Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 127–141

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 127–141

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЦІН ОПЦІОНІВ ПРИ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЦЕСУ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА БЕРНУЛЛІЄВСЬКИМИ СТРИБКАМИ ЦІН АКЦІЙ

УДК 519.21

Ю. С. МІШУРА І Є. Ю. МУНЧАК

Анотація. В статті розглянуто дискретну апроксимаційну схему цін акцій, змодельованих геометричним процесом Орнштейна–Уленбека. Апроксимаційна схема є схемою Ейлера, в якій прирости вінерівського процесу замінено на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Оцінено швидкість збіжності об'єктивних та справедливих цін опціонів з використанням класичних результатів про швидкість збіжності до нормального закону функцій розподілу сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Проаналізовано перехід від об'єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

Abstract. The paper contains the discrete approximation scheme for the price of asset that is modeled by geometric Ornstein–Uhlenbeck process. The idea is to consider Euler-type discrete-time approximations but to replace the increments of the Wiener process with Bernoulli's independent identically distributed random variables. The rate of convergence of both objective and fair option prices is estimated using the classical results of the rate of convergence to the normal law of the distribution function of the sum of non-identically distributed random variables. The transition from the objective to the martingale measure and what happens with option prices in the model under such transformation, is analyzed.

Аннотация. В статье рассмотрена дискретная схема аппроксимации цен акций, моделируемых геометрическим процессом Орнштейна–Уленбека. Приближенная схема является схемой Эйлера, в которой приращения винеровского процесса заменяются на бернуллиевские независимые одинаково распределенные случайные величины. Оценивается скорость сходимости объективных и справедливых цен опционов с использованием классических результатов касательно скорости сходимости к нормальному закону функций распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Проанализирован переход от объективной меры к мартингальной, и что происходит с ценами активов в данной модели при таком переходе.

1. Вступ

Велику кількість робіт у фінансовій математиці присвячено збіжності моделей з дискретним часом до моделей з неперервним часом. Це зумовлено тим, що з аналітичної точки зору моделі з неперервним часом допускають набагато простіші розрахунки, проте реальні моделі оперують в дискретному часі. При цьому природним чином постає питання щодо швидкості збіжності цін опціонів. Існує велика різноманітність вибору як граничної моделі, так і дограничної, тому роботи з оцінки швидкості збіжності стосуються, в основному, дограничної біноміальної та триноміальної моделей та граничної моделі Блека–Шоулса [1, 2, 4, 10]. Це пояснюється

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B24, 91B25, 91G20.

Ключові слова і фрази. Фінансовий ринок, швидкість збіжності, процес Орнштейна–Уленбека, ціни опціонів.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції "Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)", 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

наявністю досить тонких аналітичних результатів про швидкість збіжності біноміального розподілу до гауссівського, які дозволяють підвищити оцінку швидкості збіжності, скажімо, до $O(n^{-1})$, де n — кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в дограничній моделі. В статтях [5]–[9] розглянуто більш загальні схеми як для дограничних, так і для граничного ринку. А саме, у статті [5] загальні умови слабкої збіжності для послідовності процесів з дискретним часом до дифузійного процесу застосовуються до слабкої збіжності для дискретних моделей фінансового ринку до дифузійних моделей з неперервним часом. Процес Орнштейна–Уленбека розглядається як гранична модель (без оцінки швидкості збіжності цін опціонів). Випадок, коли загальна мартингальна схема з дискретним часом апроксимує стандартну модель Блека–Шоулса, розглядається в роботі [6]. При цьому швидкість збіжності цін опціонів не менша за $n^{-1/8}$. При застосуванні асимптотичного розкладу функції розподілу встановлено, що швидкість збіжності може бути $n^{-1/2}$. В статті [7] розглядається дискретна апроксимаційна схема для процесу Орнштейна–Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського процесу замінюються на незалежні однаково розподілені обмежені симетричні випадкові величини з рівномірним розподілом. Встановлено, що швидкість об'єктивних та справедливих цін опціонів не менша за $\frac{C}{n^{1/3}}$. В статті [9] досліджується швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом до моделі Блека–Шоулса. Ця швидкість має порядок $O(n^{-1})$, де n — кількість періодів для проведення торгів на фіксованому інтервалі часу в дограничній моделі. Для отримання такої оцінки швидкості збіжності застосовується результат із [8] щодо швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для однаково розподілених випадкових величин, одержаної за методом псевдомоментів. Основний результат є вірним за виконання отриманої нерівності за методом псевдомоментів незалежно від того чи використовується для її перевірки метод псевдомоментів, який може дати таку швидкість збіжності, чи інший. Але навіть за умови підвищення швидкості збіжності в даній оцінці доведення результату спирається на додаткові оцінки, які мають очевидну швидкість порядку $1/n$, тому досягти підвищення швидкості збіжності цін опціонів в даній моделі здається неможливим.

У даній роботі ми розглядаємо наступний підхід до оцінки швидкості збіжності цін опціонів. В розділі 2 наводиться гранична модель цін активів, змодельованих геометричним процесом Орнштейна–Уленбека. Розділ 3 містить опис і властивості дограничного дискретного цінового процесу. Розглядається дискретна апроксимаційна схема для процесу Орнштейна–Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера, але прирости вінерівського процесу замінюються на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. Основні результати містяться в розділах 4 і 5. Сформульовано умови, за виконання яких швидкість збіжності об'єктивних і справедливих цін опціонів обмежена зверху величиною $\frac{C}{\sqrt{n}}$. Проаналізовано перехід від об'єктивної міри до мартингальної і зміни, що відбуваються з розподілом цін на ринку при такому переході у вказаній моделі.

