послідовність $(X_t, t \geq 0)$ є $(\overline{\mathfrak{F}}_t)$-ланцюгом Маркова з перехідними імовірностями $\mathbb{P}(X_{s+1} = j \mid X_s = i) = P_{ij}^{(s)}$, а марковський момент $\tau = \inf(t \geq 1, d_t = 1)$ задається (2) матрицями (Q_s), що є підпорядковані (P_s) (4).

Тут марковська властивість процесу $\overline{X}$ виводиться з рівнянь, за якими він будується: $\overline{X}_{s+1} = g_s(\overline{X}_s, \xi_{s+1})$ з невипадковими вимірними функціями g_s, та незалежними величинами (ξ_s) [6] .

Вимірність X відносно $(\overline{\mathfrak{F}}_t)$ очевидна. Далі,

$$\mathrm{P}(X_{s+1} = j \mid X_s = i) =$$

$$\mathrm{P}(d_s = 0)\mathrm{P}(X_{s+1} = j \mid \overline{X}_s = (i, 0)) + \mathrm{P}(d_s = 1)\mathrm{P}(X_{s+1} = j \mid \overline{X}_s = (i, 1)) =$$

$$\mathrm{P}(d_s = 0)\mathrm{P}(Y = j) + \mathrm{P}(d_s = 1)\mathrm{P}(Y = j) = P_{ij}^{(s)}.$$

Нарешті, (2) виводиться з рівностей

$$\mathrm{P}(\overline{X}_{s+1} = (j, 0) \mid \overline{X}_s = (i, 0)) = \mathrm{P}(Y = j)\mathrm{P}(d_{s+1} = 0 \mid d_s = 0) =$$

$$\mathrm{P}(Y = j)(1 - (P_{ij}^{(s)} - Q_{ij}^{(s)})/P_{ij}^{(s)}) = Q_{ij}^{(s)}.$$

Наведена конструкція є реалізацією у дискретному випадку концепції процесу Маркова з обривом [1, 1973].

3. Модель ризиків та ймовірність банкрутства

Для опису розподілу моменту τ розглянемо залишкову субстохастичну матрицю переходів:

$$R_s = P_s - Q_s = (R_{ij}^{(s)}), R_{ij}^{(s)} = \mathbb{P}(X_{s+1} = j, \tau = s + 1 \mid X_s = i, \tau > s). \tag{5}$$

Визначимо також ймовірності ризиків переходів

$$\alpha_s(i, j) = R_{ij}^{(s)}/P_{ij}^{(s)} =$$

$$\mathbb{P}(\tau = s + 1 \mid X_s = i, X_{s+1} = j, \tau > s), s \geq 0, i, j \in E, \tag{6}$$

де за означенням $0/0 = 0$.

Розглянемо функцію імовірностей ризиків станів:

$$\beta_s(i) = \mathrm{E}_{si}\alpha_s(X_s, X_{s+1}) = \sum_j \alpha_s(i, j)P_{ij}^{(s)} =$$

$$\sum_j R_{ij}^{(s)} = 1 - \sum_j Q_{ij}^{(s)} = \mathbb{P}(\tau = s + 1 \mid X_s = i, \tau > s), s \geq 0, i \in E. \tag{7}$$

Доведення цих співвідношень спираються на означення умовної імовірності, а також на означення умовного розподілу X_{s+1} за умови $X_s = i$.

Лема 2. *Умовний розподіл моменту τ задається при $t \geq s \geq 0$, $i_0 = i, i_1, \ldots, i_t \in E$ рівностями*

$$\mathrm{P}_{0i}(\tau > s \mid X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t) = \prod_{r=0}^{s-1}(1 - \alpha_r(i_r, i_{r+1})). \tag{8}$$

Зауважимо, що ліва частина не залежить від t за умови $t \geq s$.

Надалі буде розглядатись схема серій, у якій розподіли ланцюга X та моменту τ, а саме матриці P_s, Q_s, $s \geq 0$, залежать від малого параметра $\varepsilon \in (0,1]$ таким чином, що $\beta_s(i) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Параметрами схеми серій є:

$$\begin{gathered} P_{ij}^{(s)} = P_{ij}^{(s)}(\varepsilon),\ Q_{ij}^{(s)} = Q_{ij}^{(s)}(\varepsilon), i,j \in E, s \geq 0, \\ X_0 = x = x(\varepsilon) \in E, T = T(\varepsilon) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \varepsilon > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Тут T - горизонт ризиків. При $T = \infty$ за означенням $T - 1 = \infty$ та $X_T = 0$.

Зауважимо, що збіжність $\tau \to^{P_i} \infty$ пов'язана з малістю $\beta_s(i) \to 0$, $s \geq 0$, $\varepsilon \to 0$.

Основним об'єктом дослідження є функція банкрутства

$$\varphi_t(i) = P_{ti}(\tau < T). \tag{10}$$

Розподіл моменту τ пов'язаний з наступними випадковими сумами і їх середніми

$$\lambda_t = \sum_{s=t}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1}),$$

$$l_t(i) = \mathrm{E}_{ti}\lambda_t = \mathrm{E}_{ti}\sum_{s=t}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) = \mathrm{E}_{ti}\sum_{s=t}^{T-1} \beta_s(X_s), \tag{11}$$

та

$$\Lambda_t = \sum_{s=t}^{T-1}\sum_{r=s+1}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1})\alpha_r(X_r, X_{r+1}),$$

$$L_t(i) = \mathrm{E}_{ti}\Lambda_t = \mathrm{E}_{ti}\sum_{s=t}^{T-1} \alpha_s(X_s, X_{s+1})l_{s+1}(X_{s+1}) = \mathrm{E}_{ti}\sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s(X_s), \tag{12}$$

де

$$\gamma_s(i) = \sum_j \alpha_s(i,j)l_{s+1}(j)P_{ij}^{(s)}.$$

Доведення (11),(12)**.** Рівність

$$\mathrm{E}_{ti}\alpha_s(X_s, X_{s+1}) = \mathrm{E}_{ti}(\mathrm{E}(\alpha_s(X_s, X_{s+1}) \mid X_s)) = \mathrm{E}_{ti}\beta_s(X_s)$$

є відображенням марковської властивості X та формули для повторного умовного сподівання, що доводить (11).

Аналогічно, при $t \leq s$

$$\begin{gathered} \sum_{r>s} \mathrm{E}_{ti}\alpha_s(X_s, X_{s+1})\alpha_r(X_r, X_{r+1}) = \\ \sum_{r\geq s+1} \mathrm{E}_{ti}(\alpha_s(X_s, X_{s+1})\mathrm{E}(\alpha_r(X_r, X_{r+1}) \mid \mathfrak{F}_{s+1})) = \\ \mathrm{E}_{ti}(\alpha_s(X_s, X_{s+1})\mathrm{E}(\sum_{r\geq s+1} \alpha_r(X_r, X_{r+1}) \mid X_{s+1})) = \\ \mathrm{E}_{ti}(\alpha_s(X_s, X_{s+1})\mathrm{E}_{s+1,X_{s+1}}\lambda_{s+1}) = \mathrm{E}_{ti}(\alpha_s(X_s, X_{s+1})l_{s+1}(X_{s+1}) = \\ \mathrm{E}_{ti}(\mathrm{E}(\alpha_s(X_s, X_{s+1})l_{s+1}(X_{s+1}) \mid X_s)) = \mathrm{E}_{ti}\gamma_s(X_s), \end{gathered}$$

де врахована також марковська властивість та означення середніх $\gamma_s(i)$. Звідси підсумовуванням за s отримуємо (12) $\boxdot$

Надалі будуть використані також рівномірні показники

$$r_\alpha = \sup_{s\geq 0}\sup_{i,j}\alpha_s(i,j), \tag{13}$$

$$r_l = \sup_{s\geq 1}\sup_{j\in A_s} l_s(j), A_s = \cup_{i\in E}\{j\in E : \alpha_s(i,j) > 0\}. \tag{14}$$

4. Межі та асимптотика ймовірності банкрутства

Наступна лема є простим наслідком нерівностей Бонфероні, однак дає можливість отримати досить точні оцінки ризику.

