Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 75–86

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 75–86

ПРО КОРЕЛОГРАМНІ ОЦІНКИ ІМПУЛЬСНИХ ПЕРЕХІДНИХ ФУНКЦІЙ

УДК 519.21

Ю. В. КОЗАЧЕНКО І І. В. РОЗОРА

Анотація. В даній роботі розглядається корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції лінійної однорідної системи. Знайдено оцінку розподілу супремуму похибки оцінювання. Для цього використовуються властивості квадратично-гауссових випадкових процесів.

Abstract. In this paper the integral cross-correlogram estimator of the response function of a linear homogeneous system is considered. The evaluation of the distribution for supremum of estimation error is found. For this purpose the properties of Square-Gaussian random processes are used.

Аннотация. В данной работе рассматривается коррелограмная интегральная оценка импульсной переходной функции линейной однородной системы. Найдено оценку распределения супремума ошибки оценивания. Для этого используются свойства квадратично-гауссовских случайных процессов.

1. Вступ

В останні часи інтенсивно вивчається задача оцінювання характеристик лінійних систем різної фізичної природи, що виникає у багатьох галузях, наприклад, у радіофізиці, сейсмології, метеорології, теорії сигналів та автоматичного контролю, теорії фільтрації, фінансовій математиці тощо.

Деякі методи оцінювання невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем та вивчення властивостей відповідних оцінок розглядались у роботах В. Булдигіна та його учнів. У класі лінійних систем важливий підклас складають неперервні однорідні системи. В якості оцінок беруться сумісні періодограми або сумісні корелограми між процесами на вході та виході системи.

В статтях В. Булдигіна та Фу Лі [8, 9] досліджувалась асимптотична нормальність корелограмної інтегральної оцінки та похибки оцінювання в сенсі збіжності скінченновимірних розподілів та в сенсі збіжності розподілів у просторі неперервних функцій.

Для корелограмної дискретної за часом оцінки у роботах В. Булдигіна, В. Зайця, В. Курочки та Ф. Уцета [7, 10, 11] вивчалися умови асимптотичної незміщеності та консистентності у середньому квадратичному, а також умови асимптотичної нормальності як у сенсі збіжності скінченновимірних розподілів, так у сенсі збіжності відповідних розподілів у просторі неперервних функцій.

В працях В. Булдигіна та І. Блажієвської [1, 2, 3] встановлюється асимптотична незміщеність та консистентність у середньому квадратичному корелограмної інтегральної оцінки; з менш обмежувальними умовами, ніж в статтях В. Булдигіна і Фу

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62M20, 60E15.

Ключові слова і фрази. Корелограми, імпульсна перехідна функція, ймовірності великих відхилень.

Автори виражають подяку проф. Мішурі Ю.С. за чинні поради.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)”, 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

Лі, вивчались питання асимптотичної нормальності оцінки та похибки оцінювання у просторі неперервних функцій.

Потрібно зауважити, що у вищезгаданих роботах вивчаються асимптотичні властивості оцінок перехідної імпульсної функції і не приділяється увага знаходженню точних оцінок розподілів для супремуму похибки оцінювання.

В даній роботі розглядається корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції та знаходиться оцінка розподілу супремуму похибки оцінювання.

2. Корелограми та їх властивості

Розглянемо фізично здійсниму однорідну систему з імпульсною перехідною функцією $H(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Це означає, що дійснозначна функція $H(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, а реакція системи на допустимий вхідний сигнал $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, має вигляд

$$Y(t) = \int_0^\infty H(\tau)X(t-\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

При вивченні таких систем виникає задача оцінювання функції H за спостереженнями за реакцією системи на вхідний сигнал. У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Розглянемо дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbf{R})$, що збурює систему (1). Нехай $f = (f(\lambda), \lambda \in \mathbf{R})$ — спектральна щільність процесу X. Припускаємо, що дана функція неперервна і задовольняє умовам

$$\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty;$$
$$K_X \in L_1(\mathbf{R}),$$

де $K_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda$, $t \in \mathbf{R}$, — кореляційна функція випадкового процесу X.