2. Опис і властивості граничного неперервного цінового процесу

Нехай $T > 0$, $\mathbb{T} = [0, T]$ і $\Omega_{\mathcal{F}} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}), \mathsf{P})$ — повний стандартний стохастичний базис. Нехай $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ — адаптований вінерівський процес. Розглянемо адаптований процес Орнштейна–Уленбека $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ зі сталими параметрами на цьому стохастичному базисі. Такий процес Орнштейна–Уленбека є єдиним розв'язком наступного стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (\mu - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \qquad X_0 = x_0 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

де $\mu \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$. Явна формула для X має вигляд

$$X_t = x_0 e^{-t} + \mu \left(1 - e^{-t}\right) + \sigma e^{-t} \int_0^t e^s \, dW_s.$$

Нарешті, припустимо, що ціна активу S_t задовольняє рівність

$$S_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right\}, \qquad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

де невипадкова величина $-\frac{1}{2}\sigma^2 t$ додається з огляду на технічну простоту. В [5] було доведено, що ринок з облігацією $B_t = e^{rt}$ і акцією S_t є безарбітражним і повним. Більше того, єдина ймовірнісна міра $\mathsf{P}^* \sim \mathsf{P}$ така, що відносно P^* $Z_t := \frac{S_t}{B_t}$ є $\mathcal{F}_t$-мартингалом, має похідну Радона–Нікодима у вигляді $\left.\frac{d\,\mathsf{P}^*}{d\,\mathsf{P}}\right|_T$, де

$$\left.\frac{d\,\mathsf{P}^*}{d\,\mathsf{P}}\right|_t = \exp\left\{-\int_0^t \frac{\mu - r - X_s}{\sigma}\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\mu - r - X_s)^2}{\sigma^2}\, ds\right\},$$

і відносно P^* процес Z_t має вигляд

$$Z_t = \exp\left\{x_0 + \sigma \widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right\}$$

з деяким вінерівським процесом $\widetilde{W}$.

3. Опис і властивості дограничного дискретного цінового процесу

Побудуємо дискретну схему, яка слабко збігається до геометричного процесу Орнштейна–Уленбека (2). Спочатку розглянемо наступну дискретну апроксимаційну схему для самого процесу Орнштейна–Уленбека, яка базується на апроксимації Ейлера розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1), але прирости вінерівського процесу замінимо на бернуллієвські незалежні однаково розподілені випадкові величини. А саме, припустимо, що ми маємо послідовність ймовірнісних просторів $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathsf{P}_n)$, $n \geq 1$ і нехай $\left\{q_k^{(n)}, n \geq 1, 0 \leq k \leq n\right\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{T/n}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$.

Нехай $n > T$. Введемо рекурентну схему:

$$x_0^{(n)} \in \mathbb{R}, \qquad R_k^{(n)} := x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right) T}{n} + \sigma q_k^{(n)}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3}$$

Нехай $\mathcal{F}_0^n = \{\varnothing, \Omega\}$ і $\mathcal{F}_k^n = \sigma\left\{R_i^{(n)}, 1 \leq i \leq k\right\}$. Позначимо

$$X_t^n = x_0^{(n)} \mathbb{1}_{t < \frac{T}{n}} + \left(x_0^{(n)} + \sum_{1 \leq k \leq \left[\frac{tn}{T}\right]} R_k^{(n)}\right) \mathbb{1}_{t \geq \frac{T}{n}} = x_{\left[\frac{tn}{T}\right]}^{(n)}.$$

Далі всюди

$$\sum_{1 \leq k \leq \left[\frac{tn}{T}\right]} = 0, \qquad \prod_{1 \leq k \leq \left[\frac{tn}{T}\right]} = 1$$

при $t < \frac{T}{n}$. Побудуємо відповідну мультиплікативну схему для дограничного цінового процесу наступним чином

$$S_t^n = \exp\left\{x_0^{(n)}\right\} \prod_{1 \leq k \leq \left[\frac{tn}{T}\right]} \left(1 + R_k^{(n)}\right), \qquad t \in \mathbb{T}. \tag{4}$$

В статті [7] доведено такі результати для схеми (3)–(4).

Лема 3.1. *Нехай послідовність* $x_0^{(n)}$ *обмежена. Тоді:*

(i) *Існує таке число* $n_0 \in \mathbb{N}$ *і стала* $C > 0$ *не залежна від* n *така, що для будь-якого* $n > n_0$ *і для будь-якого* $1 \le k \le n$ *ма місце оцінка* $\left|R_k^{(n)}\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}} < 1$.

(ii) *Існує стала* $C > 0$*, не залежна від* n *і така, що* $\mathsf{E}\big(x_k^{(n)}\big)^4 \le C$ *для* $n > T$ *і* $1 \le k \le n$.

Як було показано в [5], у випадку, коли $q_k^{(n)}$ має розподіл Бернуллі, ринок з облігацією

$$B_t^n = \prod_{1 \le k \le [\frac{nt}{T}]} \left(1 + r_k^{(n)}\right),$$

і акцією S_t^n з (4) є безарбітражним і повним за додаткового припущення

$$r_k^{(n)} = o\left(n^{-1/2}\right)$$

і $\left|x_0^{(n)}\right| \le C$. Крім того, було встановлено, що існує єдина еквівалентна мартингальна міра $\mathsf{P}^{n,*} \sim \mathsf{P}^n$, яка має похідну Радона–Нікодима

$$\frac{d\,\mathsf{P}^{n,*}}{d\,\mathsf{P}^n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \rho_{k-1}^{(n)} q_k^{(n)}\right), \tag{5}$$

де випадкові величини $\rho_{k-1}^{(n)}$ мають вигляд

$$\rho_{k-1}^{(n)} = \frac{n r_k^{(n)} - \left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right) T}{\sigma T}, \tag{6}$$

причому

$$x_k^{(n)} - \mu = \left(x_0^{(n)} - \mu\right)\left(1 - \frac{T}{n}\right)^k + \sigma \sum_{i=1}^{k} q_i^{(n)} \left(1 - \frac{T}{n}\right)^{k-i}. \tag{7}$$

Сформулюємо відповідний результат як теорему.

