Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 93, 2015, стор. 105–114

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 93, 2015, pp. 105–114

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ НЕМАРКОВСЬКИХ БАГАТОКАНАЛЬНИХ МЕРЕЖ В ПЕРЕВАНТАЖЕНОМУ РЕЖИМІ ФУНКЦІОНУВАННЯ

УДК 519.21

Г. В. ЛІВІНСЬКА

Анотація. Для процесу обслуговування відкритих багатоканальних стохастичних мереж з нестаціонарним пуассонівським вхідним потоком вимог та довільною функцією розподілу часу обслуговування у вузлах доведено збіжність до гауссівського процесу в рівномірній топології за умов функціонування в перевантаженому режимі. Знайдено характеристики граничного процесу через параметри мережі.

Abstract. In the paper open multi-channel stochastic networks are considered. Input flows are nonhomogeneous Poisson flows with their rates dependent on time. Service times are random values with distribution functions of GI-type. A limit theorem for service process in such a network under heavy traffic conditions is proved. Correlation characteristics of limit Gaussian process are represented in an explicit form via network parameters.

Аннотация. Для процесса обслуживания открытых многоканальных стохастических сетей с нестационарным пуассоновским входящим потоком требований и произвольной функцией распределения времени обслуживания в узлах доказана сходимость к гауссовского процесса в равномерной топологии при условии функционирования в перегруженном режиме. Характеристики предельного процесса выписаны через параметры сети.

1. Вступ

Стохастичні мережі являють собою складні комплекси систем масового обслуговування з багатьма "вузлами обслуговування"(каналів, зв'язних процесорів, комп'ютерів) та користувачів (радіомережі, мережі, що використовують супутниковий канал з випадковим множинним доступом, мобільні та комп'ютерні мережі, мережі колективного доступу та т.ін.).

Задачі, що виникають в мережах, не піддаються прямому розв'язку за допомогою відомих методів теорії масового обслуговування. Основна причина полягає в тому, що між потоками вимог (повідомлень, інформаційних пакетів), які пересуваються по мережі, існують статистичні залежності. Структура та складність цих мереж дуже різна. Експлуатація мереж з точки зору економічності, обслуговування, часу відповіді, пропускної здатності, надійності, показника використання та зручності різні для різних мереж. Проектування структури мереж, вимірювання різних властивостей мереж, аналіз складних системних моделей та побудова нових мереж вимагає більше досліджень, спрямованих на розуміння її загальних принципів. Всі параметри, що до них входять, можна варіювати з метою покращення характеристики мережі.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 90B15.

Ключові слова і фрази. Багатоканальні мережі масового обслуговування, дифузійна апроксимація, перевантажений режим функціонування.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)”, 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

Часто реальні моделі описуються стохастичними мережами з параметрами, що є функціями від часу. Аналіз мереж масового обслуговування зі змінними в часі параметрами є складним математичним завданням. На тепер не існує універсальних методів дослідження таких моделей і тому є необхідність розробки методів, які були б ефективними принаймні для окремих типів стохастичних мереж. Один з перспективний напрямків досліджень багатоканальних стохастичних мереж пов'язаний з розробкою асимптотичних методів для стохастичних мереж. Маючи характеристики граничного процесу, можна розв'язувати практичні задачі, зокрема задачі оптимізації, що виникають при управлінні складними технологічними процесами, при створенні та експлуатації мобільних мереж зв'язку та інформаційно-обчислювальних мереж.

В даній роботі запропоновано метод асимптотичного аналізу для багатоканальних марковських мереж. Розглянуто немарковські багатоканальні мережі, у яких інтенсивність зовнішнього навантаження змінюється з часом. Це доволі загальний клас моделей із змінним параметром пуассонівського вхідного потоку та часом обслуговування вимог, що має довільну функцію розподілу. Сформульовано умови, при виконанні яких мережа функціонує в перевантаженому режимі. Для процесу обслуговування такої мережі в перевантаженому режимі побудовано апроксимативний гауссівський процес. Характеристики граничного процесу виписано через параметри моделі.

Зауважимо, що аналогічний підхід було застосовано також для кількох марковських моделей мереж з показниковим часом обслуговування [5, 6, 8]. Деякі аспекти немарковських мереж, зокрема для часу обслуговування фазового типу, що має розподіл Ерланга, було розглянуто в [9].

У подальшому запропонований метод можна застосувати до моделей багатоканальних мереж, параметри яких перемикаються ланцюгом Маркова. Приклади таких моделей можна знайти, зокрема, в роботах [2, 7].