Оцінку для H в точці τ, $\tau > 0$, визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми між вхідним та вихідним процесами (див., наприклад, [3])

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t+\tau)X(t)\,dt, \qquad \tau > 0, \tag{2}$$

де T — довжина інтервалу усереднення, при цьому підході до оцінювання H припускається також, що $X(t) = X_\Delta(t)$, тобто на вхід системи подається сім'я процесів, залежних від параметра $\Delta > 0$ та із певним виглядом спектральної щільності (див. зауваження 2.2). В подальшому параметр Δ будемо опукати.

Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Через

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t)\,dt, \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

позначимо перетворення Фур'є-順 Планшереля функції H.

Зауваження 2.1. Інтеграли в (1) та (2) розглядаються як середньоквадратичні інтеграли Рімана.

Інтеграл в (1) існує тоді і тільки тоді, коли існує інтеграл Рімана (див. [4, ст. 278])

$$\int_0^\infty\int_0^\infty H(\tau)K_X(s-\tau)H(s)\,ds\,d\tau. \tag{3}$$

Якщо в даному інтегралі використати зображення кореляційної функції через спектральну щільність та перетворення Фур'є-Планшереля для функції $H(\tau)$, отримаємо

$$\int_0^\infty\int_0^\infty H(\tau)K(s-\tau)H(s)\,ds\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(-\lambda)\cdot H^*(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda.$$

Оскільки $\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}|f(\lambda)| < \infty$ і $H \in L_2(\mathbf{R})$, то інтеграл (3) існує, а отже, і існує інтеграл в (1).

Будемо вважати, що інтеграл (3) існує також як інтеграл Лебега.

Легко підрахувати, що математичне сподівання $\hat{H}_T(\tau)$ дорівнює

$$\mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau) = \int_0^\infty H(s)K_X(\tau - s)\,ds. \tag{4}$$

Отже, з (4) маємо, що в загальному випадку

$$\mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau) \neq H(\tau), \tau \in \mathbf{R}.$$

Це означає, що оцінка $\hat{H}_T(\tau)$ є зміщеною.

В роботах [1, 3, 8] розглядаються послідовності коваріаційних функцій, які залежать від параметру Δ, і знаходяться умови, коли оцінка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ є асимптотично незміщеною для $H(\tau)$ при $\Delta \to \infty$. Також в [8] показано, що за певних умов $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) \to H(\tau)$ з ймовірністю 1 при $\Delta \to \infty$ і $T \to \infty$.

Зауваження 2.2. З роботи [3] випливає, що всі потрібні умови для асимптотичної незміщеності та для збіжності з ймовірністю 1 виконуються для послідовності таких спектральних щільностей

$$f_\Delta(\lambda) = \frac{c}{2\pi}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right\}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},\ \Delta > 0. \tag{5}$$

Нехай

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - \mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau).$$

В [2] показано, що кореляцяційна функція $\hat{Z}_T(\tau)$ має вигляд

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,&\hat{Z}_T(\tau_1)\hat{Z}_T(\tau_2)\\ &= \frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2}|H^*(\lambda_2)|^2 + e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)}H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2)\Big)\\ &\qquad\qquad \times \Phi_T(\lambda_2-\lambda_1)f(\lambda_1)f(\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2,\end{aligned} \tag{6}$$

де $\Phi_T(\lambda)$ — ядро Фейєра

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2}\right).$$

Нехай S — параметрична множина. Функція $\rho(t,s)$ називається псевдометрикою на S, якщо вона задовольняє всі аксіоми метрики, окрім того, що множина $\{(t,s) \in S\times S\colon \rho(t,s) = 0\}$ може бути більшою ніж діагональ $\{(t,s)\in S\times S\colon t = s\}$.

Розглянемо функцію (див. [8])

$$g_H(\tau) = \left[\int_{-\infty}^\infty |H^*(\lambda)|^2\sin^2\frac{\lambda\tau}{2}\,d\lambda\right]^{1/2}, \qquad \tau > 0. \tag{7}$$

Оскільки $H \in L_2(\mathbf{R})$, то функція (7) коректно визначена та породжує псевдометрику

$$\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2) = \sqrt{g_H(|\tau_1-\tau_2|)}, \qquad \tau_1,\tau_2 \in \mathbf{R}.$$

Доведення того, $\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2)$ є псевдометрикою можна подивитись у [8].