Теорема 3.1. *Нехай* $\left\{q_k^{(n)}, n \ge 1, 0 \le k \le n\right\}$ *— послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що* $q_k^{(n)} = \pm\sqrt{T/n}$ *з ймовірністю* $\frac{1}{2}$ *і* $r_k^{(n)} = o\big(n^{-1/2}\big)$, $\left|x_0^{(n)}\right| \le C$. *Тоді ринок* (B_t^n, S_t^n) *асимптотично безарбітражний, що означає, що існує таке* $n_0 \in \mathbb{N}$, *що* (B_t^n, S_t^n) *є безарбітражним для будь-якого* $n \ge n_0$. *Для таких* $n \ge n_0$ *ринок* (B_t^n, S_t^n) *є повним і єдина еквівалентна мартингальна міра* $\mathsf{P}^{n,*}$ *має похідну Радона–Нікодима у вигляді* (5)–(6).

Тепер встановимо, що

$$\sum_{1 \le k \le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 \to \sigma^2 T$$

в $L_2(\mathsf{P})$, разом зі швидкістю збіжності.

Лема 3.2. *Для* $n > T$

$$\mathsf{E}\left(\sum_{1 \le k \le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right)^2 \le \frac{C}{n^2}.$$

Доведення. Почнемо з наступного очевидного перетворення, з урахуванням рівності $\left(q_k^{(n)}\right)^2 = T/n$:

$$\Sigma_n := \mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right)^2 = \mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n} + \sigma q_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right)^2$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}\right)^2\right.$$

$$\left. + 2\sigma\sum_{1\le k\le n}\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}q_k^{(n)} + \sigma^2\sum_{1\le k\le n}\left(q_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right)^2$$

$$= \mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}\right)^2 + 2\sigma\sum_{1\le k\le n}\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}q_k^{(n)}\right)^2$$

$$\le 3\,\mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}\right)^2\right)^2 + 12\sigma^2\,\mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}q_k^{(n)}\right)^2,$$

Беручи до уваги лему 3.1 і елементарну нерівність $\left(\sum_{1\le k\le n} a_k\right)^2 \le n\sum_{1\le k\le n} a_k^2$, отримаємо

$$\mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}\right)^2\right)^2 \le n\sum_{1\le k\le n}\mathsf{E}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}\right)^4 \le Cn^2n^{-4} \le \frac{C}{n^2}.$$

Далі, нагадаємо, що $q_k^{(n)}$ незалежні, відзначимо, що очевидний наслідком леми 3.1 є нерівність $\mathsf{E}\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)^2 \le C$, і отримаємо

$$\mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}q_k^{(n)}\right)^2 = \sum_{1\le k\le n}\mathsf{E}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}q_k^{(n)}\right)^2$$

$$= \sum_{1\le k\le n}\mathsf{E}\left(\frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n}\right)^2\mathsf{E}\left(q_k^{(n)}\right)^2 \le Cnn^{-3} \le Cn^{-2}.$$

Лему доведено. □

4. Основна теорема про швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів в схемі Бернуллі

Позначимо через $\mathbf{C}_n$ і $\mathbf{C}$ стандартний опціон купівлі, $\mathbf{P}_n$ і $\mathbf{P}$ — стандартний опціон продажу з ціною погашення $K \ge 0$ і датою погашення T, на дограничних і граничних активах, відповідно. Позначимо відповідні дисконтовані об'єктивні ціни через $\pi(\mathbf{C}_n)$, $\pi(\mathbf{C})$, $\pi(\mathbf{P}_n)$ і $\pi(\mathbf{P})$, і справедливі ціни $\pi^*(\mathbf{C}_n)$, $\pi^*(\mathbf{C})$, $\pi^*(\mathbf{P}_n)$ і $\pi^*(\mathbf{P})$. Для технічної простоти, припустимо, що ціна облігації для дограничної моделі дорівнює

$$B_t^{(n)} = \left(1 + \frac{rT}{n}\right)^{[tn/T]}$$

і гранична ціна облігації дорівнює $B_t = e^{rt}$. Маємо наступні відношення:

$$\pi(\mathbf{C}_n) = \mathsf{E}\left(\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)-K\right)^+\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}, \qquad n\ge 1,$$

$$\pi(\mathbf{C}) = \mathsf{E}\left(\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}-K\right)^+ e^{-rT},$$

$$\pi(\mathbf{P}_n) = \mathsf{E}\left(K-\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)^+\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}, \qquad n\ge 1,$$

$$\pi(\mathbf{P}) = \mathsf{E}\left(K-\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2 T\right\}\right)^+ e^{-rT},$$

Теорема 4.1. *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) $\left|x_0^{(n)}-x_0\right| \le \frac{C_0}{n^{1/2}}$ *з деякою сталою* $C_0>0$;

(ii) *Незалежні однаково розподілені випадкові величини* $q_k^{(n)}$ *приймають значення* $\pm\sqrt{T/n}$ *з імовірністю* $\frac{1}{2}$.

Тоді, починаючи з деякого $n_0\in\mathbb{N}$, *має місце наступна оцінка*

$$|\pi(\mathbf{D})-\pi(\mathbf{D}_n)| \le \frac{C_1}{n^{1/2}} \tag{8}$$

для деякого $C_1>0$ *і* $\mathbf{D}=\mathbf{C},\mathbf{P}$.

Доведення. Розглянемо тільки опціони продажу, оскільки їхня функція виплат є обмеженою, а тоді доведення для опціонів купівлі випливатиме зі співвідношення пут-колл паритету. З метою технічного спрощення припустимо, що $x_0^{(n)} = x_0 = 1$. Тоді нам потрібно оцінити зверху таку різницю цін:

$$\begin{aligned}|\pi(\mathbf{P})-\pi(\mathbf{P}_n)| = \Bigg|\,&\mathsf{E}\left(K-\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)^+\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}\\ &-\mathsf{E}\left(K-\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\right\}\right)^+e^{-rT}\Bigg|.\end{aligned}$$