2. Особливості моделі та умови перевантаженого режиму

Модель мережі масового обслуговування, що розглядатиметься у роботі, складається з r вузлів, на кожен з яких ззовні надходить неоднорідний за часом пуассонівський потік вимог $\nu_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\Lambda_i(t)$ — ведуча функція вхідного потоку $\nu_i(t)$, яка за означенням є неспадною і неперервною справа. Кожен вузол мережі функціонує як багатоканальна система обслуговування. При надходженні вимоги в такий вузол одразу починається її обслуговування. Тривалості обслуговування вимог у i-тому вузлі мережі стохастично незалежні, однаково розподілені, мають довільну (не обов'язково експоненціальну) функцію розподілу $G_i(t)$. Після завершення обслуговування в i-тому вузлі мережі вимога з імовірністю p_{ij} переходить для обслуговування в j-тий вузол, $j = 1, 2, \ldots, r$, та з імовірністю $p_{ir+1} = 1 - \sum_{j=1}^{r} p_{ij}$ залишає мережу. $P = \|p_{ij}\|_1^r$ - матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол з номером "$r + 1$" інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

В подальшому будемо вважати, що $G_i(0+) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, що завжди має місце на практиці. Відповідно до загальноприйнятої системи позначень, таку мережу будемо кодувати символом $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$.

Процесом обслуговування вимог для такої мережі масового обслуговування будемо називати r — вимірний випадковий процес $Q'(t) = (Q_1(t), \ldots, Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, — кількість зайнятих приладів в i-тому вузлі мережі в момент часу t, символ $'$ позначає транспонування. На відміну від моделей з показниковою функцією розподілу часу обслуговування вимог ([5, 6, 8]), для даної моделі процес обслуговування є немарковським.

Траєкторія вимоги всередині мережі від моменту надходження в $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$ — мережу через i-тий вузол, $i = 1, 2, \dots, r$, і до моменту виходу з мережі може бути описана за допомогою напівмарковського процесу $x^{(i)}(t)$, $t \geq 0$, в множині станів $\{1, 2, \dots, r, r+1\}$, який визначається напівмарковською матрицею $\|G_{ij}(t)\|_1^{r+1}$ виду:

$$G_{ij}(t) = \begin{cases} p_{ij} G_i(t), & i = 1, 2, \dots r, \ j = 1, 2, \dots r, r+1; \\ \delta_{r+1,j} G_{r+1}(t), & i = r+1, \ j = 1, 2, \dots r, r+1; \end{cases}$$

$$G_{r+1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

У початковий момент часу $t = 0$

$$\mathsf{P}\left\{x^{(i)}(0) = i\right\} = \delta_{ij}, \qquad j = 1, 2, \dots, r,$$

δ_{ij} — символ Кронекера, і функція розподілу часу перебування у початковому стані "i" співпадає з $G_i(t)$.

Стан "$r+1$" для напівмарковського процесу $x^{(i)}(t)$ є поглинаючим. Поглинання в стані "$r+1$" інтерпретується як вихід вимоги з мережі. Зауважимо, що вигляд функції розподілу $G_{r+1}(t)$ часу перебування процесу в поглинаючому стані не впливає на результати подальшого аналізу. Функція зі стрибком в 1 вибрана виключно для визначеності.

Позначимо через $p_j^i(t) = \mathsf{P}\left\{x^{(i)}(t) = j\right\}$ перехідні ймовірності напівмарковського процесу $x^{(i)}(t)$, відповідна матриця перехідних ймовірностей якого $P(t) = \|p_j^i(t)\|_1^r$. Для подальшого аналізу необхідні також функції

$$p^i_{j_1, j_2, \dots, j_k}(t_1, t_2, \dots, t_k) = \mathsf{P}\left\{x^{(i)}(t_1) = j_1, \dots, x^{(i)}(t_k) = j_k\right\},$$
$$i = 1, 2, \dots, r, \qquad j_k = 1, 2, \dots, r, \qquad t_1 < t_2 < \dots < t_k,$$

які однозначно визначаються послідовністю систем інтегральних рівнянь марковського відновлення:

$$p^i_{j_1}(t_1) = \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} dG_{im}(u) p^m_{j_1}(t_1 - u) + \delta_{ij_1}\left[1 - G_i(t_1)\right], \qquad k = 1,$$

$$\begin{aligned} &p^i_{j_1, j_2, \dots, j_k}(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\quad = \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} dG_{im}(u) p^m_{j_1, j_2, \dots, j_k}(t_1 - u, t_2 - u, \dots, t_k - u) \\ &\quad + \sum_{\alpha=2}^{k} \delta_{ij_1} \dots \delta_{ij_{\alpha-1}} \sum_{m=1}^{r} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} dG_{im}(u) p^m_{j_\alpha, j_{\alpha+1}, \dots, j_k}(t_\alpha - u, t_{\alpha+1} - u, \dots, t_k - u) \\ &\quad + \delta_{ij_1} \dots \delta_{ij_k}\left[1 - G_i(t_k)\right], \qquad k > 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Багатовимірний процес обслуговування $Q'(t) = (Q_1(t), \dots, Q_r(t))$ будемо досліджувати в умовах критичного завантаження мережі. Перевантажений режим для $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$ — мережі означає, що її параметри залежать від "n" (номера серії) таким чином, що для вхідних потоків виконується