Лема 2.1. *Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}|f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$. Тоді*

$$\Big(\mathsf{E}\,|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2\Big)^{1/2} \le \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}}\cdot\sup_{t\in\mathbf{R}}|f(t)|\cdot\|H^*\|_2^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}(\tau_1,\tau_2), \qquad \tau_1,\tau_2 > 0. \tag{8}$$

Доведення. Доведення леми повторює доведення аналогічного твердження в [2]. □

В роботі [5] доведено наступну лему.

Лема 2.2. *Нехай $\psi(u)$, $u \geq 0$ — така неперервна, монотонно зростаюча функція, $\psi(0) = 0$, що функція $\frac{u}{\psi(u)}$ є неспадною при $u > u_0$, де стала $u_0 \geq 0$. Тоді для всіх $u \geq 0$ та $v > 0$ виконується наступна нерівність*

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leq \frac{\psi(u+u_0)}{\psi(v+u_0)}. \tag{9}$$

Приклад 2.1. Умови леми 2.2 справджуються для $\psi(u) = u^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, $u_0 = 0$. А отже,

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leq \frac{u^\alpha}{v^\alpha}, \qquad \alpha \in (0,1]. \tag{10}$$

Приклад 2.2. Умови леми 2.2 виконуються у випадку $\psi(u) = \ln^\alpha(u+1)$, $\alpha > 0$, $u_0 = e^\alpha - 1$. Тоді нерівність (9) записується у вигляді

$$\left|\sin \frac{u}{v}\right| \leq \frac{\ln^\alpha(e^\alpha + u)}{\ln^\alpha(e^\alpha + v)}, \qquad \alpha > 0. \tag{11}$$

Теорема 2.1. *Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$. Нехай функція $\psi(u)$, $u \geq 0$, задовольняє всі умови леми 2.2 та збігається інтеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2\left(\frac{\lambda}{2} + u_0\right) d\lambda < \infty.$$

Тоді

$$\left(\mathsf{E}\,|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{1/2} \leq K \cdot \psi^{-1/2}\left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} + u_0\right), \qquad \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

де u_0 — стала з леми 2.2, а K дорівнює

$$K = K(T) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| \cdot \|H^*\|_2^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2\left(\frac{\lambda}{2} + u_0\right) d\lambda\right)^{1/4}. \tag{13}$$

Доведення. Доведення теореми випливавє з (7), леми 2.1 і леми 2.2. Дійсно, з леми 2.2 маємо

$$\sin^2 \frac{\lambda\tau}{2} \leq \frac{\psi^2\left(\frac{\lambda}{2} + u_0\right)}{\psi^2\left(\frac{1}{\tau} + u_0\right)}.$$

Тоді із співвідношення (7) та останньої нерівності випливає, що

$$\sqrt{\sigma}(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{g_H(|\tau_1 - \tau_2|)}$$
$$\leq \psi^{-1/2}\left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} + u_0\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \psi^2\left(\frac{\lambda}{2} + u_0\right) d\lambda\right)^{1/4}.$$

Теорему буде повністю доведено, якщо праву частину нерівності підставити у (8). □

Наслідок 2.1. *Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$, та*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha}\, d\lambda < \infty, \qquad \alpha \in (0,1].$$

Тоді

$$\left(\mathsf{E}\,|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{1/2} \leq K_\alpha \cdot |\tau_1 - \tau_2|^{\alpha/2}, \qquad \alpha \in (0,1], \tag{14}$$

де K_α має вигляд

$$K_\alpha = K_\alpha(T) = \frac{2^{2-\alpha/2}\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| \cdot \|H^*\|_2^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha}\, d\lambda \right)^{1/4}. \tag{15}$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 2.1 та прикладу 2.1. □

Наслідок 2.2. *Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$ і $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$, де $f(t)$ — спектральна щільність процесу $X(t)$, та наступний інтеграл є збіжним*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \ln^{2\alpha}\left(\frac{\lambda}{2} + e^\alpha\right) d\lambda < \infty, \qquad \alpha > 0.$$