Теорема 1. *Нехай в схемі серій (9) виконується умова $l_0(x) < \infty$.*

(a) Мають місце нерівності

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq l_0(x) - L_0(x). \tag{15}$$

(b) За припущення, що $r_l < 1$ у (14), виконуються оцінки

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq (1 - r_l)l_0(x). \tag{16}$$

(c) За умови $\sup_{\varepsilon>0} r_l < 1$ збіжність $\varphi_0(x) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, еквівалентна збіжності $l_0(x) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

(d) Якщо виконуються умови

$$l_0(x) \to 0, \varepsilon \to 0, \tag{17}$$

та

$$L_0(x) = o(l_0(x)), \varepsilon \to 0, \tag{18}$$

то існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_0(x)/l_0(x) = 1. \tag{19}$$

(e) Для виконання (18) достатньо, щоб $r_l \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ у (14).

(f) Для обчислення функцій l_0, L_0 можна використати пряму рекурсію з матрицями

$$P^{[0]} = I, P^{[s+1]} = P^{(s)}P^{[s]}, s \geq 0,$$

та векторами $\beta_s = (\beta_s(i), i \in E)$, $\gamma_s = (\gamma_s(i), i \in E)$ з (11),(12), оскільки

$$l_0(x) = \sum_{s=0}^{T-1} P^{[s]}\beta_s(x),\ L_0(x) = \sum_{s=0}^{T-1} P^{[s]}\gamma_s(x). \tag{20}$$

Зауваження 1. *Відмінність функціоналу $l_0(x)$ від шуканого $\varphi_0(x)$ полягає у тому, що перший стосується безумовного ланцюга X, та не пов'язаний з граничною задачею, яка задає момент τ. Ця обставина часто спрощує задачу обчислення чи оцінки відповідного значення. Наприклад, процес з незалежними приростами втрачає цю властивість при накладанні умови його поглинання у деякий момент зупинки.*

Зауваження 2. *Нерівність (15) можна використати для практичної апроксимації догранічної імовірності банкрутства $\varphi_0(x)$. Крім того, за (15) з рівності $l_0(x) = 0$ випливає, що $\varphi_0(x) = 0$. Тому надалі можна вважати, що $l_0(x) > 0$.*

Для величин λ_0 з дискретним розподілом (наприклад, для кількостей відвідувань) застосовна наступна

Теорема 2. *Нехай в схемі серій (9) виконується умова (17).*

(a) Якщо для деякого $b > 0$

$$\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0 > b} = o(l_0(x)), \varepsilon \to 0, \tag{21}$$

то мають місце нерівності

$$1 \geq \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varphi_0(x)/l_0(x) \geq \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varphi_0(x)/l_0(x) \geq (1-e^{-b})/b. \tag{22}$$

(b) Якщо умова (21) виконується для кожного $b > 0$, то має місце еквівалентність (19). Для виконання останнього припущення достатньо, щоб

$$\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 \ln^+(\lambda_0/l_0(x)) = o(l_0(x)),\ \varepsilon \to 0. \tag{23}$$

(c) За припущення, що $r_\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$, у (13), виконання умови (21) при всіх $b > 0$, необхідне та достатнє для еквівалентності (19).

Тут величини b не залежать від схеми серій, оскільки вони не перераховані у (9).

Якщо нульове значення величини λ_0 у (11) відділене від додатних значень, то умова (21) не може виконуватись для всіх $b > 0$, оскільки ліва частина (21) дорівнюватиме $l_0(x)$ для достатньо малих b. Таке можливо, наприклад, коли момент τ є цілозначним (зокрема, є моментом досягнення). В цьому разі доцільно застосувати наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай $l_0(x) < \infty$ у схемі серій (9) та*

$$a \equiv \operatorname{ess\,inf}(\lambda_0 : \lambda_0 > 0) > 0. \tag{24}$$

(a) Тоді виконуються нерівності

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq \frac{1-\exp(-a)}{\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)} l_0(x). \tag{25}$$

Зокрема, збіжність $\varphi_0(x) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, виконується тоді і тільки тоді, коли $l_0(x) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

(b) Якщо додатково $\alpha_s(i,j) \in \{0,1\}$, $s \geq 0$, $i,j \in E$, то

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq \frac{1}{\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)} l_0(x). \tag{26}$$

(c) За припущення у (b) та за умови $a = 1$ еквівалентність (19) має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 - 1 \mid \lambda_0 \geq 1) = 0. \tag{27}$$

(d) Для обчислення знаменника у (25), (26) можна застосувати тотожність

$$\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) = a + \sum_{t=a+1}^{T-1}\prod_{s=a}^{t-1}\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 \geq s+1 \mid \lambda_0 \geq s).$$

5. Приклади розподілених ризиків

У наведених нижче прикладах X - загальний неоднорідний ланцюг Маркова на просторі E з перехідними імовірностями $(P_{ij}^{(s)})$ та з моментом зупинки τ, що визначається (2) та Лемою 1 матрицею

$$Q_{ij}^{(s)} = (1-\alpha_s(i,j))P_{ij}^{(s)}, s \geq 0, i,j \in E. \tag{28}$$

5.1. **Скінченна марковська модель ризиків.** Нехай X - неоднорідний ланцюг Маркова на просторі E, $|E| < \infty$, з фіксованим горизонтом $T < \infty$, а ймовірності ризиків у (28) $\alpha_s(i,j) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Тоді виконані всі умови та твердження Теореми 1. Дійсно, в такому разі всі суми є скінченими, а верхні межі є максимумами.

5.2. **Модель ризиків для загальних транзієнтних ланцюгів.** Нехай простір $E = \mathbb{Z}_+$.

(A) Фіксовані часові збурення.

Розглянемо таку модель імовірностей ризиків переходів у (28):

$$\alpha_s(i,j) = \gamma(s) g_s(i,j), \tag{29}$$

де функції γ, g набувають значень з відрізка $[0,1]$.

Введемо позначення $\overline{g}_s(i) = \mathrm{E}_{si} g_s(i, X_{s+1})$.

Припустимо, що:

(a) ряд $\sum_{s=0}^{T-1} \gamma(s)$ збігається рівномірно за $\varepsilon > 0$.

(b) $E_{ti}\overline{g}_s(X_s) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, рівномірно за $0 \le t < s$, $i \in E$.

Наприклад, умова (b) виконується, якщо $\overline{g}_s(j) \to 0$, $\varepsilon \to 0$, рівномірно за s, j у схемі серій.

За даних припущень розглянемо суму

$$l_t(i) = \sum_{s=t}^{T-1} \gamma(s) \mathrm{E}_{ti} \overline{g}_s(X_s) \le \sum_{s=t}^{n} \mathrm{E}_{ti} \overline{g}_s(X_s) + \sum_{s=n+1}^{T-1} \gamma(s).$$

Вибором n другий доданок можна зробити як завгодно малим, далі у першому застосуванням умови (b) доводимо рівномірну за t, i малість $l_t(i)$. Це доводить умову (17) Теореми 1. За цією Теоремою (d) внаслідок вказаної рівномірності виконується також умова (18).

Отже, за твердженням (d) Теореми 1 функції $\varphi_0(x)$ та $l_0(x)$ еквівалентні при $\varepsilon \to 0$, згідно з (19).

(B) Асимптотично нульові часові збурення.

Нехай ймовірності ризиків переходів мають вигляд (29) та задовольняють умови

(a) $\sup_{s \ge 0} \gamma(s) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

(b) ряд $\sum_{s=t}^{T-1} E_{ti}\overline{g}_s(X_s)$ рівномірно за t, i та $\varepsilon > 0$ обмежений.

Тоді має місце рівномірна збіжність

$$l_t(i) \le \sup_{s \ge 0} \gamma(s) \sup_{t,i} \sum_{s=t}^{T-1} \mathrm{E}_{ti} \overline{g}_s(X_s) \to 0, \varepsilon \to 0,$$

та виконуються умови (17), (18) Теореми 1.

Отже, як і вище, має місце еквівалентність (19).