Застосовуючи лему A.2 із [7], після деяких елементарних обчислень отримаємо

$$\begin{aligned}&|\pi(\mathbf{P})-\pi(\mathbf{P}_n)|\\ &\le\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}\left|\mathsf{E}\left(K-\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)^+-\mathsf{E}\left(K-\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\right\}\right)^+\right|\\ &\quad+\mathsf{E}\left(K-\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\right\}\right)^+\left|\left(1+\frac{rT}{n}\right)^{-n}-e^{-rT}\right|\\ &\le\left|\mathsf{E}\left(K-\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)^+-\mathsf{E}\left(K-\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\right\}\right)^+\right|+\frac{K(rT)^2}{2n}.\end{aligned} \tag{9}$$

Інтегруючи по частинах, можна зробити висновок, що для будь-якої інтегровної випадкової величини ξ

$$\mathsf{E}(K-\xi)^+ = \int_{-\infty}^{K}\mathsf{P}(\xi\le x)\,dx.$$

Тому

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathsf{E}\left(K-\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)^+-\mathsf{E}\left(K-\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\right\}\right)^+\right| \\
&\quad=\left|\int_0^K\left(\mathsf{P}\left(\exp\left\{X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\right\}\le z\right)-\mathsf{P}\left(\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\le z\right)\right)dz\right| \\
&\quad=\left|\int_0^K\left(\mathsf{P}\left(X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\le\log z\right)-\mathsf{P}\left(\log\left(\prod_{1\le k\le n}\left(1+R_k^{(n)}\right)\right)\le\log z\right)\right)dz\right| \\
&\quad\le\left|\int_0^K\left(\mathsf{P}\left(X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\le\log z\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.-\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2\le\log z\right)\right)dz\right| \\
&\qquad+\left|\int_0^K\left(\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n}\log\left(1+R_k^{(n)}\right)\le\log z\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.-\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2\le\log z\right)\right)dz\right| \\
&\quad=\left|\int_{-\infty}^{\log K}e^y\left(\mathsf{P}\left(X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\le y\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.-\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2\le y\right)\right)dy\right| \\
&\qquad+\left|\int_{-\infty}^{\log K}e^y\left(\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n}\log\left(1+R_k^{(n)}\right)\le y\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left.-\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n}R_k^{(n)}-\frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2\le y\right)\right)dy\right| \\
&\quad=:I_1^n+I_2^n.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Для того, щоб оцінити I_1^n зверху, перепишемо обидві ймовірності з попередньої нерівності. Позначимо

$$
D(y)=\frac{\sqrt{2}\left(y-\mu\left(1-e^{-T}\right)-x_0e^{-T}+\frac{\sigma^2T}{2}\right)}{\sigma\sqrt{1-e^{-2T}}}.
$$

Тоді, очевидно,

$$
\mathsf{P}\left(X_T-\frac{1}{2}\sigma^2T\le y\right)=\Phi\left(D(y)\right).
$$

Крім того, беручи до уваги нерівність $|\Phi(x)-\Phi(y)| \le |x-y|/\sqrt{2\pi}$, отримаємо наступну оцінку:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \le y\right)\right| \\
&\quad \le \mathsf{P}\left(\left|\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right| > \frac{2}{n^{1/2}}\right) \\
&\qquad + \left|\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \le y\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \le y \pm \frac{1}{n^{1/2}}\right)\right| \\
&\quad \le \mathsf{P}\left(\left|\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right| > \frac{2}{n^{1/2}}\right) \\
&\qquad + \left|\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \le y\right) - \Phi(D(y))\right| \\
&\qquad + \left|\mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{\sigma^2 T}{2} \le y \pm \frac{1}{n^{1/2}}\right) - \Phi\left(D\left(y \pm \frac{1}{n^{1/2}}\right)\right)\right| + \frac{C}{n^{1/2}} \\
&\quad =: J_1^n + J_2^n + J_3^n + \frac{C}{n^{1/2}}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

З (11) випливає, що

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathsf{P}\left(X_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \le y\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y\right)\right| \\
&\quad \le \left|\Phi(D(y)) - \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sigma^2 T \le y\right)\right| + J_1^n + J_2^n + J_3^n + \frac{C}{n^{1/2}} \\
&\quad \le J_1^n + 2J_2^n + J_3^n + \frac{C}{n^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Тепер з леми 3.2 маємо, що

$$J_1^n \le Cn\,\mathsf{E}\left(\sum_{1\le k\le n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right)^2 \le \frac{C}{n}.$$

Оскільки для оцінки величин J_i^n, $i=2,3$ використовуються одні й ті самі аргументи, то будемо розглядати лише J_2^n. Позначимо $X_k = \sqrt{n} q_k^{(n)} (1-T/n)^{n-k}$ і

$$B_n = \sum_{1\le k\le n} \mathsf{E}\, X_k^2 = \frac{n\left(1 - \left(1-\frac{T}{n}\right)^{2n}\right)}{2-\frac{T}{n}}.$$

З (3) випливає, що

$$x_k^{(n)} = x_0^{(n)}\left(1-\frac{T}{n}\right)^k + \mu\left(1 - \left(1-\frac{T}{n}\right)^k\right) + \sigma\sum_{i=1}^{k} q_i^{(n)}\left(1-\frac{T}{n}\right)^{k-i}.$$

Тоді безпосередньо при $k = n$ отримуємо, що

$$J_2^n = \left| \mathsf{P}\left(B_n^{-1/2} \sum_{1\le k\le n} X_k \le D_n(y) \right) - \Phi(D(y)) \right|,$$

де

$$D_n(y) = \frac{\sqrt{2 - \frac{T}{n}}\Big(y - (\mu - x_0)\Big(1 - \Big(1 - \frac{T}{n}\Big)^n\Big) + \frac{\sigma^2 T}{2}\Big)}{\sigma \sqrt{1 - \Big(1 - \frac{T}{n}\Big)^{2n}}}.$$

Аналогічно до леми A.2 з [7] легко бачити, що $|D(y) - D_n(y)| \le (C + |y|)/\sqrt{n}$. Більше того, застосовуючи нерівність Беррі–Ессеєна, одержимо

$$J_2^n \le \left| \mathsf{P}\left(B_n^{-1/2} \sum_{1\le k\le n} X_k \le D_n(y) \right) - \Phi(D_n(y)) \right| + \frac{C + |y|}{\sqrt{n}} \le \frac{C + |y|}{\sqrt{n}}.$$