Тоді

$$\left(\mathsf{E}\,|\hat{Z}_T(\tau_1) - \hat{Z}_T(\tau_2)|^2\right)^{1/2} \le K_{\ln} \cdot \ln^{-\alpha/2}\left(\frac{1}{|\tau_1 - \tau_2|} + e^\alpha\right), \qquad \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R},\ \alpha > 0, \tag{16}$$

де $K_{\ln}$ має вигляд

$$K_{\ln} = K_{\ln}(T) = \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{T}} \cdot \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)| \cdot \|H^*\|_2^{1/2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \ln^{2\alpha}\left(\frac{\lambda}{2} + e^\alpha\right) d\lambda \right)^{1/4}. \tag{17}$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 2.1 та прикладу 2.2. □

3. Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір та (T, ρ) — компактний метричний простір з метрикою ρ.

Наведемо означення із книги [5].

Означення 3.1 ([5])**.** Нехай $\Xi = \{\xi_t, t \in \mathbf{T}\}$ — сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $\mathsf{E}\,\xi_t = 0$ (наприклад, ξ_t, $t \in \mathbf{T}$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_\Xi(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - \mathsf{E}\,\bar{\xi}^T A \bar{\xi}, \tag{18}$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \ldots, n$, A — дійснозначна матриця,

або $\eta \in SG_\Xi(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (18)

$$\eta = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \left(\bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n - \mathsf{E}\,\bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n\right).$$

Означення 3.2 ([5])**.** Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \mathbf{T}\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in \mathbf{T}$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

В [6] показано, що

- $SG_\Xi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{\mathsf{E}\,\zeta^2}$;
- $SG_\Xi(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp|x| - 1;$$

- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_\Xi(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{\mathsf{E}\,\zeta^2}$.

Приклад 3.1. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$, $t \in \mathbf{T}$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t) - \mathsf{E}\,\bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Загальні властивості квадратично-гауссових випадкових процесів можна знайти в роботах [5, 6, 12].

Через $N(u)$ позначимо мінімальну кількість замкнених куль радіуса u, що покривають множину $\mathbf{T}$ з метрикою ρ.

Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \mathbf{T}\}$ — квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує функція $\sigma(h)$, $h > 0$, яка є монотонно зростаючою, неперервною і $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$, а також

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \big(\operatorname{Var}(\xi(t) - \xi(s))\big)^{1/2} \le \sigma(h).$$

Визначимо деякі сталі:

$$\varepsilon_0 = \inf_{t\in\mathbf{T}} \sup_{s\in\mathbf{T}} \rho(t,s), \qquad t_0 = \sigma(\varepsilon_0),$$

$$\gamma_0 = \sup_{t\in\mathbf{T}} (\operatorname{Var}\xi(t))^{1/2},$$

Теорема 3.1 ([5]). *Нехай $\xi(t) = \{\xi(t), t \in \boldsymbol{T}\}$— сепарабельний квадратично-гауссовий випадковий процес, зростаюча функція $r(u) \ge 0$, $u \ge 1$, є такою, що $r(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ і функція $r(\exp\{t\})$ є опуклою. Якщо*

$$\int_0^{t_0} r\big(N(\sigma^{(-1)}(u))\big)\, du < \infty,$$

то для всіх цілих $M = 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$ і u таких, що

$$0 < u < \frac{1-p}{\sqrt{2}} \min\left\{\frac{1}{\gamma_0}, \frac{1}{t_0 p^{M-1}}\right\}, \tag{19}$$

виконується наступна нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\boldsymbol{T}} |\xi(t)| > x\right\} \le W(p,x,u), \tag{20}$$

де

$$W(p,x,u) = 2\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\gamma_0}{1-p}\right)\right)^{1-p} A(p)\left(1 - \frac{p^{M-1}u\sqrt{2}t_0}{1-p}\right)^{-p/2}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{p^M u\sqrt{2}t_0}{2(1-p)} - ux\right\},$$

де функція $R(s) = (1-|s|)^{-1/2}\exp\{-|s|/2\}$ та

$$A(p) = r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0 p^M}\int_0^{t_0 p^M} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(v)\right)\right)\, dv\right).$$

Позначимо $C = \max\{t_0, \gamma_0\}$.