5.3. **Дискретна неоднорідна модель Крамера–Лундберга.** Розглянемо неоднорідний за часом ланцюг Маркова у просторі $E = \mathbb{Z}$, що має вигляд

$$X_t = x + \sum_{s=1}^{t} c_s - \sum_{s=1}^{t} \xi_s = x + \sum_{s=1}^{t} \eta_s, t \in \mathbb{Z}_+, X_0 = x, \tag{30}$$

та інтерпретується як процес динаміки страхового капіталу у часі. Така інтерпретація діє до того моменту поки $X_t \in \mathbb{Z}_+$, однак можна розглядати і іншу частину траєкторії (X_s) - адже тоді можна скористатись незалежністю приростів. В цьому полягає ідея статті. Тут для часових моментів $s \ge 1$:

x - початковий капітал при $t = 0$,

X_t - страховий капітал у момент t,

c_s - сума страхових премій, що надійшли на інтервалі $[s-1, s)$, $c_s \in \mathbb{N}$,

ξ_s - сума страхових збитків, що були сплачені на інтервалі $[s-1, s)$, $\xi_s \in \mathbb{Z}_+$,

$\eta_s = c_s - \xi_s$ - приріст страхового капіталу на $[s-1, s)$.

На практиці припущення дискретності грошових сум не є суттєвим - адже їх можна вимірювати у копійках. Відповідні дробові значення не можливі. Навпаки, модель з неперервною множиною значень потребує додаткових інтерпретацій.

Випадкові величини (ξ_s) (як і (η_s)) є незалежними у сукупності, та задовольняють умову транзієнтності

$$\inf_{s\geq 1}(c_s - \mathrm{E}\xi_s) = \inf_{s\geq 1} \mathrm{E}\eta_s > 0, \sup_{s\geq 1} c_s < \infty. \tag{31}$$

За цими припущеннями $X_t \to^P \infty$, $t \to \infty$.

(A) У однорідному випадку, коли $c_s = c$, а величини (ξ_s) однаково розподілені, інтервали між від'ємними стрибками процесу (30) незалежні та мають геометричний розподіл з параметром $P(\xi_1 \geq 1)$, а тому (30) є дискретним у часі та просторі аналогом моделі Крамера–Лундберга.

(B) У неоднорідний за часом схемі вказані інтервали є незалежними та в залежності від функції $P(\xi_s \geq 1)$, $s \geq 1$, мають загальні дискретні розподіли.

Введемо при $u \geq 0$ перетворення Лапласа

$$f_s(u) = \mathrm{E}\exp(-u\eta_s), s \geq 1, \tag{32}$$

у припущенні Крамера: $f_s(w) \in (1,\infty)$ для деякого $w = w(s) > 0$. За цього припущення та (31) існує $v = v(s) > 0$, що є розв'язком рівняння $f_s(v) = 1$, причому $f_s(u) < 1$ для всіх $u \in (0, v)$.

Рівномірний варіант умови Крамера полягає у тому, що

$$\delta_0 \equiv \sup(u > 0 : \sup_{s\geq 1} f_s(u) < \infty) > 0. \tag{33}$$

Одночасно використовуватимемо умову Крамера–Лундберга про існування $\delta > 0$ такого, що для деякого $\rho(\delta)$ та ρ

$$\sup_{s\geq 1} f_s(\delta) \leq \rho(\delta) \leq \rho < 1. \tag{34}$$

Лема 3. *Для виконання (34) достатньо, щоб одночасно з (31) для деякого* $u > 0$

$$\sup_{s\geq 1}(\mathrm{E}\eta_s^2 + f_s(u)) < \infty. \tag{35}$$

За умови (33) для даного $\delta \in (0, \delta_0)$, і сталих $\gamma_s \geq 0$ коректно визначений показник

$$\gamma_t(\delta) = \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \prod_{r=t+1}^{s+1} f_r(\delta). \tag{36}$$

Зауважимо, що за припущення (34) на показник δ можна оцінити

$$\gamma_t(\delta) \leq \sup_{s\geq t} \gamma_s \rho/(1-\rho). \tag{37}$$

Позначимо також випадкову величину, що не зростає за $\delta > 0$:

$$\lambda_t(\delta) = \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) 1_{X_{s+1}\geq 0}. \tag{38}$$

У таких позначеннях внаслідок незалежності приростів ланцюга X та означень (30), (32), (36) виконуються співвідношення

$$\mathrm{E}_{ti}\lambda_t(\delta) \leq \mathrm{E}_{ti} \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \exp(-\delta X_{s+1}) = \exp(-\delta i)\gamma_t(\delta). \tag{39}$$

Перша нерівність очевидна з огляду на (38). Рівність у (39) випливає з незалежності приростів (η_s) у (30) та з (32):

$$\mathrm{E}_{ti}\exp(-\delta X_{s+1}) = \mathrm{E}\exp(-\delta(i + \sum_{r=t+1}^{s+1} \eta_r)) = \exp(-\delta i) \prod_{r=t+1}^{s+1} f_r(\delta).$$

5.4. **Розподілені ризики у моделі Крамера–Лундберга.** Нехай $(P_{ij}^{(s)})$ - перехідні імовірності для ланцюга (30), перехідна матриця (2) для момента зупинки τ має вигляд (28), де ймовірності ризиків переходів дорівнюють

$$\alpha_s(i,j) = \gamma_s \exp(-\delta j) 1_{j\geq 0}, \tag{40}$$

для деяких $\gamma_s \in [0,1]$ та $\delta \in (0, \delta_0)$ за умови (33).

Відповідно до (40) випадкові величини у (11), що породжують нормуючу функцію $l_0(x)$, згідно з (38) дорівнюють $\lambda_t = \lambda_t(\delta)$. Зокрема,

$$l_0(x) = \mathrm{E}_{0x}\lambda_0(\delta).$$

(A) Еквівалентність у схемі серій

Припустимо, що у схемі серій (9) горизонт $T = \infty$, умова Крамера–Лундберга (34) виконується для показника $\delta > 0$ у (40), а також

$$\sup_{s\geq 0} \gamma_s \to 0, \varepsilon \to 0,\ x = X_0 \geq 0.$$

Тоді з урахуванням (34), (36) та (38), (39), (37) виводимо умову (17) Теореми 1:

$$l_0(x) = \mathrm{E}_{0x}\lambda_0(\delta) \leq \exp(-\delta x)\gamma_0(\delta) \leq$$
$$\exp(-\delta x) \sup_{s\geq 0} \gamma_s \rho/(1-\rho) \to 0,\ \varepsilon \to 0. \tag{41}$$

Далі, у позначеннях (14) маємо $A_s = \{j : j \geq 0\}$. Тому згідно з (14), (39) та (37)

$$r_l \leq \sup_{i\geq 0} \exp(-\delta i) \sup_{s\geq 0} \gamma_s \rho/(1-\rho) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Отже, виконана умова Теореми 1 (d), а з нею і умова (18) цієї Теореми.

Теорема 4. *За вказаних умов має місце твердження (d) Теореми 1, тобто еквівалентність (19).*

Для її практичного застосування можна використати нерівність (41).

(B) Верхня межа для ймовірності банкрутства

Теорема 5. *За припущення (34) з Теореми 1 (a) та з (39),(37) при $x \geq 0$ виконуються співвідношення*

$$\varphi_0(x) \leq l_0(x) \leq \bar{l}_0(x) \equiv \exp(-\delta x)\gamma_0(\delta) \leq \exp(-\delta x)\rho/(1-\rho). \tag{42}$$

Зауважимо, що стала ρ не входить до схеми серій (9), та що $\bar{l}_0(x) \to 0$ вже при $x \to \infty$, навіть для довільних фіксованих γ_s у (40).

(C) Нижня межа для ймовірності банкрутства

Припустимо, що виконується умова (34), а стала $\beta \in (0, \delta)$. Нехай також для всіх t показник (36) задовольняє обмеження

$$\gamma_t(\beta) \leq 1, t \geq 1. \tag{43}$$

З (34) випливає, що для кожного $\beta \in (0, \delta)$ показник $\rho(\beta) \equiv \sup_{s\geq 1} f_s(\beta) < 1$, тобто умова (34) виконується при $\rho = \beta$. Очевидною оцінкою у (36) перевіряємо, що для виконання (43) достатньо, щоб

$$\sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \rho^{s-t+1}(\beta) \leq 1, t \geq 1. \tag{44}$$

Нарешті, для виконання (44) достатньо, щоб мала місце одна з двох умов

$$\sum_{s=1}^{T-1} \gamma_s \leq 1/\rho(\beta), \text{або} \gamma_t \leq 1/\rho(\beta) - 1, t \geq 1. \tag{45}$$

Теорема 6. *За умов (34) та (43) для довільного фіксованого $\beta \in (0, \delta)$ має місце нерівність*

$$\varphi_0(x) \geq \underline{l}_0(x) \equiv \exp(-\delta x)[\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)]. \tag{46}$$

(D) Двостороння нерівність для ймовірності банкрутства

За припущення (34) у (42) та (46) наведені такі рівномірні за $x \geq 0$ оцінки

$$\gamma_0(\delta) \geq \exp(\delta x)\varphi_0(x) \geq \gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta) \tag{47}$$

для кожного $\beta \in (0, \delta)$, що задовольняє (43).