Умова 1. На будь-якому скінченному інтервалі $[0, T]$ ведучі функції вхідних потоків

$$n^{-1}\Lambda_i^{(n)}(nt) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} \Lambda_i^{(0)}(t),$$

де символом $\overset{U}{\Rightarrow}$ позначено збіжність у рівномірній топології, причому граничні функції задовольняють умові Гьольдера: для деякого показника $\alpha_i > 0$, сталої $C_i > 0$ і всіх $s, t \geq 0$

$$\left|\Lambda_i^{(0)}(t) - \Lambda_i^{(0)}(s)\right| \leq C_i \left|t - s\right|^{\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Для функцій розподілу часу обслуговування вимог у вузлах мережі виконується така умова:

Умова 2.

$$G_i^{(n)}(nt) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\Rightarrow}} G_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, r,$$

де символом $\overset{d}{\Rightarrow}$ позначено слабку збіжність функцій розподілу.

Наведемо два важливих випадки, коли Умова 1 виконується. У зв'язку з цим тимчасово припустимо, що пуассонівський потік $\nu_i(t)$ регулярний: $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(u)\,du$, де $\lambda_i(u)$ — миттєве значення параметра.

1) Якщо для регулярного потоку

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_i(t) = \lambda_i > 0,$$

то Умова 1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t) = \lambda_i t$.

2) Нехай тепер $\lambda_i(t)$ — періодична з періодом T_i функція,

$$\lambda_i(nT_i + t) = \lambda_i(t), \qquad n = 1, 2, \ldots,\ 0 \leq t < T_i.$$

Тоді Умова 1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t) = \left(\int_0^{T_i} \lambda_i(u)\,du\right)t/T_i$.

3. Формулювання граничної теореми та деякі допоміжні результати

Розглянемо в контексті умов 1, 2 нормований процес обслуговування вимог у вузлах $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$-мережі:

$$\xi^{(n)\prime}(t) = n^{-1/2}\left(Q^{(n)}(nt) - \int_0^{nt}\left[d\Lambda^{(n)}(\tau)\right]' P^{(n)}(nt - \tau)\right),$$

де

$$\left[d\Lambda^{(n)}(\tau)\right]' = \left(d\Lambda_1^{(n)}(\tau), \ldots, d\Lambda_r^{(n)}(\tau)\right),$$

$$P^{(n)}(t) = \|p_j^{i(n)}(t)\|_{i,j=1}^r, \qquad p_j^{i(n)}(t) = \mathsf{P}\left(x^{(i,n)}(t) = j\right),$$

$x^{(i,n)}(t)$ — напівмарковський процес, який визначається так само, як $x^{(i)}(t)$ із заміною функції розподілу $G_i(t)$ на $G_i^{(n)}(t)$.

Для того, щоб описати граничну поведінку процесу $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, необхідно ввести два незалежні гауссівські процеси $\hat{\xi}^{(1)}(t)$ і $\hat{\xi}^{(2)}(t)$, які мають нульові середні значення

$$\mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)}(t) = 0, \qquad \mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(2)}(t) = 0,$$

і кореляційні матриці такого виду:

$$R^{(1)}(t) = \mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)}(t)\hat{\xi}^{(1)\prime}(t) - \mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)}(t)\,\mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)\prime}(t) = \int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau),$$

$$R^{(1)}(s,t) = \mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)}(s)\hat{\xi}^{(1)\prime}(t) - \mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)}(s)\,\mathsf{E}\,\hat{\xi}^{(1)\prime}(t) = \int_0^s P'(s-\tau)\Delta\left[d\Lambda^{(0)}(\tau)\right]P(t-\tau),$$

$$R^{(2)}(t) = \int_0^t \left[\Delta\left[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)\right] - P'(t-\tau)\Delta\left[d\Lambda^{(0)}(\tau)\right]P(t-\tau)\right],$$

$$R^{(2)}(s,t) = \sum_{m=1}^r \int_0^s \left[\Delta(p^m(s-\tau)) - p^m(s-\tau)p^{m\prime}(s-\tau)\right]E^{(m)}(s-\tau, t-\tau)\,d\Lambda_m^{(0)}(\tau),$$