Тоді для I_1^n має місце оцінка

$$I_1^n \le \int_{-\infty}^{\log K} e^y \left(\frac{C}{n} + \frac{C + |y|}{\sqrt{n}} \right) dy \le \frac{C}{\sqrt{n}}. \tag{12}$$

Щоб обмежити I_2^n зверху, відзначимо, що

$$\sum_{1\le k\le n} \log\left(1 + R_k^{(n)}\right) = \sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2} \sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 + \frac{1}{3}\alpha_n \sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^3.$$

З леми 3.1 отримуємо, що $\sum_{1\le k\le n} \left|R_k^{(n)}\right|^3 \le C^3/\sqrt{n}$ і розклад Тейлора дає оцінку для α_n:

$$|\alpha_n| \le \frac{1}{\left(1 - \max_{1\le k\le n}\left|R_k^{(n)}\right|\right)^3} \le \frac{1}{\left(1 - \frac{C}{\sqrt{n}}\right)^3} \le 8$$

для таких n, що $C/\sqrt{n} \le 1/2$. Крім того, використовуючи (11), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left| \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} \log\left(1 + R_k^{(n)}\right) \le y \right) - \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y \right) \right| \\
&\quad \le \left| \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y \right) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. - \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y \pm \frac{C}{\sqrt{n}} \right) \right| \\
&\quad \le \left| \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y \right) - \Phi(D(y)) \right| \\
&\qquad + \left| \mathsf{P}\left(\sum_{1\le k\le n} R_k^{(n)} - \frac{1}{2}\sum_{1\le k\le n} \left(R_k^{(n)}\right)^2 \le y \pm \frac{C}{\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(D\left(y \pm \frac{C}{\sqrt{n}} \right) \right) \right| \\
&\qquad + \left| \Phi(D(y)) - \Phi\left(D\left(y \pm \frac{C}{\sqrt{n}} \right) \right) \right| \le \frac{C + |y|}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно до (12), можемо вивести, $I_2^n \le C/\sqrt{n}$. Остаточно, з (9), (10), (12) і оцінок написаних вище, отримуємо (8), що доводить теорему. □

Зауваження 4.1. В статті [7] було розглянуто послідовність незалежних випадкових величин $\{q_k^{(n)}, n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$, які були рівномірно розподілені на інтервалі $(-\sqrt{3T/n}, \sqrt{3T/n})$. В силу оцінки

$$\mathsf{E}\left(\sum_{1\leq k\leq n}\left(R_k^{(n)}\right)^2 - \sigma^2 T\right)^2 \leq \frac{C}{n^2} + Cn\left(\mathsf{E}\left(q_1^{(n)}\right)^4 - \frac{T^2}{n^2}\right),$$

яка використовувалася при обмеженні інтеграла $J_1^{(n)}$, аналогічно до доведення теореми 4.1, та рівності $n\big(\mathsf{E}\big(q_1^{(n)}\big)^4 - T^2/n^2\big) = 4T^2/(5n)$, що має гіршу швидкість спадання до нуля ніж доданок C/n^2, оцінка швидкості збіжності цін опціонів не вийшла кращою за $C/n^{1/3}$. Тепер в нашій роботі $q_k^{(n)}$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, що приймають значення $\pm\sqrt{T/n}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$, отже, $\mathsf{E}\big(q_1^{(n)}\big)^4 - T^2/n^2 = 0$. Через це покращення ми отримуємо кращу швидкість збіжності цін опціонів порядку $n^{-1/2}$.

5. Перехід від об'єктивної міри до мартингальної і теорема про швидкість збіжності справедливих цін опціонів

Зауважимо, що швидкість збіжності об'єктивних цін опціонів має місце лише у припущенні, що відносно об'єктивної міри $q_k^{(n)}$ приймають значення $\pm\sqrt{T/n}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Таким чином, якщо ми хочемо одержати швидкість збіжності відносно мартингальної міри такого ж порядку, наша задача полягає у тому, щоб задати ймовірності спільного розподілу $\mathsf{P}_n\big(\bigcap_{k=1}^n\{q_k^{(n)} = \pm\sqrt{T/n}\}\big)$ так, щоб відносно мартингальної міри P_n^* випадкові величини $q_k^{(n)}$ були незалежними в сукупності і приймали значення $\pm\sqrt{T/n}$ з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Зауважимо, що на відміну від результатів статті [9], де доведено, що при переході від об'єктивної міри до мартингальної в дискретній моделі, що апроксимує модель Блека–Шоулса, взаємна незалежність випадкових чинників зберігається, в нашій моделі такої еквівалентності взаємних розподілів нема. Тому спочатку розглянемо модель цінового процесу (3)–(4), але без припущення про взаємну незалежність випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \leq k \leq n\}$. Позначимо умовні ймовірності $\mathsf{P}_{k,n}^{\pm} = \mathsf{P}_n\big(q_k^{(n)} = \pm\sqrt{T/n} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\big)$. Виявляється, що при відмові від незалежності, властивості дограничної моделі істотно залежать від поведінки $\mathsf{P}_{k,n}^{\pm}$, про що свідчить наступний результат. Зауважимо, що $\mathsf{P}_{k,n}^{+} + \mathsf{P}_{k,n}^{-} = 1$.

Введемо позначення

$$h_{k,n}^{\pm} = \frac{\left(\mu - x_{k-1}^{(n)}\right)T}{n} \pm \sigma\sqrt{\frac{T}{n}},$$

а також позначимо

$$\rho_{k,n} = \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{4\sigma\frac{T}{n}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-}}.$$

Теорема 5.1. (i) *Нехай кожна серія при $n > T$ задовольняє умови:*

(*a*) $\mathsf{P}_{k,n}^{\pm} > 0$ *з імовірністю 1 і* $\mathsf{E}\big|\rho_{k,n}\big(q_k^{(n)} - \mathsf{E}\big(q_k^{(n)} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\big)\big)\big| < \infty$, $1 \leq k \leq n$.