З (34) випливає (33). Функція $\gamma_0(u)$, $u \in (0, \delta_0]$, у (36), є опуклою донизу, скінченою при $u \leq \delta$, двічі диференційованою, та спадає у правому околі нуля. Тому додатним є показник

$$\delta_1 = \inf(u \in (0, \delta_0) : \gamma_0(u) = \infty, \text{або} \partial/\partial u \gamma_0(u) \geq 0) > 0, \tag{48}$$

що у випадку $\delta_1 < \delta_0$ є єдиним коренем рівняння $\partial/\partial u \gamma_0(u) = 0$. За означенням показника δ_1 функція $\gamma_0(u)$ строго спадає при $u \in (0, \delta_1)$, а отже, права частина (47) строго додатна за умови $\delta \in (0, \delta_1)$ для всіх достатньо малих $\beta \in (0, \delta_1)$.

Теорема 7. *Для кожного $\delta \in (0, \delta_1)$ існує*

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1} \ln \varphi_0(x) = -\delta. \tag{49}$$

6. Приклади для моментів першого досягнення

Моменти першого досягнення як моменти банкрутства мають ту специфіку, що відповідні ймовірності ризиків $\alpha_s(i, j)$ не є рівномірно малими, оскільки набувають значень 0 та 1. Натомість малими є відповідні ймовірності настання ризикових подій.

6.1. **Матриця ризиків для загальних моментів досягнення.** Нехай X - неоднорідний за часом ланцюг Маркова з перехідними імовірностями $(P_{ij}^{(s)})$ у просторі E.

Визначимо для набору множин $D_s \subset E$, $D_0 = \varnothing$, $C = \prod_{s=0}^{\infty} D_s$, марковський момент

$$\tau_C = \inf(t \geq 1 : X_t \in D_t), \tag{50}$$

де за вибором $X_0 \notin D_0$.

Теорема 8. *Нехай $\tau = \tau_C$. Тоді перехідну матрицю (2) можна визначити як у (28), де*

$$\alpha_s(i, j) = 1_{i \notin D_s, j \in D_{s+1}}, s \geq 0,$$
$$1 - \alpha_s(i, j) = 1_{i \notin D_s, j \notin D_{s+1}} + 1_{i \in D_s},\ s \geq 0. \tag{51}$$

Зокрема, в (7)

$$\beta_s(i) = \mathrm{P}_{si}(X_{s+1} \in D_{s+1}) 1_{i \notin D_s}. \tag{52}$$

6.2. **Момент банкрутства для дискретної моделі Крамера–Лундберга.** Знову розглянемо ланцюг Маркова (30) на просторі $E = \mathbb{Z}$, що є дискретною неоднорідною у часі моделлю Крамера–Лундберга, з горизонтом $T = \infty$. Визначимо з (50) марковський момент $\tau = \tau_C$ для множин $D_t = D = \{i \in E : i < 0\}$. Тоді τ можна інтерпретувати як класичний момент банкрутства

$$\tau = \inf(t \geq 1 : X_t < 0).$$

Підстановкою у (11) імовірностей ризиків (51) знаходимо

$$\lambda_t = \sum_{s=t}^{\infty} 1_{X_s \geq 0,\ X_{s+1} < 0} = \sum_{s=t}^{\infty} 1_{X_{s+1} < 0 \leq X_s},$$

$$\beta_s(i) = 1_{i \geq 0} \mathrm{P}_{si}(X_{s+1} < 0) = 1_{i \geq 0} \mathrm{P}(\eta_{s+1} < -i),$$

$$l_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{E}_{0x} 1_{X_s \geq 0, X_{s+1} < 0} =$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{P}_{0x}(0 \le X_s < -\eta_{s+1}) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{P}(T_{s+1} < -x \le T_s), \tag{53}$$

де

$$T_s = \sum_{j=1}^{s} \eta_j, T_0 = 0.$$

Для чисельного знаходження $l_0(x)$ можна застосувати метод послідовних наближень, що викладено у Теоремі 1 (f).

Точна експоненційна асимптотика у однорідній за часом моделі визначається з рівняння відновлення

$$l_0(i) = l(i) = 1_{i \ge 0}\mathrm{P}(\eta_1 < -i) + \sum_{j \in E} l(j) P_{ij}^{(0)} =$$

$$1_{i \ge 0}\mathrm{P}(\eta_1 < -i) + \sum_{j \in E} l(j)\mathrm{P}(-\eta_1 = i - j). \tag{54}$$

В теоремі Крамера–Лундберга, що базується на (54), відповідний показник експоненційної асимптотики $l_0(x)$ дорівнює єдиному додатному кореню δ_0 рівняння $f_1(\delta_0) = 1$, причому існує додатна границя

$$\lim_{x \to \infty} \exp(\delta_0 x)\varphi_0(x) = G \equiv$$

$$\mathrm{E}[(\exp(-\delta_0\eta_1) - 1)1_{\eta_1 < 0}]/(\exp(\delta_0) - 1)\mathrm{E}[\eta_1 \exp(-\delta_0\eta_1)].$$

У загальному (неоднорідному) випадку збіжність $l_0(x)$ до нуля випливає з рівностей у (53), (39), з (36) і (37) для $\gamma_s \equiv 1$, та з умови (34):

$$l_0(x) \le \mathrm{E}_{0x} \sum_{s=0}^{\infty} 1_{X_{s+1} \le 0} \le$$

$$\mathrm{E}_{0x} \sum_{s=0}^{\infty} \exp(-\delta X_{s+1}) = \gamma_0(\delta) \le \exp(-\delta x)\rho/(1 - \rho). \tag{55}$$

Зауважимо, що застосування (55) у однорідній схемі, де $\rho = f_1(\delta) < 1$, гарантує для $l_0(x)$ експоненційний показник $\delta > 0$. Верхня межа таких δ дорівнює показнику Крамера–Лундберга δ_0. Тому верхню оцінку (55) не можна покращити за порядком збіжності, навіть у однорідному випадку.

Доведення (53) грунтується на зображенні (30), як у Теоремі 4. Рівняння (54) виводиться методом першого стрибка з означення (53), та використовує незалежність приростів $(\eta_s, s \ge 1)$. Нерівності (55) очевидні. Рівність у (55) отримуємо підстановкою $\gamma_s = 1$ у (39) $\boxdot$

Оскільки за Теоремою 4 ймовірності ризиків $\alpha_s(i,j) \in \{0, 1\}$, для аналізу ймовірності банкрутства $\varphi_0(x)$ можна застосувати твердження (b), (d) Теореми 3.

Теорема 9. *Припустимо, що для деякого $\delta > 0$ має місце умова Крамера–Лундберга (34). З неоднорідного рівняння відновлення (54) випливає така верхня оцінка*

$$\varphi_s(i) \le \rho\exp(-\delta i), i \ge 0, s \ge 0. \tag{56}$$

Звідси з нерівності (26) Теореми 3 виводимо двобічну нерівність

$$l_0(x) \ge \varphi_0(x) \ge (1 - \rho)l_0(x), x \ge 0. \tag{57}$$

Тут та у (56) показник $\rho = \rho(\delta)$ є правою частиною (34). Зауважимо, що для оптимізації (57) слід обрати $\delta = \arg\min_{\delta > 0} \rho(\delta)$.

Цікаво, що з (57) та (56) випливає (55), хоча ці нерівності отримані різними методами.