де $s < t$, $\left(d\Lambda^{(0)}(\tau)\right)' = \left(d\Lambda_1^{(0)}(\tau), \dots, \lambda_r^{(0)}(\tau)\right)$, $\Delta(x) = \|x_i \delta_{ij}\|_1^r$ — діагональна матриця з вектором $x = (x_1, \dots, x_r)$ на головній діагоналі, $p^{m\prime}(t) = (p_1^m(t), \dots, p_r^m(t))$ — m-тий рядок матриці $P(t) = \|p_i^m(t)\|_1^r$, $E^{(m)}(s,t) = \|E_{ij}^m(s,t)\|_{i,j=1}^r$,

$$E_{ij}^m(s,t) = \begin{cases} p_{ij}^m(s,t)/p_i^m(s), & \text{при} \quad p_i^m(s) \neq 0, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$p_{ij}^m(s,t) = \mathsf{P}\left(x^{(m)}(s) = i, x^{(m)}(t) = j\right).$$

Для нормованого процесу обслуговування $\xi^{(n)}(t)$, $n \ge 1$, справедливий такий результат.

Теорема 3.1. *Нехай стохастична мережа типу* $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$ *задовольняє Умовам 1, 2, і в початковий момент часу* $t = 0$ *мережа порожня:* $Q_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$. *Тоді на будь-якому скінченному проміжку* $[0, T]$ *послідовність випадкових процесів* $\xi^{(n)}(t)$, $n \ge 1$, *слабко збігається у рівномірній топології до процесу* $\hat{\xi}^{(1)}(t) + \hat{\xi}^{(2)}(t)$.

Доведення теореми випливає з декількох допоміжних результатів.

Лема 1. *Нехай* $\nu^{(n)}(t)$ *— пуассонівський процес з ведучою функцією* $\Lambda^{(n)}(t)$, *яка задовольняє умові 1. Тоді на будь-якому скінченному інтервалі* $[0, T]$ *послідовність випадкових процесів* $W^{(n)}(t) = n^{-1/2}(\nu^{(n)}(nt) - \Lambda^{(n)}(nt))$, $n \ge 1$, *збігається в рівномірній топології до вінерівського процесу* $W^{(0)}(t)$ *з* $\mathsf{E}\, W^{(0)}(t) = 0$ *та* $\operatorname{Var} W^{(0)}(t) = \Lambda^{(0)}(t)$.

Доведення. Збіжність скінченновимірних розподілів процесу $W^{(n)}(t)$ до $W^{(0)}(t)$ випливає з того, що для будь-якого натурального числа N і моментів часу $0 < t_1 < \dots < t_N$ сумісна характеристична функкія випадкових величин $\nu(t_1), \dots, \nu(t_N)$ для пуассонівського процесу $\nu(t)$ з ведучою функцією $\Lambda(t)$ має вигляд:

$$\mathsf{E} \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} s(k) \nu(t_k) \right\} = \prod_{k=0}^{N-1} \exp\left\{ [\Lambda(t_{k+1}) - \Lambda(t_k)] \left[\exp\left(i \sum_{m=k+1}^{N} s(m) \right) - 1 \right] \right\},$$

де $(s(1), \dots, s(N)) \in R_N$, $t_0 = 0$.

Тепер, для того щоб довести збіжність в рівномірній топології, достатньо перевірити для деякого $\varepsilon > 0$ виконання наступної умови:

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \le h} \mathsf{P}\left\{ \left| W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1) \right| > \varepsilon \right\} = 0 \tag{2}$$

з [3, стор.493].

Застосовуючи нерівність Чебишова, маємо:

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}\left\{ \left| W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1) \right| > \varepsilon \right\} \\ &\quad = \mathsf{P}\left\{ \left| \left(\nu^{(n)}(nt_2) - \nu^{(n)}(nt_1) \right) - \left(\Lambda^{(n)}(nt_2) - \Lambda^{(n)}(nt_1) \right) \right| > \varepsilon \sqrt{n} \right\} \\ &\quad \le \varepsilon^{-2} \sup_{|t_1 - t_2| \le h} \left| n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_2) - n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_1) \right|. \end{aligned}$$

З іншого боку Умова 1 гарантує, що

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \le h} \left| n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_2) - n^{-1} \Lambda^{(n)}(nt_1) \right| = 0.$$

Звідси маємо

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t_1 - t_2| \le h} \mathsf{P}\left\{ \left| W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Лему доведено. $\square$

Через $W_i^{(0)}(t)$, $i=1,2,\ldots,r$, будемо позначати незалежні вінерівські процеси з $\mathsf{E}\,W_i^{(0)}(t)=0$ і $\operatorname{Var}W_i^{(0)}(t)=\Lambda_i^{(0)}(t)$. При виконанні Умови 1 процес $W^{(0)\prime}(t)=\big(W_1^{(0)}(t),\ldots,W_r^{(0)}(t)\big)$ апроксимує потік вимог ззовні $\nu^{(n)\prime}(t)=\big(\nu_1^{(n)}(t),\ldots,\nu_r^{(n)}(t)\big)$ в мережі типу $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$ в рівномірній топології.