(*b*) *Існує стала $C > 0$ незалежна від k і n і така, що*

$$\left|2\,\mathsf{P}_{k,n}^{+} - 1\right| < \frac{C}{n^{1/2}}, \qquad r_k^{(n)} \leq \frac{C}{n}, \qquad \left|x_0^{(n)} - x_0\right| \leq C, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Тоді існує номер серії $n_0 > T$, починаючи з якого ринок (3)–(4) є безарбітражним і повним.

(ii) *Нехай в деякій n-й серії при $n > T$ виконуються умови:* $\mathsf{P}^{\pm}_{k,n} > 0$ *з імовірністю 1 при* $1 \le k \le n$, *причому існує таке* k, *що*

$$\mathsf{E}\left|\rho_{k,n}\left(q_k^{(n)} - \mathsf{E}\left(q_k^{(n)} \mid \mathcal{F}_{k-1}^n\right)\right)\right| = \infty.$$

Тоді еквівалентної мартингальної міри не існує, отже, ринок не є безарбітражним, питання повноти не розглядається.

(iii) *Нехай* $\mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю або* $\mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю.*

(c) *Якщо на множині* $A^{+}_{k,n} := \{\omega \in \Omega\colon\ \mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0\}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, має місце рівність*

$$h^{+}_{k,n} = r_k^{(n)}, \tag{13}$$

або на множині $A^{-}_{k,n} := \{\omega \in \Omega\colon\ \mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0\}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, має місце рівність*

$$h^{-}_{k,n} = r_k^{(n)}, \tag{14}$$

на множині $\Omega \setminus A^{+}_{k,n}$ *виконується умова* $|2\,\mathsf{P}^{+}_{k,n} - 1| < C/n^{1/2}$, *а на множині* $\Omega \setminus A^{-}_{k,n}$ *виконується умова* $|2\,\mathsf{P}^{-}_{k,n} - 1| < C/n^{1/2}$ *і, крім того,* $\mathsf{E}\big|\rho_{k,n}\big(q_k^{(n)} - \mathsf{E}\big(q_k^{(n)}|\mathcal{F}_{k-1}^n\big)\big)\big| < \infty$, $1 \le k \le n$, *то ринок є безарбітражним і неповним.*

(d) *Якщо на множині* $A^{+}_{k,n}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^{+}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, рівність* (13) *не має місця, або на множині* $A^{-}_{k,n}$, *за умови, що* $\mathsf{P}^{-}_{k,n} = 0$ *з додатною імовірністю, рівність* (14) *не має місця, то ринок не є безарбітражним.*

Доведення. Згідно з теорією фінансових ринків з дискретним часом (див., наприклад, [3]), мартингальні міри P^*_n для допграничного ринку треба шукати як ймовірнісні міри з похідною Радона–Никодима вигляду

$$\frac{d\,\mathsf{P}^{n,*}}{d\,\mathsf{P}^n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \Delta M_k^{(n)}\right), \tag{15}$$

де $M^{(n)} = \left\{M_k^{(n)}, 0 \le k \le n\right\}$ — мартингал відносно об'єктивної міри. При цьому випадкові величини $\Delta M_k^{(n)} = M_k^{(n)} - M_{k-1}^{(n)}$ є вимірними відносно σ-алгебри $\mathcal{F}_k^n$, а тому існує борелева функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ така, що

$$\begin{aligned}\Delta M_k^{(n)} &= f\left(q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \ldots, q_k^{(n)}\right)\\ &:= f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, q_k^{(n)}\right) = f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,+} + f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, -\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,-},\end{aligned}$$

де $\mathbb{1}_{k,n,\pm} = \mathbb{1}_{\{q_k^{(n)} = \pm\sqrt{\frac{T}{n}}\}}$. Введемо позначення $g^{\pm}_{k,n} = f\big(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \pm\sqrt{T/n}\big)\,\mathsf{P}^{\pm}_{k,n}$, тоді умова мартингальності процесу $M^{(n)}$ набуде вигляду

$$g^{+}_{k,n} + g^{-}_{k,n} = 0. \tag{16}$$

Тепер запишемо умову того, що відносно міри $\mathsf{P}^{n,*}$ дисконтований ціновий процес має бути мартингалом: для кожного $1 \le k \le n$

$$\mathsf{E}_{\mathsf{P}^{n,*}}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1 + R_i^{(n)}}{1 + r_i^{(n)}} \;\Big|\; \mathcal{F}_{k-1}^n\right) = \prod_{i=1}^{k-1}\frac{1 + R_i^{(n)}}{1 + r_i^{(n)}},$$

яка, з урахуванням стандартної рівності

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}(\xi \mid G) = \frac{\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}\xi \mid G)}{\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}} \mid G)}$$

перетвориться на співвідношення

$$\frac{\mathsf{E}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\Delta M_j^{(n)}\right)\prod_{i=1}^{k}\frac{1+R_i^{(n)}}{1+r_i^{(n)}} \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\right)}{\mathsf{E}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1+\Delta M_j^{(n)}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\right)} = \prod_{i=1}^{k-1}\frac{1+R_i^{(n)}}{1+r_i^{(n)}},$$

і нарешті спроститься до

$$\mathsf{E}\left(\left(1+\Delta M_k^{(n)}\right)\left(1+R_k^{(n)}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\right) = 1 + r_k^{(n)}.$$

Останнє співвідношення є еквівалентним до рівності

$$\mathsf{E}\left(R_k^{(n)}\left(1+\Delta M_k^{(n)}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\right) = r_k^{(n)}. \tag{17}$$

Якщо тепер розкрити дужки і підставити значення всіх величин, що входять в ліву частину (17), зокрема, з урахуванням (3), то ми одержимо таку рівність:

$$h_{k,n}^{+}g_{k,n}^{+} + h_{k,n}^{-}g_{k,n}^{-} + h_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+} + h_{k,n}^{-}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-} = r_k^{(n)}.$$

Таким чином, разом з (16), маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $g_{k,n}^{+}$, $g_{k,n}^{-}$, розв'язок якої існує, єдиний і має вигляд

$$g_{k,n}^{+} = \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, \qquad g_{k,n}^{-} = -g_{k,n}^{+}. \tag{18}$$

Тепер розглянемо три випадки.