Теорема 10. *Застосування (56) та рівняння відновлення (54) у тому ж припущенні (34) призводить до більш практичної двобічної оцінки*

$$\rho \exp(-\delta x) \geq \varphi_0(x) \geq b \exp(-\beta x), x \geq 0, \tag{58}$$

де показник $\beta \in (\delta, \delta_0)$ *такий, що*

$$\inf_{s \geq 1} f_s(\beta) \geq 1. \tag{59}$$

Стала b обчислена явно (у доведенні) через розподіли величин η_s. Доведено додатність $b > 0$, коли нерівність (59) є строгою. У однорідному випадку $b > 0$ при виборі β як показника Крамера–Лундберга, тобто права оцінка у (58) є точною за порядком.

6.3. **Момент досягнення для однорідного процесу народження та загибелі.** Розглянемо однорідний ланцюг Маркова X на $E = \mathbb{Z}_+$ з перехідною матрицею за один крок $P = P^{(s)} = (p_{ij}, i, j \in E)$, що складається з імовірностей $p_{i,i+1} = p_i > 0$, $i \geq 0$, $p_{i,i-1} = q_i > 0$, $i \geq 1$, $p_{00} = q_0 > 0$, $p_i + q_i = 1$, $i \geq 0$. Ланцюг є незвідним, горизонт $T = \infty$. Матрицю переходів за n кроків позначимо як $P^{[n]} = (P)^n$.

Розглянемо момент досягнення (банкрутства)

$$\tau = \tau_0 = \inf(t \geq 1 : X_t = 0).$$

Перехідна матриця (2) має вигляд (28), де

$$\alpha_s(i, j) = 1_{j=0},$$

відповідно у (11)

$$\lambda_t = \sum_{s=t}^{\infty} 1_{X_{s+1}=0}. \tag{60}$$

Визначимо показники

$$\theta_i = \prod_{s=1}^{i} \frac{q_s}{p_s}, i \geq 1, \theta_0 = 1.$$

Наведені нижче явні формули добре відомі.

Лема 4. *За умови збіжності ряду*

$$\theta \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \theta_s < \infty, \tag{61}$$

виконуються співвідношення

$$l_0(x) = \sum_{i=x}^{\infty} \theta_i, x > 0, \pi \equiv \mathrm{P}_{01}(\tau_0 < \infty) = 1 - 1/\theta. \tag{62}$$

Теорема 11. *З Леми 4 та Теореми 3 (b) випливають за умови (61) нерівності*

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq \theta^{-1} l_0(x), x \geq 0. \tag{63}$$

Гранична теорема для розподілу моменту $\tau_0 \to \infty$ у схемі серій наведена у [7, 2013].

7. Доведення

Доведення Леми 1 спирається на формулу для ймовірності перетину t подій вигляду $A_s = \{\tau > s, X_1 = i_1, \dots X_s = i_s\}$ та марковську властивість ланцюга X. Необхідність отримуємо шляхом підсумовування за $i_1, \dots, i_{t-1}$ та ділення безумовної імовірності A_{s+1} на ймовірність A_s. Нерівність (4) є наслідком монотонності

$$Q_{ij}^{(s)} \le \mathrm{P}(X_{s+1} = j \mid \tau > s, X_s = i) = P_{ij}^{(s)}$$

та марковської властивості τ. $\boxdot$

Доведення Леми 2. Підстановкою тотожності означення (6) отримуємо

$$(1 - \alpha_s(i,j))P_{ij}^{(s)} = P_{ij}^{(s)} - R_{ij}^{(s)} = Q_{ij}^{(s)},$$

звідки за Лемою 1

$$\mathrm{P}_{0i}(\tau > s,\ X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t) = \prod\nolimits_{r=0}^{s-1} Q_{i_r, i_{r+1}}^{(r)} =$$

$$\prod\nolimits_{r=0}^{s-1} (1 - \alpha_r(i_r, i_{r+1}))P_{i_r, i_{r+1}}^{(r)} \boxdot$$

Доведення Теореми 1.

За нерівностями Бонфероні для довільних $(a_s, 0 \le s < T) \subset [0,1]$

$$1 - \sum_{s \ge 0} a_s \le \prod_{s \ge 0} (1 - a_s) \le 1 - \sum_{s \ge 0} a_s + \sum_{s \ge 0} \sum_{r > s} a_s a_r,$$

$$1 - \sum_{s \ge 0} a_s \le \prod_{s \ge 0} (1 - a_s) \le \exp(-\sum_{s \ge 0} a_s).$$

Підстановка у ці нерівності значень $a_s = \alpha_s(X_s)$ при скінченому T та перехід до математичного сподівання E_{0i} призводить за означеннями (11), (12) до нерівностей

$$(a) \mathrm{E}_{0i} \lambda_0 \ge \varphi_0(i) \ge \mathrm{E}_{0i} \lambda_0 - \mathrm{E}_{0i} \Lambda_0,$$

$$(b) \mathrm{E}_{0i} \lambda_0 \ge \varphi_0(i) \ge \mathrm{E}_{0i}(1 - \exp(-\lambda_0)),$$

Ці нерівності при $T = \infty$ виводимо граничним переходом за теоремою Лебега про монотонну збіжність з урахуванням скінченності $\mathrm{E}_{0i}\lambda_0$.

(a). Шукана нерівність є очевидним наслідком останніх оцінок та означень (11), (12).

(b). За означеннями (14), (12)

$$L_t(i) = \sum_{s=t}^{T-1} \mathrm{E}_{ti} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) 1_{X_{s+1} \in A_{s+1}} l_{s+1}(X_{s+1}) \le$$

$$\sum_{s=t}^{T-1} \mathrm{E}_{ti} \alpha_s(X_s, X_{s+1}) r_l = r_l l_t(i),$$

тому (b) випливає з (a) після підстановки у попередню нерівність $t = 0$, $i = x$.

(c). Шукана еквівалентність є простим наслідком (b).

(d). Аналогічно до доведення (b) з (a) та (18) виводимо, що

$$1 \ge \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \ge \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \ge \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{L_0(x)}{l_0(x)}\right) = 1.$$

(e). Далі, з нерівності у доведенні (b) та умови отримуємо умову (18)

$$L_0(x)/l_0(x) \le r_l \to 0, \varepsilon \to 0.$$

(f) За означенням $P^{[s]} = P^{(0,s)}$ у (1), тому

$$P^{[s]} \beta_s(i) = P^{(0,s)} \beta_s(i) = \mathrm{E}_{0i} \beta_s(X_s),$$

що за означенням (11) доводить першу рівність у (20). Друга виводиться аналогічно з урахуванням (12) ⊡

Доведення Теореми 2.

(a). З урахуванням спадання функції $(1-\exp(-x))/x \downarrow$, $x \geq 0$, з Леми 3 (b) отримуємо

$$\varphi_0(x) \geq \mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0)) =$$
$$\mathrm{E}_{0x}\left(\frac{1-\exp(-\lambda_0)}{\lambda_0}\lambda_0 1_{\lambda_0 \leq b}\right) + \mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0))1_{\lambda_0 > b} \geq$$
$$(1-\exp(-b))b^{-1}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 \leq b}) + \mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0))1_{\lambda_0 > b}.$$

Звідси

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\varphi_0(x)/l_0(x) \geq (1-\exp(-b))b^{-1}\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 \leq b})/l_0(x) +$$
$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0))1_{\lambda_0 > b}/l_0(x) = (1-\exp(-b))b^{-1}1 + 0,$$

де одночасно з умовою (21) використані співвідношення

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0))1_{\lambda_0 > b}/l_0(x) \leq \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 > b})/l_0(x) = 0.$$

(b). Для доведення (19) достатньо обрати $b \to 0$ у (22).

За умови (23) сім'я випадкових величин $(\lambda_0/l_0(x), \varepsilon > 0)$ є рівномірно інтегровною, оскільки за критерієм Вале–Пусена з функцією $V(z) = z\ln^+ z$, $z \geq 0$, має місце зображення $\mathrm{E}_{0x}V(\lambda_0/l_0(x)) = O(1)$, $\varepsilon \to 0$. Тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 1_{\lambda_0 > b})/l_0(x) = 0$$

внаслідок збіжності $\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 > b) \leq l_0(x)/b \to 0$, $\varepsilon \to 0$, для кожного $b > 0$.