Наслідок 3.1. *Нехай виконуються умови теореми 3.1. Якщо наступний інтеграл існує*

$$\int_0^{t_0} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du,$$

тоді для всіх $x > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} |\xi(t)| > x\right\} \le 2\inf_{0<p<1}\left\{r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right)\, d\nu\right)\right.$$
$$\left.\times\left(1 + \frac{\sqrt{2}x(1-p)}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\}\right\}. \tag{21}$$

Доведення. Наслідок випливає з теореми 3.1. Дійсно, покладемо $M = 1$. Оскільки ліва частина нерівності (20) не залежить від значень p і u, то оцінка (20) має місце і у випадку мінімізації правої частини за p і u:

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|\xi(t)| > x\right\} \le \inf_{0<p<1}\ \inf_{u\in\left(0,\frac{1-p}{\sqrt{2}C}\right)} W(p,x,u). \tag{22}$$

Очевидно, що $C \ge t_0$ і $C \ge \gamma_0$.

Оскільки функція $R(s) = (1-|s|)^{-1/2}\exp\{-|s|/2\}$ зростає при $0 \le s \le 1$, тоді

$$\begin{aligned}
&\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\gamma_0}{1-p}\right)\right)^{1-p}\left(1-\frac{u\sqrt{2}t_0}{1-p}\right)^{-p/2}\exp\left\{-\frac{up\sqrt{2}t_0}{2(1-p)}-ux\right\}\\
&= \left[\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}\gamma_0}{1-p}\right)\right)^{1-p}\left(R\left(\frac{u\sqrt{2}t_0}{1-p}\right)\right)^{p}\exp\{-ux\}\right]\\
&\le \left[\left(1-\frac{u\sqrt{2}C}{1-p}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{u\sqrt{2}C}{2(1-p)}\right\}\exp\{-ux\}\right].
\end{aligned}$$

Мінімізуючи праву частину останньої нерівності за $u \in \left(0, \frac{1-p}{\sqrt{2}C}\right)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\inf_{u\in\left(0,\frac{1-p}{\sqrt{2}C}\right)}\left[\left(1-\frac{u\sqrt{2}C}{1-p}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{u\sqrt{2}C}{2(1-p)}\right\}\exp\{-ux\}\right]\\
&\le \left(\frac{C}{C+\sqrt{2}x(1-p)}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\}.
\end{aligned}$$

Таким чином, твердження наслідку встановлено. □

4. Про швидкість збіжності корелограм в просторі неперервних функцій

Даний розділ присвячений знаходженню швидкості збіжності корелограмних інтегральних оцінок невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем в просторі неперервних функцій. А саме, знаходиться оцінка розподілу супремуму похибки оцінювання на відрізку $[0, A]$.

Припустимо, що $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ вимірний дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський процес, що збурює систему (1).

Розглянемо корелограму

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T Y(t+\tau)X(t)\,dt, \qquad \tau > 0,$$

що є оцінкою імпульсної перехідної функції H. Випадковий процес $Y(t)$ визначається в (1).

Доведемо допоміжну лему.

Лема 4.1. *Випадковий процес* $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - \mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, *є квадратично-гауссовим.*

Доведення. Процес $\hat{Z}_T(\tau)$, $\tau > 0$, можна подати у вигляді

$$\hat{Z}_T(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T (Y(t+\tau)X(t) - \mathsf{E}\,Y(t+\tau)X(t))\,dt. \tag{23}$$

Оскільки кожна інтегральна сума (23)

$$\sum_k (Y(t_k+\tau)X(t_k) - \mathsf{E}\, Y(t_k+\tau)X(t_k)) \vartriangle t_k$$

належить простору $SG_\Xi(\Omega)$, а сам процес $\hat{Z}_T(\tau)$ є середньо-квадратичною границею цих сум, то $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом. Отже, лема повністю доведена. □

Розглянемо точність оцінювання як різницю оцінки $\hat{H}_T(\tau)$ та імпульсної перехідної функції $H(\tau)$

$$\hat{H}_T(\tau) - H(\tau), \qquad \tau > 0.$$

Оцінимо супремум похибки оцінювання на відрізку $[0, A]$, де A—деяке фіксоване додатне число.

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\tau\in[0,A]} |\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)| \geq \varepsilon \right\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Позначимо

$$h(\tau) = \mathsf{E}\, \hat{H}_T(\tau) - H(\tau), \qquad \tau \in [0, A].$$

Припустимо, що функція $h(\tau)$ є обмеженою на відрізку $[0, A]$.