(i) Якщо $\mathsf{P}_{k,n}^{+} > 0$ і $\mathsf{P}_{k,n}^{-} > 0$ з імовірністю 1, то ми одержуємо єдину формулу для $\Delta M_k^{(n)}$, причому

$$\begin{aligned}\Delta M_k^{(n)} &= f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, \sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,+} + f\left(\overline{q}_{k-1}^{(n)}, -\sqrt{\frac{T}{n}}\right)\mathbb{1}_{k,n,-} \\ &= \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\left(\frac{\mathbb{1}_{k,n,+}}{\mathsf{P}_{k,n}^{+}} - \frac{\mathbb{1}_{k,n,-}}{\mathsf{P}_{k,n}^{-}}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Згідно з позначенням

$$\rho_{k,n} = \frac{r_k^{(n)} - h_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+} - h_{k,n}^{-}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-}}{4\sigma\frac{T}{n}\,\mathsf{P}_{k,n}^{+}\,\mathsf{P}_{k,n}^{-}},$$

рівність (19) можна переписати у вигляді

$$\Delta M_k^{(n)} = \rho_{k,n}\left(q_k^{(n)} - \mathsf{E}\left(q_k^{(n)} \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\right)\right), \tag{20}$$

причому випадкова величина $\rho_{k,n}$ є $\mathcal{F}_{k-1}^n$-вимірною. Якщо виконується умова (a) теореми, то формула (20) справді задає мартингал. Тепер перевіримо умову $\Delta M_k^{(n)} > -1$. В статті [5] було доведено наступне співвідношення, яке базується лише на значеннях випадкових величин і не враховує їх взаємну залежність:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\left(x_0^{(n)}-\mu\right)+1\right)\left(1-\frac{T}{n}\right)^k-1 &\le \frac{\left(x_{k-1}^{(n)}-\mu\right)}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\\ &\le \left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}}\left(x_0^{(n)}-\mu\right)-1\right)\left(1-\frac{T}{n}\right)^k+1.\end{aligned} \tag{21}$$

З використанням останньої нерівності в умові (b) спростимо нерівності в лівій і правій частинах (21) наступним чином:

$$\frac{\left(x_{k-1}^{(n)}-\mu\right)}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \ge -1+e^{-T}+O\left(n^{-1/2}\right) \tag{22}$$

та

$$\frac{\left(x_{k-1}^{(n)}-\mu\right)}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} \le 1-e^{-T}+O\left(n^{-1/2}\right) \tag{23}$$

Використаємо (22)–(23) для оцінки правої частини (19). На тих ω, на яких $\mathbb{1}_{k,n,+}=1$, і відповідно, $\mathbb{1}_{k,n,-}=0$, зробимо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}\Delta M_k^{(n)} &= \frac{r_k^{(n)}-h_{k,n}^+\,\mathsf{P}_{k,n}^+-h_{k,n}^-\,\mathsf{P}_{k,n}^-}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\,\mathsf{P}_{k,n}^+}\\ &= \frac{\left(x_{k-1}^{(n)}-\mu\right)}{2\sigma\,\mathsf{P}_{k,n}^+}\sqrt{\frac{T}{n}}+\frac{r_k^{(n)}}{2\sigma\,\mathsf{P}_{k,n}^+\sqrt{\frac{T}{n}}}+\frac{1-2\,\mathsf{P}_{k,n}^+}{2\,\mathsf{P}_{k,n}^+}.\end{aligned} \tag{24}$$

Оскільки за умовою (b) $2\,\mathsf{P}_{k,n}^+=1+O(n^{-1/2})$, причому $O(n^{-1/2})$ оцінюється величиною $\frac{C}{n^{1/2}}$, зі сталою незалежною від k і n, то і

$$\frac{1}{2\,\mathsf{P}_{k,n}^+}=1+O\left(n^{-1/2}\right),$$

де остання $O(n^{-1/2})$ також оцінюється величиною $C/n^{1/2}$, незалежною від k і n. Тоді з (22) випливає оцінка

$$\frac{(x_{k-1}^{(n)}-\mu)}{2\sigma\,\mathsf{P}_{k,n}^+}\sqrt{\frac{T}{n}} \ge -1+e^{-T}+O\left(n^{-1/2}\right). \tag{25}$$

Другий і третій доданки в правій частині (24) оцінюються як $O(n^{-1/2})$. На тих ω, на яких $\mathbb{1}_{k,n,-}=1$, і відповідно, $\mathbb{1}_{k,n,+}=0$, перетворення і міркування проводяться аналогічним чином, отже, існує n_0, починаючи з якого ринок є безарбітражним і повним.

(ii) За виконання умови (ii) $M_k^{(n)}$, $1\le k\le n$ не є інтегровним процесом, тобто не утворює мартингалу, але з попереднього доведення зрозуміло, що за виконання умови $2\,\mathsf{P}_{k,n}^{\pm}>0$ з імовірністю 1, інших мартингалів, які б задавали мартингальні міри, нема. Отже, ринок не є безарбітражним, а тоді питання щодо повноти не розглядається.

(iii) (c) Якщо на множині $A_{k,n}^+$, за умови, що $\mathsf{P}_{k,n}^+=0$ з додатною імовірністю, має місце рівність (13), то можна на цій множині покласти значення $f\big(\overline{q}_{k-1}^{(n)},\sqrt{T/n}\big)$ рівним довільній сталій, а значення $f\big(\overline{q}_{k-1}^{(n)},-\sqrt{T/n}\big)$ рівним нулю, і на цій множині рівності (18) матимуть місце. Тому на цій множині можна покласти $\Delta M_k^{(n)}$ рівним довільній сталій. На доповненні до $A_{k,n}^+$ ми повторюємо ті самі кроки, що і в пункті (i), і таким чином одержуємо безарбітражний і неповний ринок. Аналогічний підхід застосовуємо у випадку, коли $\mathsf{P}_{k,n}^- = 0$ з додатною імовірністю.