(c). Визначимо такі функції

$$\overline{\alpha}_s(i,j) = -\ln(1-\alpha_s(i,j)) < \infty$$

при $r_\alpha < 1$, та величини

$$\overline{\lambda}_0 = \sum_{s=0}^{T-1}\overline{\alpha}_s(X_s, X_{s+1}), \overline{l}_0(x) = \mathrm{E}_{0x}\overline{\lambda}_0.$$

Тоді для сталої

$$K_\alpha \equiv \sup_{0\leq\alpha\leq r_\alpha}(-\alpha^{-1}\ln(1-\alpha)) = r_\alpha^{-1}\ln(1/(1-r_\alpha)) < \infty \tag{64}$$

виконуються нерівності

$$\alpha_s(i,j) \leq \overline{\alpha}_s(i,j) \leq K_\alpha\alpha_s(i,j),$$
$$\lambda_0 \leq \overline{\lambda}_0 \leq K_\alpha\lambda_0,\ l_0(x) \leq \overline{l}_0(x) \leq K_\alpha l_0(x). \tag{65}$$

Крім того, з означення $\overline{\alpha}_s$ та з Леми 2 випливає тотожність

$$\varphi_0(x) = 1 - \mathrm{E}_{0x}\prod_{s=0}^{T-1}(1-\alpha_s(X_s, X_{s+1})) =$$
$$1 - \mathrm{E}_{0x}\exp\left(-\sum_{s=0}^{T-1}\overline{\alpha}_s(X_s, X_{s+1})\right) = \mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\overline{\lambda}_0)). \tag{66}$$

Позначивши $h(b) = b - 1 + \exp(-b) \geq 0$, для кожного $b > 0$ з (65), (66) виводимо

$$1 - \varphi_0(x)/l_0(x) + K_\alpha - 1 \geq$$
$$1 - \varphi_0(x)/l_0(x) + (\overline{l}_0(x) - l_0(x))/l_0(x) = \mathrm{E}_{0x}h(\overline{\lambda}_0)\overline{\lambda}_0^{-1}\overline{\lambda}_0 1_{\overline{\lambda}_0 \geq b}/\overline{l}_0(x) \geq$$
$$\mathrm{E}_{0x}h(\overline{\lambda}_0)\overline{\lambda}_0^{-1}\overline{\lambda}_0 1_{\overline{\lambda}_0 \geq b}/\overline{l}_0(x) \geq h(b)b^{-1}\mathrm{E}_{0x}\overline{\lambda}_0 1_{\overline{\lambda}_0 \geq b}/K_\alpha l_0(x) \geq$$
$$h(b)b^{-1}K_\alpha^{-1}\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0 \geq b}/l_0(x),$$

де враховано, що функція $h(b)/b$ не зростає.

Якщо $\varphi_0(x)/l_0(x) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, з останніх нерівностей отримуємо

$$h(b)b^{-1}1\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0\geq b}/l_0(x) \leq 0 + \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}(K_\alpha - 1) = 0,$$

оскільки з умови $r_\alpha \to 0$ випливає, що $K_\alpha \to 1$ у (64) $\boxdot$

Доведення Теореми 3.

(a). Зауважимо, що $l_0(x) = \mathrm{E}_{0x}\lambda_0 = \mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0\geq a}$ внаслідок (24). Тому за другою нерівністю у доведенні Теореми 1

$$\frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \geq \frac{\mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0))}{l_0(x)} = \frac{\mathrm{E}_{0x}(1-\exp(-\lambda_0))1_{\lambda_0\geq a}}{\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0\geq a}} \geq$$

$$(1-\exp(-a))\frac{\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0\geq a)}{\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0\geq a}} = \frac{1-\exp(-a)}{\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a)}.$$

(b). З означення (11) виводимо, що $\lambda_0 \in \mathbb{Z}_+$. Тому $a \in \mathbb{N}$.

Виходячи з елементарної тотожності для $a_s \in \{0,1\}$

$$\prod_{s=0}^{\infty}(1-a_s) = 1_{\sum_{s=0}^{\infty} a_s = 0},$$

за означенням (11) отримуємо

$$\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 \geq \varphi_0(x) = 1 - \mathrm{E}_{0x}\prod_{s=0}^{T-1}(1-\alpha_s(X_s, X_{s+1})) =$$

$$\mathrm{E}_{0x}(1-1_{\lambda_0=0}) = \mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 > 0). \tag{67}$$

Нарешті, як і в (a), виводимо з (67)

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) = \frac{\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0>0)}{\mathrm{E}_{0x}\lambda_0}l_0(x) =$$

$$\frac{\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0\geq a)}{\mathrm{E}_{0x}\lambda_0 1_{\lambda_0\geq a}}l_0(x) = \frac{1}{\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0\geq a)}l_0(x).$$

(c). З нерівності (26) виводимо, що

$$1 \geq \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} \geq \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi_0(x)}{l_0(x)} = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0\geq 1)}.$$

Тут права частина дорівнює одиниці тоді і тільки тоді, коли

$$1 = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq 1) = 1 + \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 - 1 \mid \lambda_0\geq 1),$$

що і доводить (27).

(d) Обчислимо

$$\mathrm{E}_{0x}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) = \sum_{t=1}^{\infty}\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 \geq t \mid \lambda_0 \geq a) =$$

$$a + \sum_{t=a+1}^{\infty}\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0\geq t \mid \lambda_0 \geq a) = a + \sum_{t=a+1}^{\infty}\prod_{s=a}^{t-1}\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 \geq s+1 \mid \lambda_0 \geq s)\boxdot$$

Доведення Леми 3.

Нехай $\mathrm{E}\eta_s \geq \mu > 0$, а функція

$$g(x,v) = x^2\exp(v\max(-x,0)), x\in\mathbb{R}.$$

За означенням при $\delta \leq u/2 < u$

$$g(x,\delta) \leq g(x,u/2) = x^2 1_{x\geq 0} + x^2\exp(x^- u/2)1_{x<0} \leq$$

$$x^2 + C_u\exp(-ux).$$

З нерівності $\exp(-x)-1+x \le g(x,1)$ вибором $x=\delta\eta_s$, $\delta \le u/2$ знаходимо

$$f_s(\delta)=\mathrm{E}\exp(-\delta\eta_s) \le 1-\delta\mu+\delta^2 D,$$

де

$$D \le \sup_{s\ge1} \mathrm{E}g(\eta_s,\delta) \le D_u \equiv \sup_{s\ge1} \mathrm{E}[\eta_s^2 + C_u\exp(-u\eta_s)] < \infty,$$

а остання нерівність не залежить від вибору достатньо малого $\delta > 0$.

Нарешті, вибір $\delta = \min(u/2, \mu/2D_u)$ забезпечує оцінку $\rho \le 1-\delta\mu/2D_u < 1$ ⊡

Доведення Теореми 4.

За умови (33) перетворення Лапласа $f_s(u)$ у (32) є скінченими, двічі диференційовними при $u \in (0,\delta_0)$ та мають внаслідок (31) обмежені другі похідні

$$f_s''(u) = \mathrm{E}\eta_s^2\exp(-u\eta_s) \le \sup_{s\ge1} c_s^2 + C_{uv}\sup_{s\ge1} f_s(v) < \infty \tag{68}$$

для довільного $v \in (u,\delta_0)$, де $C_{uv} = \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2(\exp(-ux)-1)\exp(vx)$.

Звідси стандартними обчисленнями виводимо логарифмічну опуклість (та просто опуклість) функції $f_s(u)$, оскільки

$$(\ln f_s(u))'' = (f_s''(u)f_s(u) - f_s'^2(u))/f_s^2(u) \ge 0$$

за нерівністю Коші.

З (33), опуклості, та (34) виводимо також, що при $0<\beta<\delta<\delta_0$

$$f_s(\beta) \le 1-(1-\rho)\beta/\delta = \gamma(\beta) < 1, \tag{69}$$

тобто умова (34) виконується також при кожному $\beta \in (0,\delta)$.

Для обгрунтування достатності (44) оцінимо з (34) при $\delta=\beta$ та з означення $\gamma_t(\delta)$ (36)

$$\gamma_t(\beta) \le \sum_{s=t}^{T-1} \gamma_s \rho^{s-t+1}(\beta) \le 1.$$

Достатність (45) випливає з нерівності $\rho(\beta) < 1$ ⊡

Доведення Теореми 6.