Зауваження 4.1. Дана умова виконується, коли, наприклад, функції $\mathsf{E}\, \hat{H}_T(\tau)$ і $H(\tau)$ є неперервними на $[0, A]$.

Позначимо

$$h_- = \min_{\tau\in[0,A]} h(\tau), \qquad h_+ = \max_{\tau\in[0,A]} h(\tau),$$
$$h^* = \max_{\tau\in[0,A]} |h(\tau)| = \max\{h_+, -h_-\}.$$

Із співвідношення (6) випливає, що

$$\begin{aligned}\gamma_0 = \gamma_0(T) &= \sup_{\tau\in[0,A]} (\operatorname{Var} \hat{Z}_T(\tau))^{1/2} \\ &= \sup_{\tau\in[0,A]} \Bigg(\frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(|H^*(\lambda_2)|^2 + e^{i\tau(\lambda_1+\lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2) \Big) \\ &\qquad \times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) f(\lambda_1) f(\lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \Bigg)^{1/2}.\end{aligned}$$

Позначимо

$$C = C(T) = \max\left\{ \gamma_0, K_\alpha \left(\frac{A}{2}\right)^{\alpha/2} \right\},$$

де значення K_α з (15).

Покладемо

$$M_\alpha = 2^{2-2/\alpha} e^{2/\alpha} \gamma_0^{-1/2-2/\alpha} \alpha^{2/\alpha - 1/2}, \qquad \alpha \in (0, 1].$$

Теорема 4.1. *Нехай $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ — сепарабельний дійснозначний стаціонарний гауссівський процес, що збурює систему* (1). *Припустимо, що перехідна функція $H \in L_2(\mathbf{R})$ і для деякого $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H^*(\lambda)|^2 \lambda^{2\alpha}\, d\lambda < \infty.$$

Для спектральної щільності $f(t)$ *випадкового процесу* $X(t)$ *виконується умова* $\sup_{\lambda\in\mathbf{R}}|f(\lambda)|<\infty$. *Тоді для*

$$\varepsilon>\frac{\sqrt{2}\gamma_0}{\alpha}+h^*,\qquad \alpha\in(0,1],$$

має місце нерівність

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\left\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)|>\varepsilon\right\}\\&\quad\le M_\alpha(\varepsilon-h^*)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha}}\left(C+\sqrt{2}\alpha(\varepsilon-h^*)^2-2\gamma_0(\varepsilon-h^*)\right)^{1/2}\\&\quad\times\exp\left\{-\frac{\varepsilon-h^*}{\sqrt{2}\gamma_0}+\frac{1}{\alpha}\right\}.\end{aligned}\tag{24}$$

Доведення. Різницю $\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)$ можна подати в такому вигляді

$$\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)=\hat{H}_T(\tau)-\mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau)+h(\tau)=\hat{Z}_T(\tau)+h(\tau).$$

Тоді

$$\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)\ge\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\hat{Z}_T(\tau)\ge\varepsilon-h(\tau),$$

$$\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)\le-\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad\hat{Z}_T(\tau)\le-\varepsilon-h(\tau).$$

Отже, для $\varepsilon>h^*$ отримаємо

$$\left\{|\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)|\ge\varepsilon\right\}\subset\left\{|\hat{Z}_T(\tau)|\ge\min\{\varepsilon-h_+,\varepsilon+h_-\}\right\}$$

та

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{H}_T(\tau)-H(\tau)|\ge\varepsilon\right\}\le\mathsf{P}\left\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{Z}_T(\tau)|\ge\min\{\varepsilon-h_+,\varepsilon+h_-\}\right\}.\tag{25}$$

Очевидно, що $\min\{\varepsilon-h_+,\varepsilon+h_-\}=\varepsilon-h^*$.

Для зручності позначимо

$$x=\varepsilon-h^*.$$

Оскільки з леми 4.1 випливає, що $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом, тоді для нього можна використати наслідок 3.1. З (14) випливає, що у якості функції $\sigma(h)$ можна розглянути $\sigma(h)=K_\alpha\cdot h^{\alpha/2}$, де K_α з (15). Тоді $\sigma^{(-1)}(h)=(h/K_\alpha)^{2/\alpha}$.