(d) Якщо на множині $A_{k,n}^+$, за умови, що $\mathsf{P}_{k,n}^+ = 0$ з додатною імовірністю, рівність (13) не має місця, або на множині $A_{k,n}^-$, за умови, що $\mathsf{P}_{k,n}^- = 0$ з додатною імовірністю, рівність (14) не має місця, то на цих множинах не виконується рівність (18), тобто на цих множинах визначити $\Delta M_k^{(n)}$ неможливо, отже, ринок не є безарбітражним.

Теорему доведено. □

Тепер будемо вважати, що виконується умова (i) теореми 5.1, тобто ринок є безарбітражним і повним, і знайдемо достатні умови того, що відносно єдиної мартингальної міри P_n^* випадкові величини $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$ є однаково розподіленими, незалежними і симетричними. Введемо позначення для множини всіх можливих значень наборів випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$: $\Xi = \{\xi = \sqrt{T/n}(\pm 1, \dots, \pm 1)\}$. Позначимо $\omega(\xi)$ ті елементи ймовірнісного простору, на яких набір $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$ приймає значення ξ і позначимо імовірність кожного такого набору відносно об'єктивної міри через $\mathsf{P}_n(\xi)$. Нарешті, позначимо $\overline{q}^{(n)}$ сам набір випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$.

Лема 5.1. *Якщо на кожному $\omega(\xi)$ виконується рівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \Delta M_k^{(n)}(\omega(\xi))\right) \mathsf{P}_n(\xi) = 2^{-n}, \tag{26}$$

то відносно мартингальної міри P_n^* випадкові величини $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$ будуть незалежними, однаково розподіленими і симетричними.

Доведення. Відносно мартингальної міри для кожного набору ξ повинна виконуватись рівність $\mathsf{P}_n^*(\xi) = 2^{-n}$, або $\mathsf{P}_n\big(\prod_{k=1}^n \big(1 + \Delta M_k^{(n)}\big) \mathbb{1}_{\omega(\xi)}\big) = 2^{-n}$, звідки відразу випливає доведення. □

Зауваження 5.1. Очевидно, рівності (26) можуть виконуватись, тобто не є суперечливими. Щоб в цьому переконатись, треба просто поміняти міри місцями, а точніше, задати міру Q_n, відносно якої є набір незалежних симетричних однаково розподілених випадкових величин $\{q_k^{(n)}, 1 \le k \le n\}$, потім задати прирости $\Delta M_k^{(n)}$ мартингала відносно міри Q_n у вигляді $\Delta M_k^{(n)} = \rho_k^{(n)} q_k^{(n)}$ так щоб

$$\mathsf{E}_{\mathsf{Q}_n}\left(\left(1 + R_k^{(n)}\right)\left(1 + \rho_k^{(n)} q_k^{(n)}\right) \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}^n\right) = 1 + r_k^{(n)},$$

а тоді покласти $\mathsf{P}_n^* = \mathsf{Q}_n$, а P_n задати як міру, що визначається похідною Радона–Нікодима

$$\frac{d\mathsf{Q}_n}{d\,\mathsf{P}_n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \Delta M_k^{(n)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \rho_k^{(n)} q_k^{(n)}\right).$$

Наступний результат є прямим наслідком теорем 4.1, 5.1 та леми 5.1.

Теорема 5.2. *Нехай виконуються наступні умови:*

(i) *Існує така стала $C > 0$, що $\left|x_0^{(n)} - x_0\right| \le \frac{C}{n^{1/2}}$;*

(ii) *Виконуються умови (a) та (b) пункту (i) теореми 5.1, а також умови леми 5.1.*

Тоді, починаючи з деякого $n_0 > T$ має місце наступна оцінка

$$|\pi^*(\mathbf{D}) - \pi^*(\mathbf{D}_n)| \leq \frac{C_1}{n^{1/2}}$$

для деякого $C_1 > 0$ і $\mathbf{D} = \mathbf{C}, \mathbf{P}$.

Література

1. M. Broadie, O. Glasserman, and S. J. Kou, *Connecting discrete continuous path-dependent options*, Finance Stochast. **3** (1999), no. 1, 55–82.
2. L.-B. Chang and K. Palmer, *Smooth convergence in the binomial model*, Finance Stochast. **11** (2007), no. 1, 91–105.
3. H. Follmer and A. Schied, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*, Second revised and extended edition, Studies in Mathematics, vol. 27, Walter de Gruyter, 2004.
4. S. Heston and G. Zhou, *On the rate of convergence of discrete-time contingent claims*, Math. Finance **10** (2000), no. 1, 53–75.
5. Yu. Mishura, *Diffusion approximation of recurrent schemes for financial markets, with application to the Ornstein-Uhlenbeck process*, Opuscula Mathematica **35** (2015), no. 1, 99–116.
6. Yu. Mishura, *The rate of convergence of option prices when general martingale discrete-time scheme approximates the Black–Scholes model*, Banach Center Publications. Advances in Mathematics of Finance. **104** (2015), 151–165.
7. Yu. Mishura, *The rate of convergence of option prices on the asset following geometric Ornstein-Uhlenbeck process*, Lithuanian Mathematical Journal **55** (2015), no. 1, 134–149.
8. Yu. Mishura, Ye. Munchak, and P. Slyusarchuk, *The rate of convergence to the normal law in terms of pseudomoments*, Modern Stochastics: Theory and Applications, DOI: 10.15559/15-VMSTA23, 2015.
9. Ю. Мішура, Є. Мунчак *Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **92** (2015).
10. J. B. Walsh, *The rate of convergence of the binomial tree scheme*, Finance Stochast. **7** (2003), no. 3, 337–361.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: yevheniamunchak@gmail.com

Надійшла 11/06/2015