Розглянемо за означеннями (11), (40), (38) з урахуванням вибору $\beta \in (0,\delta)$:

$$l_t(i) = \mathrm{E}_{ti}\lambda_t(\delta) \le \mathrm{E}_{ti}\lambda_t(\beta) \le \exp(-\beta i)\gamma_t(\beta) \le \exp(-\beta i),\ i \ge 0,$$

де використано також (39) та умову (43).

Далі, за означеннями (11), (12), (40) згідно з твердженням (a) Теореми 1 та останньої нерівності

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) \ge l_0(x) - L_0(x) = \mathrm{E}_{0x}\sum_{s=0}^{T-1}\gamma_s\exp(-\delta X_{s+1})1_{X_{s+1}\ge0}(1-l_{s+1}(X_{s+1})) \ge \\ \mathrm{E}_{0x}\sum_{s=0}^{T-1}\gamma_s\exp(-\delta X_{s+1})1_{X_{s+1}\ge0}(1-\exp(-\beta X_{s+1})) \ge \\ \mathrm{E}_{0x}\sum_{s=0}^{T-1}\gamma_s\exp(-\delta X_{s+1})(1-\exp(-\beta X_{s+1})) = \\ \exp(-\delta x)[\gamma_0(\delta)-\gamma_0(\delta+\beta)] = \underline{l}_0(x),\end{aligned} \tag{70}$$

де також врахований співвідношення (39) ⊡

Доведення Теореми 7.

Як вказано у доведенні Теореми 6, функції $f_s(u)$ у (32) логарифмічно опуклі та двічі диференційовні на $(0,\delta)$. Тому їх добуток у (36) має такі ж властивості, а їх опукла комбінація $\gamma_0(u)$ є опуклою та двічі диференційовною. Скінченність $\gamma_0(u) < \infty$ при $u \in (0,\delta)$ випливає з нерівності (69).

Далі, з умови транзієнтності (31) виводимо, що $f_s'(0) = -\mathrm{E}\eta_s < 0$, а з опуклості випливає, що похідна $f_s'(u)$ не спадає. Внаслідок (68) друга похідна $f_s''(u) \le F$, $u \in [0, \delta)$, $s \ge 0$ - рівномірно обмежена. Тому у непорожньому околі нуля

$$f_s'(u) < 0, u \in (0, \inf_{s \ge 1}(\mathrm{E}\eta_s)/F), s \ge 1.$$

Отже, функція $\gamma_0(u)$ також спадає у тому ж інтервалі для u.

Додатність δ_1 у (48) випливає з неперервності похідної $\gamma_0'(u)$, $u \in (0, \delta)$.

Додатність приросту $\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)$ є наслідком спадання функції $\gamma_0(u)$ при $u \in (0, \delta_1)$.

Нарешті, з (47) виводимо нерівність

$$-\delta + x^{-1} \ln \gamma_0(\delta) \le x^{-1} \ln \varphi_0(x) \le -\delta + x^{-1} \ln(\gamma_0(\delta) - \gamma_0(\delta + \beta)),$$

звідки при $x \to \infty$ отримуємо (49) ⊡

Доведення Теореми 8.

Позначимо $i_0 = x \notin D_0$. Розглянемо при $i_s \in E$ за означеннями (28), (51)

$$\prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)} = \prod_{s=0}^{t-1} \left([1_{i_s \notin D_s, i_{s+1} \notin D_{s+1}} + 1_{i_s \in D_s}] P_{i_s, i_{s+1}}^{(s)} \right) =$$

$$\prod_{s=0}^{t-1} \left([1_{i_s \notin D_s, i_{s+1} \notin D_{s+1}}] P_{i_s, i_{s+1}}^{(s)} \right) = \mathrm{P}_{0x}(X_1 = i_1 \notin D_1, \ldots, X_t = i_t \notin D_t) =$$

$$\mathrm{P}_{0x}(\tau_C > t, X_1 = i_1, \ldots, X_t = i_t).$$

З іншого боку, при $i_t = i$

$$\mathrm{P}_{0x}(\tau_C > t+1, X_{t+1} = j \mid \tau_C > t, X_t = i) =$$

$$\frac{\mathrm{P}_{0x}(\tau_C > t+1, X_{t+1} = j, X_t = i)}{\mathrm{P}_{0x}(\tau_C > t, X_t = i)} = \frac{\sum_{i_1, \ldots, i_{t-1} \in E} [\prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)}] Q_{ij}^{(t)}}{\sum_{i_1, \ldots, i_{t-1} \in E} [\prod_{s=0}^{t-1} Q_{i_s, i_{s+1}}^{(s)}]} = Q_{ij}^{(t)}.$$

Отже, (51) є наслідком (3) ⊡

Доведення Теореми 9.

Зауважимо, що функція банкрутства $\varphi_s(i)$ у моделі (30) задовольняє неоднорідне рівняння відновлення

$$\varphi_{s-1}(i) = \mathrm{P}(\eta_s < -i) + \mathrm{E}\varphi_s(i + \eta_s) 1_{i + \eta_s \ge 0}, s \ge 1, i \ge 0. \tag{71}$$

Розглянемо Банахів простір $\mathfrak{N}_\delta$ функцій $g : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|g\| = \sup_{s \ge 0} \sup_{i \ge 0} \exp(\delta i) \left| g_s(i) \right|,$$

та лінійний субстохастичний оператор T на $\mathfrak{N}_\delta$

$$(Tg)_{s-1}(i) = \mathrm{E} g_s(i + \eta_s) 1_{i + \eta_s \ge 0}, s \ge 1, i \ge 0.$$

Оскільки $|g_s(i)| \le \exp(-\delta i) \|g\|$, то

$$\|Tg\| / \|g\| \le \sup_{s \ge 1} \sup_{i \ge 0} \exp(\delta i) \mathrm{E} \exp(-\delta(i + \eta_s)) 1_{i + \eta_s \ge 0} \le$$

$$\sup_{s \ge 1} \mathrm{E} \exp(-\delta \eta_s) = \sup_{s \ge 1} f_s(\delta) \le \rho < 1,$$

за умовою (34).

Отже, оператор T - строго стискаючий. Тому рівняння вигляду $g = h + Tg$ при $h \in \mathfrak{N}_\delta$ має у $\mathfrak{N}_\delta$ єдиний розв'язок g, що збігається з мінімальним [5], [2, 1996]: $g = \sum_{s \ge 0} T^s h$. Звідси випливає такий принцип порівняння: якщо $\overline{g} = \overline{h} + T\overline{g}$ для деякого $\overline{h} \in \mathfrak{N}_\delta$ та поточково $h \le \overline{h}$, то $g \le \overline{g}$.

Рівняння (71) має вигляд $\varphi = \psi + T\varphi$, де $\psi_{s-1}(i) = \mathrm{P}(i + \eta_s < 0)$, $s \geq 1$. Оберемо $\overline{\varphi}_s(i) = \rho \exp(-\delta i)$. Тоді $\overline{\varphi} = \overline{\psi} + T\overline{\varphi}$, де $\overline{\psi} = \overline{\varphi} - T\overline{\varphi}$. Звідси з використанням (32) та нерівностей

$$\exp(\delta i)\mathrm{P}(i + \eta_s < 0) \leq \mathrm{E}\exp(-\delta\eta_s)1_{i+\eta_s<0} \leq f_s(\delta)$$

отримуємо при $s \geq 1$, $i \geq 0$

$$\begin{gathered}\exp(\delta i)[\overline{\psi}_{s-1}(i) - \psi_{s-1}(i)] = \\ \exp(\delta i)[\overline{\varphi}_{s-1}(i) - (T\overline{\varphi})_{s-1}(i) - \psi_{s-1}(i)] = \\ \rho[1 - \mathrm{E}\exp(-\delta\eta_s)1_{i+\eta_s\geq 0}] - \exp(\delta i)\mathrm{P}(i + \eta_s < 0) \geq \\ \rho[1 - f_s(\delta) + \mathrm{E}\exp(-\delta\eta_s)1_{i+\eta_s<0}] - \mathrm{E}\exp(-\delta\eta_s)1_{i+\eta_s<0} = \\ \rho[1 - f_s(\delta)] - (1-\rho)\mathrm{E}\exp(-\delta\eta_s)1_{i+\eta_s<0} \geq \\ \rho[1 - f_s(\delta)] - (1-\rho)f_s(\delta) = \rho - f_s(\delta) \geq 0. \qquad (72)\end{gathered}$$

Отже, $\overline{\psi} \geq \psi$ поточково. Тому за принципом порівняння $\overline{\varphi} \geq \varphi$, що доводить (56) $\boxdot$

Доведення Теореми 10.