Метрична масивність відрізку $[0,A]$ з метрикою $\rho(t,s)=|t-s|$ оцінюється як

$$N(u)\le\frac{A}{2u}+1.$$

Отже,

$$N(\sigma^{(-1)}(u))\le\left(\frac{A}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)=\left(\frac{A}{2}\left(\frac{K_\alpha}{u}\right)^{2/\alpha}+1\right).$$

Розглянемо функцію $r(u)=u^\beta-1$, де $\beta\in(0,\frac{\alpha}{2})$, для якої виконуються умови наслідку 3.1. Оскільки $0<p<1$ та $t_0=K_\alpha(A/2)^{\alpha/2}$, то $\frac{1}{2}A(K_\alpha/(pt_0))^{2/\alpha}>1$. Тому, за умови $0<u<t_0p$ має місце нерівність

$$N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\le A\left(\frac{K_\alpha}{u}\right)^{2/\alpha}.$$

Оскільки обернена функція до $r(u)$ дорівнює $r^{(-1)}(u) = (u+1)^{1/\beta}$, то

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p} r\left(N\left(\sigma^{(-1)}(\nu)\right)\right) d\nu\right) = \left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p}\left[\left(\frac{A}{2}\left(\frac{K_\alpha}{u}\right)^{2/\alpha}+1\right)^{\beta}\right] du\right)^{1/\beta}$$

$$\le \left(\frac{1}{t_0 p}\int_0^{t_0 p}\left[A\left(\frac{K_\alpha}{u}\right)^{2/\alpha}\right]^{\beta} du\right)^{1/\beta}$$

$$= 2\left(\frac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right)^{1/\beta} p^{-2/\alpha}.$$

Знайдемо мінімум за β правої частини даної нерівності

$$\inf_{\beta\in(0,\frac{\alpha}{2})}\left(\frac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right)^{1/\beta} = \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{1}{1-2\beta/\alpha}\right)^{1/\beta} = e^{2/\alpha}.$$

З нерівності (21) та з останнього співвідношення випливає, що при $x>0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{Z}_T(\tau)|>x\right\} \le 4e^{2/\alpha}C^{-1/2}\inf_{0<p<1}\left\{\frac{\sqrt{C+\sqrt{2}x(1-p)}}{p^{2/\alpha}}\exp\left\{-\frac{x(1-p)}{\sqrt{2}\gamma_0}\right\}\right\}. \tag{26}$$

А тепер знайдемо точку мінімуму правої частини (26). Тоді

$$p_{\min} = \frac{\sqrt{2}\gamma_0}{\alpha x}.$$

Оскільки за умовою теореми $p\in(0,1)$, то при

$$x > \frac{\sqrt{2}\gamma_0}{\alpha}$$

можна підставити $p_{\min}$ в (26) та при цьому отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\tau\in[0,A]}|\hat{Z}_T(\tau)|>x\right\} \le M_\alpha x^{-1/2-2/\alpha}\sqrt{C+\sqrt{2}\alpha x^2-2\gamma_0 x}\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{2}\gamma_0}+\frac{1}{\alpha}\right\}, \tag{27}$$

де константа M_α дорівнює

$$M_\alpha = 2^{2-2/\alpha}e^{2/\alpha}\gamma_0^{-1/2-2/\alpha}\alpha^{2/\alpha-1/2}.$$

Якщо врахувати, що $x=\varepsilon-h^*$, то з (27) отримуємо твердження теореми. □

Приклад 4.1. В частковому випадку знайдемо оцінку значення h^* з нерівності (24) в теоремі 4.1.

