Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 142–155

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 142–155

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СТАЦІОНАРНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ, ЩО СПОСТЕРІГАЮТЬСЯ З ШУМОМ

УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК І М. І. СІДЕЙ

Анотація. Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s\xi=\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}}a(j)\xi(j),\qquad M_l=\sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k),\qquad N_0=K_0=0,$$

від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в точках $j\in\mathbb{Z}\setminus S$, де $\eta(j)$ — некорельована з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, $S=\bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l,\dots,M_l+N_{l+1}\}$. Знайдені формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала за умови, що спектральні щільності послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі. У випадку, коли вигляд спектральних щільностей невідомий, але задані множини допустимих спектральних щільностей, застосовано мінімаксний метод оцінювання. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

Abstract. The problem of optimal linear estimation of the functional

$$A_s\xi=\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}}a(j)\xi(j),\qquad M_l=\sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k),\qquad N_0=K_0=0,$$

which depends on unknown values of stochastic stationary sequence $\xi(j)$ from observations of the sequence $\xi(j)+\eta(j)$ at points of time $j\in\mathbb{Z}\setminus S$, $S=\bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l,\dots,M_l+N_{l+1}\}$ is considered. Formulas for calculating the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed under the condition of spectral certainty, where spectral densities of the sequences $\xi(j)$ and $\eta(j)$ are exactly known. The minimax (robust) method of estimation is applied in the case where spectral densities are not known exactly, but sets of admissible spectral densities are given. Formulas that determine the least favorable spectral densities and minimax spectral characteristics are proposed for some special sets of admissible densities.

Аннотация. Исследуется задача оптимального линейного оценивания функционала

$$A_s\xi=\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}}a(j)\xi(j),\qquad M_l=\sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k),\qquad N_0=K_0=0,$$

от неизвестных значений стохастической стационарной последовательности $\xi(j)$ по наблюдениях последовательности $\xi(j)+\eta(j)$ в моменты времени $j\in\mathbb{Z}\setminus S$, $S=\bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l,\dots,M_l+N_{l+1}\}$. Найдены формулы для вычисления среднеквадратической ошибки и спектральной характеристики оптимальной оценки функционала в том случае когда спектральные плотности последовательностей $\xi(j)$ и $\eta(j)$ точно известны. В случае, когда спектральные плотности неизвестны, а заданы лишь допустимые множества спектральных плотностей, используется минимаксный метод оценивания. Для заданных множеств допустимых спектральных плотностей определены наименее благоприятные спектральные плотности и минимаксные спектральные характеристики оптимальной линейной оценки функционала.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G10, 60G25, 60G35; Secondary 62M20, 93E10, 93E11.

Ключові слова і фрази. Стаціонарна послідовність, робастна оцінка, середньоквадратична похибка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)”, 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

1. Вступ

Задачі оцінювання невідомих значень стохастичних послідовностей за відомими спостереженнями цих послідовностей, або спостереженнями послідовностей та шуму є важливими задачами теорії стохастичних послідовностей та її застосування. Постановка задач інтерполяції, екстраполяції та фільтрації стохастичних стаціонарних послідовностей та їх зведення до задач теорії функцій належить А. М. Колмогорову [15]. Ефективні методи розв'язування таких задач для послідовностей з відомими щільностями були запропоновані Н. Вінером [29], А. М. Ягломом [30, 31]. Теорія стаціонарних стохастичних послідовностей та процесів викладена у книгах Ю. А. Розанова [25], Є. Хеннана [10]. Однак на практиці точний вигляд спектральної щільності невідомий у більшості випадків. В таких випадках можна знайти параметричні або непараметричні оцінки спектральної щільності та застосувати класичну теорію оцінювання. Такий підхід, однак, може привести до значного росту похибки оцінки, що показали К. С. Вастола та Г. В. Пур [28]. Якщо відома множина допустимих спектральних щільностей, то доцільно шукати оцінки, які будуть оптимальними одночасно для всіх щільностей із заданої множини щільностей. Такий підхід називається мінімаксним. Вперше цей метод запропонував У. Гренандер [9] для задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У статті С.А. Кассама та Г.В. Пура [14] зроблено огляд результатів із мінімаксних методів обробки результатів та описано декілька моделей спектральної невизначеності. В працях Ю. Франке [5], Ю. Франке та Х. Пура [6] запропоновано розв'язання задач мінімаксної екстраполяції та інтерполяції стаціонарних послідовностей за допомогою методів опуклої оптимізації. В роботах М. П. Моклячука [18, 19] досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації функціоналів від невідомих значень стаціонарних послідовностей та процесів. М. П. Моклячук та І. І. Дубовецька [8, 4] досліджували задачі оцінювання функціоналів від невідомих значень періодично корельованих процесів. М. П. Моклячук та О. М. Масютка вивчали задачі інтерполяції багатовимірних стаціонарних послідовностей та процесів [20]. Оцінюванням стохастичних послідовностей із стаціонарними приростами займались М. П. Моклячук та М. М. Луз [17]. Задачі прогнозування стаціонарних процесів з пропущеними спостереженнями розглядали П. Бондон [1, 2], М. Пурахмаді, А. Іноє та Ю. Касахара [23]. У статті М. П. Моклячука та М. Сідей [21] викладені результати дослідження задачі інтерполяції стаціонарних послідовностей з пропущеними спостереженнями.