Для $W^{(0)'}(t)=\big(W_1^{(0)}(t),\ldots,W_r^{(0)}(t)\big)$ нам потрібен наступний результат.

Лема 2. *Скінченновимірні розподіли $\int_0^t dW^{(0)'}(u)P(t-u)$ співпадають зі скінченновимірними розподілами гауссівського процесу $\hat{\xi}^{(1)}(t)$.*

Цей результат є частковим випадком Леми 1 з [4].

Пов'яжемо з напівмарковським процесом $x^{(m)}(t)$, r-вимірний процес індикаторного типу $\chi^{(m)}(t)=\big(\chi_1^{(m)}(t),\ldots,\chi_r^{(m)}(t)\big)$, $t\geq 0$ таким чином:

$$\chi^{(m)}(t)=\begin{cases} e_j, & x^{(m)}(t)=j,\ j=1,2,\ldots,r;\\ e_0, & x^{(m)}(t)=r+1;\end{cases} \tag{3}$$

де e_j — r-вимірний вектор, j-та компонента якого дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, e_0 — r-вимірний вектор, що складається з 0.

Для будь-якого натурального N та $z'(k)=(z_1(k),\ldots,z_r(k))$, $k=1,2,\ldots,N$, $|z(k)|\leq 1$, позначимо сумісну генератрису векторів $\chi^{(m)}(t_1),\ldots,\chi^{(m)}(t_N)$, $0<t_1<\cdots<t_N$, через

$$\Phi^{(m)}=\Phi^{(m)}\left(t_1,\ldots,t_N,z(1),\ldots,z(N)\right).$$

Функцію $\Phi^{(m)}$ можна подати в такому вигляді.

Лема 3. *Нехай функції $p^i_{j_1,j_2,\ldots,j_k}(t_1,t_2,\ldots,t_k)$ визначаються системою* (1). *Тоді для будь-яких $N=1,2,\ldots$ та $0<t_1<\cdots<t_N$*

$$\begin{aligned}\Phi^{(m)}&\left(t_1,\ldots,t_N,z(1),\ldots,z(N)\right)\\ &=1+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k_1,\ldots,k_i=1}^{r}p^m_{k_1,\ldots,k_i}(t_1,\ldots,t_i)z_{k_1}(1)\ldots z_{k_{i-1}}(i-1)[z_{k_i}(i)-1],\end{aligned} \tag{4}$$

де за домовленістю $z_{k_1}(1)\cdot\cdots\cdot z_{k_{i-1}}(i-1)=1$ при $i=1$.

Доведення. У випадку, коли $N=1$, генератриса $\chi^{(m)}(t_1)$ дорівнює:

$$\Phi^{(m)}\left(t_1,z(1)\right)=\sum_{k=0}^{r}z(1)^{e_k}\,\mathsf{P}\left\{\chi^{(m)}(t_1)=e_k\right\},$$

де $z(1)^x=z_1(1)^{x_1}\cdot\cdots\cdot z_r(1)^{x_r}$. Після відповідних перетворень маємо

$$\begin{aligned}\Phi^{(m)}\left(t_1,z(1)\right)&=1\cdot\mathsf{P}\left\{x^{(m)}(t_1)=r+1\right\}+\sum_{k=1}^{r}z_k(1)\,\mathsf{P}\left\{x^{(m)}(t_1)=k\right\}\\ &=1-\sum_{k=1}^{r}p^m_k(t_1)+\sum_{k=1}^{r}z_k(1)p^m_k(t_1)=1+\sum_{k=1}^{r}\left(z_k(1)-1\right)\cdot p^m_k(t_1).\end{aligned}$$

Аналогічно для $N \geq 2$ із урахуванням того, що стан "$r+1$" є поглинаючим, знаходимо