Розглянемо сім'ю спектральних щільностей вигляду (5) при $c=2$, тобто функції $f_\Delta(\lambda)$ мають вигляд

$$f_\Delta(\lambda) = \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right\}, \qquad \lambda\in\mathbf{R},\ \Delta>0. \tag{28}$$

Тоді кореляційна функція процесу X дорівнює

$$K_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}f_\Delta(\lambda)\,d\lambda = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\exp\left\{-\frac{t^2\Delta}{4}\right\}.$$

З (4) випливає, що

$$\mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau) = \int_0^\infty H(s)K_X(\tau-s)\,ds = \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty H(s)\exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds.$$

Використовуючи останнє співвідношення і те, що

$$\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds = 1,$$

функція $h(\tau)$ записується в такому вигляді:

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau) - H(\tau) \\ &= \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty H(s)\exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds - H(\tau)\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds \\ &= \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty (H(s)-H(\tau))\exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds \end{aligned} \tag{29}$$

Припустимо, що імпульсна перехідна функція H задовольняє умову Ліпшиця з показником κ на відрізку $[0, A]$, тобто існує константа $C_{Lip} > 0$ така, що

$$|H(s) - H(\tau)| \le C_{Lip}|s-\tau|^\kappa, \qquad \kappa > 0,\ s, \tau \in [0, A]. \tag{30}$$

Тоді з (29) і (30) випливає, що

$$\begin{aligned} |h(\tau)| &\le \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty |H(s)-H(\tau)|\exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds \\ &\le C_{Lip}\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\int_0^\infty |s-\tau|^\kappa\exp\left\{-\frac{\Delta(s-\tau)^2}{4}\right\} ds \\ &= \frac{C_{Lip}4^{\kappa/2}}{\Delta^{\kappa/2}\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\kappa+1}{2}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

де $\Gamma(\cdot)$-гамма-функція.

А отже, значення h^* з теореми 4.1 для даного прикладу дорівнює

$$h^* = \frac{C_{Lip}4^{\kappa/2}}{\Delta^{\kappa/2}\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\kappa+1}{2}\right) = o\left(\Delta^{-\kappa/2}\right), \qquad \Delta \to \infty.$$

5. Висновки

В роботі розглядалась корелограмна інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції лінійної однорідної системи. Знайдено оцінку швидкості збіжності даної корелограми в просторі неперервних функцій. Тобто отримано оцінку розподілу супрумуму похибки оцінювання. В подальшому планується розглянути оцінки близькості істинного значення $H(\tau)$ і математичного сподівання корелограми $\mathsf{E}\,\hat{H}_T(\tau)$ (оцінювання функції $h(\tau)$), застосування відповідних нерівностей до реальних процесів, а також побудова критеріїв про перевірку гіпотез щодо вигляду $h(\tau)$ на скінченому інтервалі.

Література

1. І. П. Блажієвська, *Асимптотична незсуненість і консистентність корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних однорідних систем*, Наукові вісті НТУУ "КПІ" **4** (2014), 7–12.
2. В. В. Булдигін, І. П. Блажієвська, *Про кореляційні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій*, Наукові вісті НТУУ "КПІ" **5** (2009), 120–128.
3. В. В. Булдигін, І. П. Блажієвська, *Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем*, Наукові вісті НТУУ "КПІ" **4** (2010), 16–27.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, "Наука", Москва, 1977.
5. Ю. В. Козаченко, А. О. Пашко, І. В. Розора, *Моделювання випадкових процесів та полів*, "Задруга", Київ, 2007.

6. V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
7. V. V. Buldygin and V. G. Kurotschka, *On cross-coorrelogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations*, Random Oper. and Stoch. Equ. **7** (1999), no. 1, 71–90.
8. V. V. Buldygin and Li Fu, *On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I*, Theor. Probability and Math. Statist. **54** (1997), 3–17.
9. V. V. Buldygin and Li Fu, *On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system II*, Theor. Probability and Math. Statist. **55** (1997), 30–37.
10. V. Buldygin, F. Utzet, and V. Zaiats, *Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function*, Statistical Infernce for Stochastic Processes **7** (2004), 1–34.
11. V. Buldygin, F. Utzet, and V. Zaiats, *A note on the application of intergals involving cyclic products of kernels*, QESTIIO **26**, no. 1–2 (2002), 3–14.
12. Yu. V. Kozachenko and O. V. Stus, *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*, Math. Communications **3** (1998), no. 1, 83–94.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: yvk@univ.kiev.ua

Кафедра прикладної статистики, факультет кібернетики, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4д, Київ 03680, Україна

Адреса електронної пошти: irozora@bigmir.net

Надійшла 09/07/2015