Визначимо при $n \geq 0$ марковські моменти

$$\theta_0 = 0, \tau_{n+1} = \inf(t > \theta_n : X_t < 0), \theta_{n+1} = \inf(t > \tau_n : X_t \geq 0),$$

де за означенням $\inf\varnothing = \infty$.

Зауважимо, що $\tau_1 = \tau$ та $\theta_n < \infty$ на множині $\tau_{n-1} < \infty$ внаслідок транзієнтності (31).

Визначимо максимальну з імовірностей банкрутства

$$\pi = \sup_{s\geq 0}\sup_{i\geq 0}\mathrm{P}_{si}(\tau < \infty) = \sup_{s\geq 0}\sup_{i\geq 0}\varphi_s(i) \leq \rho < 1, \qquad (73)$$

де використано нерівність (56).

Оскільки $\{\lambda_0 \geq n\} = \{\tau_n < \infty\}$, то за марковською властивістю ланцюга X

$$\begin{gathered}\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 \geq n+1 \mid \lambda_0 \geq n) = \mathrm{P}_{0x}(\tau_{n+1} < \infty \mid \tau_n < \infty) = \\ \mathrm{E}_{0x}(\mathrm{P}_{\theta_n, X_{\theta_n}}(\tau < \infty)1_{\theta_n<\infty}) \leq \pi < 1\end{gathered}$$

за означенням (73).

З останньої нерівності, зокрема,

$$\mathrm{P}_{0x}(\lambda_0 = 1) \geq \varphi_0(x)(1-\pi) > 0,$$

тому $a = 1$ у Теоремі 3.

Отже, згідно з Теоремою 3 (d)

$$\mathrm{E}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) \leq a + \sum_{t=a+1}^{\infty}\pi^{t-a} = 1/(1-\pi).$$

Тому за (26)

$$l_0(x) \geq \varphi_0(x) \geq (1-\pi)l_0(x). \qquad (74)$$

Нарешті, з (74) та нерівності (73) отримуємо (57) $\boxdot$

Доведення Теореми 11.

Скористаємося методом доведення (56), а саме принципом порівняння для розв'язків інтегральних рівнянь $\varphi = \psi + T\varphi$ та $\overline{\varphi} = \overline{\psi} + T\overline{\varphi}$, з тим же оператором T та функцією $\overline{\varphi}_s(i) = b\exp(-\beta i)$. Для доведення нерівності $\varphi \geq \overline{\varphi}$ у (58) достатньо перевірити, що $\psi \geq \overline{\psi}$.

Визначимо сталу

$$b = \inf_{s\geq 1} b_s,$$

$$b_s^{-1} = \sup_{j\in(j_s,0]}[1 - \mathrm{E}\exp(-\beta\eta_s)1_{\eta_s\geq j}]\exp(\beta j)/\mathrm{P}(\eta_s < j), \qquad (75)$$

де номери

$$j_s = \sup(j \le 0 : \mathrm{E}\exp(-\beta\eta_s)1_{\eta_s \ge j} \ge 1),$$

і за означенням $\sup\varnothing = -\infty$. Зауважимо: якщо $f_s(\beta) > 1$ у (59), то $j_s > -\infty$. тобто верхня межа у (75) є строго додатним максимумом, оскільки при $j > j_s$ чисельник і знаменник у (75) є додатними. Дійсно, якщо знаменник $\mathrm{P}(\eta_s < j) = 0$, то з умови (59) випливає, що $j \le j_s$. Якщо $f_s(\beta) > 1$, то скінченність j_s випливає зі збіжності ряду вибором $j \le 0$ такого, що

$$\mathrm{E}\exp(-\beta\eta_s)1_{\eta_s < j} \le (f_s(\beta) - 1)/2.$$

Як у (72), розглянемо при $j = -i \le 0$

$$\exp(\delta i)[\overline{\psi}_{s-1}(i) - \psi_{s-1}(i)] =$$
$$b[1 - \mathrm{E}\exp(-\beta\eta_s)1_{\eta_s \ge j}] - \exp(-\beta j)\mathrm{P}(\eta_s < j) \le 0,$$

оскільки за означенням у (75) $b \le b_s$, а при $j \le j_s$ нерівність очевидна.

Тому за принципом порівняння $\varphi \ge \overline{\varphi}$ $\boxdot$

Доведення Леми 4.

Зауважимо, що розподіл моменту τ_0 першого досягнення нуля не містить імовірностей p_0, q_0 виходу з цього стану. Тому вважатимемо, що $p_0 = 1$, $q_0 = 0$.

Розглянемо суму матричного ряду (потенціал)

$$R = \sum_{s \ge 1} P^{[s]}.$$

Її елементи - скінченні, оскільки умова (61) достатня (та необхідна) для транзієнтності ланцюга X. Матриця R є мінімальним розв'язком рівняння $R = P + PR$.

Тому функція $r(i) \equiv R_{i0}$ задовольняє рівняння

$$r(i) = R_{i0} = \sum_{s \ge 1} P_{i0}^{[s]} = \sum_{s \ge 0} \mathrm{P}_{0i}(X_{s+1} = 0) = l_0(i), \tag{76}$$

та

$$r(i) = P_{i0} + (PR)_{i0} = q_1\delta_{i1} + \sum_{j \ge 0} p_{ij} r(j).$$

Звідси отримуємо систему рівнянь

$$r(i) = q_1\delta_{i1} + p_i r(i+1) + q_i r(i-1), i \ge 1,$$
$$r(0) = r(1). \tag{77}$$

З (77) множенням лівої частини на $p_i + q_i = 1$ та послідовними ітераціями виводимо, що

$$r(i) - r(i-1) = -\theta_{i-1}, i > 1,$$
$$r(1) - r(0) = 0,$$

та остаточно

$$r(i) = r(0) - \sum_{s=1}^{i-1} \theta_s, i \ge 1.$$

Спрямувавши тут $i \to \infty$, з урахуванням $r(i) \to 0$ знаходимо

$$l_0(0) = r(0) = \sum_{s \ge 1} \theta_s = \theta - 1,\ \ l_0(i) = r(i) = \sum_{s \ge i} \theta_s, i \ge 1. \tag{78}$$

Друга тотожність у (62) випливає з марковської властивості та однорідності ланцюга, та рівностей (77) і $p_0 = 1$:

$$\pi = \mathrm{P}(\tau_0 < \infty \mid X_0 = 1) = \mathrm{P}(\tau_0 < \infty \mid X_0 = 0) =$$
$$1 - 1/\sum_{s \ge 0} P_{00}^{[s]} = 1 - 1/(1 + r(0)) = 1 - \theta^{-1},$$

$$\pi = \mathrm{P}(\tau_0 < \infty \mid X_0 = 0) = \mathrm{P}(\lambda_0 \geq s+1 \mid \lambda_0 \geq s), s \geq 0,$$

де використано тотожність (76).

Застосування двох останніх тотожностей, оцінки (26) з урахуванням Теореми 3 (d), де $a = 1$, доводить (63):

$$\mathrm{E}(\lambda_0 \mid \lambda_0 \geq a) = 1 + \sum_{t\geq 1} \pi^{t-1} = 1/(1-\pi) = \theta \boxdot$$

Автор вдячний рецензенту за його час та суттєві зауваження, що дозволили покращити рівень викладу.

Література

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, "Наука", Москва, 1973.
2. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
3. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, "Наука", Москва, 1986.
4. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
5. V. M. Shurenkov, *Markov's Ergodic Processes*, "Nauka", Moscow, 1989. (Russian)
6. М. В. Карташов, *Асимптотика пророджених марковських моментів на неоднорідних за часом дискретних ланцюгах Маркова*, Теорія ймовір. та матем. статист. **88** (2013), 83–94.
7. М. В. Карташов, *Quantitative and qualitative limits for exponential asymptotics of hitting times for birth-and-death chains in a scheme of series*, Теорія ймовір. та матем. статист. **89** (2013), 41–51.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна

Адреса електронної пошти: nkartashov@skif.com.ua

Надійшла 04/03/2015