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{(m)}(t_1,\dots,t_N,z(1),\dots,z(N)) \\
&\quad = \sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{r} z(1)^{e_{k_1}}\cdot\dots\cdot z(N)^{e_{k_N}}\,\mathsf{P}\left\{\chi^{(m)}(t_1)=e_{k_1},\dots,\chi^{(m)}(t_N)=e_{k_N}\right\} \\
&\quad = \mathsf{P}\left\{\chi^{(m)}(t_1)=e_0\right\} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k_1,\dots,k_i=1}^{r} z(1)^{e_{k_1}}\cdot\dots\cdot z(i)^{e_{k_i}} \\
&\qquad\quad \times \mathsf{P}\left\{\chi^{(m)}(t_1)=e_{k_1},\dots,\chi^{(m)}(t_i)=e_{k_i},\chi^{(m)}(t_{i+1})=e_0\right\} \\
&\quad = \mathsf{P}\left\{x^{(m)}(t_1)=r+1\right\} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k_1,\dots,k_i=1}^{r} z_{k_1}(1)\cdot\dots\cdot z_{k_i}(i) \\
&\qquad\quad \times \mathsf{P}\left\{x^{(m)}(t_1)=k_1,\dots,x^{(m)}(t_i)=k_i,x^{(m)}(t_{i+1})=r+1\right\} \\
&\quad = 1-\sum_{k_1=1}^{r} p^m_{k_1}(t_1) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k_1,\dots,k_i=1}^{r} z_{k_1}(1)\cdot\dots\cdot z_{k_i}(i) \\
&\qquad\quad \times \Bigg[\mathsf{P}\left\{x^{(m)}(t_1)=k_1,\dots,x^{(m)}(t_i)=k_i\right\} \\
&\qquad\qquad - \sum_{k_{i+1}=1}^{r}\mathsf{P}\left\{x^{(m)}(t_1)=k_1,\dots,x^{(m)}(t_i)=k_i,x^{(m)}(t_{i+1})=k_{i+1}\right\}\Bigg] \\
&\quad = 1+\sum_{k_1=1}^{r}(z_{k_1}(1)-1)p^m_{k_1}(t_1) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{k_1,\dots,k_i,k_{i+1}=1}^{r} z_{k_1}(1)\cdot\dots\cdot z_{k_i}(i)(z_{k_{i+1}}(i+1)-1) \\
&\qquad\qquad\qquad \times p^m_{k_1,\dots,k_i,k_{i+1}}(t_1,\dots,t_i,t_{i+1}).
\end{aligned}
$$

Таким чином співвідношення (4) справедливе і лему доведено. □

4. Доведення теореми

Тепер можна представити аргументи, які доводять сформульовану вище теорему. Розглянемо одновимірні розподіли процесу $\xi^{(n)}(t)$, $t \geq 0$.

При фіксованій траєкторії вхідного потоку $\nu'(t) = (\nu_1(t),\dots,\nu_r(t))$ розподіл процесу $Q(t)$ співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{l=1}^{\nu_m(t)} \chi_l^m\left(t-\tau_l^{(m)}\right), \tag{5}$$

де через $\tau_l^{(m)}$ позначено момент першого надходження l-тої вимоги в m-тий вузол мережі, $\chi = \{\chi_l^m(t), t \geq 0; m = 1, 2, \dots, r; l = 1, 2, \dots\}$ — сімейство незалежних у сукупності процесів індикаторного типу, розподіли яких залежать від індексу $m = 1, 2, \dots, r$ і не залежать від індексу $l = 1, 2, \dots$. При цьому скінченновимірні розподіли процесів $\chi_l^m(t)$, $l = 1, 2, \dots$, співпадають зі скінченновимірними розподілами процесу $\chi^m(t)$, який побудований вище за напівмарковським процесом $x^m(t) \in \{1, 2, \dots, r, r+1\}$, $m = 1, 2, \dots, r$.

Враховуючи (4) і (5) при $N = 1$, генератрису

$$\Phi(z,t) = \mathsf{E}\left(\prod_{k=1}^{r} z_k^{Q_k(t)}\right) = \mathsf{E}\, z^{Q(t)}, \qquad z' = (z_1, \dots, z_r), \qquad |z| \leq 1,$$

вектора $Q(t)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(z,t) = \mathsf{E} \prod_{m=1}^{r} \prod_{l=1}^{\nu_m(t)} \left[1 + p^{m\prime}\left(t - \tau_l^{(m)}\right)(z - \bar{1})\right], \tag{6}$$

де $p^{m\prime}(\tau) = (p_1^m(\tau), \dots, p_r^m(\tau))$ — m-тий рядок матриці $P(\tau)$, $\bar{1} = (1, \dots, 1)'$ — r-вимірний вектор, складений з одиниць.

Нехай $\phi^{(n)}(s)$, $s' = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ — характеристична функція $\xi^{(n)}(t)$. Тоді з урахуванням (6) так, як це було зроблено при доведенні теореми в роботі [5], знаходимо

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \phi^{(n)}(s) &= \exp\Bigg\{-\frac{1}{2}s' \int_0^t \Big[\Delta\left[d\Lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t-\tau)\right] - P'(t-\tau)\Delta\left[d\Lambda^{(0)}(\tau)\right]P(t-\tau)\Big]s \\ &\qquad - \frac{1}{2}s' \int_0^t P'(t-\tau)\Delta\left[d\Lambda^{(0)}(\tau)\right]P(t-\tau)s\Bigg\}\end{aligned} \tag{7}$$

Права частина співвідношення (7) представляє собою характеристичну функцію процесу $\hat{\xi}^{(1)}(t) + \hat{\xi}^{(2)}(t)$ і збіжність одновимірних розподілів доведено.

Перейдемо до двовимірних розподілів. При фіксованій траєкторії вхідного потоку розподіл вектора $(Q(t_1), Q(t_2))$, $0 < t_1 < t_2$, співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{\nu_m(t_1)} \chi_l^m\left(t_1 - \tau_l^{(m)}\right), \sum_{l=1}^{\nu_m(t_1)} \chi_l^m\left(t_2 - \tau_l^{(m)}\right) + \sum_{l=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)} \chi_l^m\left(t_2 - \tau_l^{(m)}\right)\right) \tag{8}$$

Застосувавши формулу (4) для $N = 2$, сумісну генератрису $\Phi(t_1, t_2, z(1), z(2)) = \mathsf{E}\, z(1)^{Q(t_1)} \cdot z(2)^{Q(t_2)}$, $z'(i) = (z_1(i), \dots, z_r(i))$, $|z(i)| \leq 1$, $i = 1, 2$, векторів $Q(t_1)$, $Q(t_2)$ можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\Phi(t_1, t_2, z(1), z(2)) &= \mathsf{E}\Bigg\{\prod_{m=1}^{r}\prod_{l=1}^{\nu_m(t_1)}\Bigg[1 + p^{m\prime}(t_1 - \tau_l^{(m)})(z(1) - \bar{1}) \\ &\qquad + \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} p_{\alpha\beta}^m(t_1 - \tau_l^{(m)}, t_2 - \tau_l^{(m)}) z_\alpha(1)(z_\beta(2) - 1)\Bigg] \\ &\qquad \times \prod_{l=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)}\left[1 + p^{m\prime}(t_2 - \tau_l^{(m)})(z(2) - \bar{1})\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Використовуючи подання (9) можна знайти границю сумісної характеристичної функції $\phi^{(n)}(s(1), s(2))$, $s(1), s(2) \in \mathbb{R}^r$, векторів $\xi^{(n)}(t_1)$ та $\xi^{(n)}(t_2)$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \phi^{(n)}(s(1), s(2)) &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E} \exp\Big\{ i\xi^{(n)\prime}(t_1)s(1) + i\xi^{(n)\prime}(t_2)s(2) \Big\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\bigg\{ -i\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_1} \Big[d\Lambda^{(n)}(n\tau) \Big]' P(t_1-\tau)s(1) \\
&\qquad\qquad - i\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_2} \Big[d\Lambda^{(n)}(n\tau) \Big]' P(t_2-\tau)s(2) \bigg\} \\
&\quad \times \mathsf{E} \exp\bigg\{ i\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t_1-\tau)s(1) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\frac{1}{n} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t_1-\tau)s^2(1) \\
&\qquad + i\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t_2-\tau)s(2) \\
&\qquad - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{r} s'(1) \int_0^{t_1} d\nu_m^{(n)\prime}(n\tau)\Delta\left[p^m(t_1-\tau)\right] E^{(m)}(t_1-\tau, t_2-\tau)s(2) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\frac{1}{n} \int_0^{t_1} d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t_2-\tau)s^2(2) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{r} \int_0^{t_1} s'(1)p^m(t_1-\tau)p^{m\prime}(t_1-\tau)s(1)d\nu_m^{(n)}(n\tau) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{r} s'(2) \int_0^{t_1} d\nu_m^{(n)}(n\tau)p^m(t_2-\tau)p^{m\prime}(t_2-\tau)s(2) \\
&\qquad + i\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{t_1}^{t_2} d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t_2-\tau)s(2) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\frac{1}{n} \int_{t_1}^{t_2} d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t_2-\tau)s^2(2) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{r} s'(2) \int_{t_1}^{t_2} d\nu_m^{(n)}(n\tau)p^m(t_2-\tau)p^{m\prime}(t_2-\tau)s(2) \bigg\} \\
&= \mathsf{E} \exp\left\{ i\int_0^{t_1} dW^{(0)\prime}(\tau)P(t_1-\tau)s(1) + i\int_0^{t_2} dW^{(0)\prime}(\tau)P(t_2-\tau)s(2) \right\} \\
&\quad \times \exp\bigg\{ -\frac{1}{2}s'(1) \int_0^{t_1} \Big[\Delta \Big[d\Lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t_1-\tau) \Big] \\
&\qquad\qquad - P'(t_1-\tau)\Delta \Big[d\Lambda^{(0)}(\tau) \Big] P(t_1-\tau) \Big] s(1) \\
&\qquad - \frac{1}{2}s'(2) \int_0^{t_2} \Big[\Delta \Big[d\Lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t_2-\tau) \Big] \\
&\qquad\qquad - P'(t_2-\tau)\Delta \Big[d\Lambda^{(0)}(\tau) \Big] P(t_2-\tau) \Big] s(2) \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{r} s'(1) \int_0^{t_1} d\Lambda_m^{(0)}(\tau) \left[\Delta\left[p^m(t_1-\tau)\right] - p^m(t_1-\tau)p^{m\prime}(t_1-\tau) \right] \\
&\qquad\qquad \times E^{(m)}(t_1-\tau, t_2-\tau)s(2) \bigg\}.
\end{aligned}
$$

Отримана границя є характеристичною функцією двовимірного розподілу процесу $\hat{\xi}^{(1)}(t) + \hat{\xi}^{(2)}(t)$. Аналогічно перевіряється збіжність N-вимірних розподілів для $N \geq 2$.

Співвідношення (2) і збіжність функціоналів, неперервних відносно рівномірної метрики, перевіряється так само, як це було зроблено у [5].

5. Висновки

В роботі розглянуто моделі стохастичних мереж типу $[\overrightarrow{M_t}|GI|\infty]^r$. Це — доволі загальний клас моделей, який часто використовується для вивчення реальних мереж. Аналіз граничного процесу приводить до такого висновку: якщо хоча б в одному вузлі функція розподілу часу обслуговування вимог відрізняється від показникової, то в процесі обслуговування відбувається накопичення післядії і граничний процес не буде марковським. Цим апроксимативний процес суттєво відрізняється від його аналогів у мережах з показниковим часом обслуговування вимог у вузлах мережі.

Головна властивість граничного гауссівського процесу в тому, що він є сумою двох незалежних гаусівських процесів. Перший з них обумовлений флуктуаціями вхідного потоку вимог, другий - флуктуаціями часів обслуговування.

Отримані результати можуть знайти застосування для розв'язування практичних задач, пов'язаних з управлінням складними технологічними процесами, створенням та експлуатацією мобільних мереж зв'язку та інформаційно-обчислювальних систем. Апроксимативні процеси можна використовувати для підрахунку функціоналів якості роботи стохастичних мереж, розв'язуванні оптимізаційних задач вибору пропускних здатностей, розподілу потоків, вибору топології мережі. Ці задачі, застосовані до конкретних мереж, дозволять покращити їх надійність, економічність, оперативність обслуговування, зменшити пікове навантаження.

Література

1. В. В. Анисимов, Е. А. Лебедев, *Стохастические сети обслуживания. Марковские модели*, "Либідь", Київ, 1992.
2. А. Ю. Веретенников, О. М. Кулик, *Диффузионная аппроксимация систем со слабо эргодическими марковскими возмущениями I*, Теорія ймовірностей та математична статистика **87** (2012), 12–27.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1, "Наука", Москва, 1971.
4. Є. О. Лебєдєв, *Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування*, Теорія ймовірностей та математична статистика **68** (2003), 81–92.
5. А. В. Ливинская, Е. А. Лебедев, *Предельная теорема для перегруженных многоканальных сетей*, Кибернетика и системный анализ (2012), №6, 106–113.
6. Г. В. Лівінська, *Апроксимативний гауссівський процес для мереж типу та його властивості*, Вісник Київського університету. Серія: кібернетика (2012), №12, 32–37.
7. V. V. Anisimov, *Switching processes in Queueing Models*, ISTE Ltd, 2008.
8. E. Lebedev and G. Livinska, *Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic*, Communications in Computer and Information Science (2013), no. 356, 122–130.
9. H. V. Livinska and E. O. Lebedev, *Conditions of Gaussian non-Markov approximation for multi-channel networks*, Proceedings of the 29-th European Conference on Modelling and Simulation ECMS-2015, Albena (Varna), Bulgaria, ISBN 978-0-9932440-0-1, 2015, pp. 642–649.

Кафедра прикладної статистики, факультет кібернетики, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 4Д, Київ 03680, Україна

Адреса електронної пошти: livinskaav@gmail.com

Надійшла 16/06/2015