У даній роботі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_s\xi = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)\xi(j)$, $M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в точках $j \in \mathbb{Z}\backslash S$, де $\eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, - некорельована з $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, стаціонарна послідовність, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l, M_l+1, \ldots, M_l+N_{l+1}\}$. Задача оптимальної лінійної інтерполяції для стаціонарних послідовностей досліджується у випадку спектральної визначеності, тобто коли спектральні щільності послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі. У тому випадку, коли повна інформація про вигляд спектральних щільностей невідома, але задані множини допустимих спектральних щільностей, застосовується мінімаксний метод оцінювання. Для заданих множин допустимих спектральних щільностей визначені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики оптимальної лінійної оцінки функціонала.

2. Класичний метод проекцій в гільбертових просторах

Нехай $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, та $\eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, — некорельовані між собою стаціонарні стохастичні послідовності з нульовими математичними сподіваннями $\mathsf{E}\xi(j) = 0$, $\mathsf{E}\eta(j) = 0$. Кореляційні функції $R_\xi(k) = \mathsf{E}\xi(j+k)\overline{\xi(j)}$ та $R_\eta(k) = \mathsf{E}\eta(j+k)\overline{\eta(j)}$ стаціонарних послідовностей $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, та $\eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, допускають спектральний розклад [7]

$$R_\xi(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, F(d\lambda), \qquad R_\eta(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, G(d\lambda),$$

де $F(d\lambda)$ та $G(d\lambda)$ — спектральні міри послідовностей. Ми вивчатимемо стаціонарні послідовності з абсолютно неперервними спектральними мірами $F(d\lambda)$, $G(d\lambda)$ та кореляційними функціями вигляду

$$R_\xi(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)\, d\lambda, \qquad R_\eta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} g(\lambda)\, d\lambda,$$

де $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ — спектральні щільності послідовностей $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z}$ та $\eta(j)$, $j \in \mathbb{Z}$ відповідно. Будемо вважати, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}\, d\lambda < \infty. \tag{1}$$

Ця умова необхідна і достатня для того, щоб безпомилкова інтерполяція невідомих значень послідовностей була неможливою [25].

Послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ допускають спектральний розклад [7], [12]

$$\xi(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\, Z_\xi(d\lambda), \qquad \eta(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda}\, Z_\eta(d\lambda),$$

де $Z_\xi(d\lambda)$ та $Z_\eta(\lambda)$ — ортогональні випадкові міри на $[-\pi,\pi)$, що підпорядковані спектральним мірам $F(d\lambda)$ та $G(d\lambda)$

$$\mathsf{E}\, Z_\xi(\Delta_1)\overline{Z_\xi(\Delta_2)} = F(\Delta_1\cap\Delta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_1\cap\Delta_2} f(\lambda)\, d\lambda,$$
$$\mathsf{E}\, Z_\eta(\Delta_1)\overline{Z_\eta}(\Delta_2) = G(\Delta_1\cap\Delta_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_1\cap\Delta_2} g(\lambda)\, d\lambda.$$

Розглянемо задачу середньоквадратично оптимального лінійного оцінювання функціонала

$$A_s\xi = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)\xi(j), \qquad M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k+K_k), \qquad N_0 = K_0 = 0,$$

від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$, $j \in S$, за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z}\setminus S$, де $S = \bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l, M_l+1,\ldots,M_l+N_{l+1}\}$.

Функціонал $A_s\xi$ можна записати у такому вигляді

$$A_s\xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_s\left(e^{i\lambda}\right) Z_\xi(d\lambda),$$

де

$$A_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)e^{ij\lambda}.$$

Позначимо через $\hat{A}_s\xi$ оптимальну лінійну оцінку функціонала $A_s\xi$ за відомими спостереженнями послідовності $\xi(j)+\eta(j)$. Нехай $\Delta(f,g) = \mathsf{E}\big|A_s\xi - \hat{A}_s\xi\big|^2$ — середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_s\xi$. Для відшукання оцінки $\hat{A}_s\xi$ використаємо метод ортогональних проекцій у гільбертовому просторі А. М. Колмогорова.

Ми розглядатимемо величини $\xi(j)$, $j \in S$, та $\eta(j)$, $j \in S$, як елементи гільбертового простору $H = L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ випадкових величин ξ, що мають нульове математичне сподівання, $\mathsf{E}\xi = 0$, скінченний другий момент $\mathsf{E}\,|\xi|^2 < \infty$, та скалярний добуток $(\xi,\eta) = \mathsf{E}\,\xi\overline{\eta}$. Позначимо через $H^0(\xi+\eta)$ замкнутий лінійний підпростір, породжений величинами $\{\xi(j)+\eta(j)\colon j\in\mathbb{Z}\setminus S\}$ у гільбертовому просторі $H=L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$. Через $L_2(f+g)$ позначимо гільбертовий простір комплекснозначних функцій на $[-\pi,\pi]$, інтегровних в квадраті за мірою, що має щільність $f(\lambda)+g(\lambda)$. Розглянемо підпростір $L_2^s(f+g)$ простору $L_2(f+g)$, що породжений функціями $\{e^{ij\lambda}, j\in\mathbb{Z}\setminus S\}$.

Лінійну оцінку $\hat{A}_s\xi$ функціоналу $A_s\xi$ шукатимемо у вигляді

$$\hat{A}_s\xi=\int_{-\pi}^{\pi}h\left(e^{i\lambda}\right)\,(Z_\xi(d\lambda)+Z_\eta(d\lambda)),$$

де $h(e^{i\lambda})\in L_2^s(f)$ — спектральна характеристика оцінки.

Середньоквадратична похибка $\Delta(h;f)$ оцінки $\hat{A}_s\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\Delta(h;f,g)&=\mathsf{E}\left|A_s\xi-\hat{A}_s\xi\right|^2\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right)-h\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2 f(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h(e^{i\lambda})\right|^2 g(\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

За методом ортогональних проекцій у гільбертовому просторі А. М. Колмогорова оптимальною оцінкою функціонала $A_s\xi$ буде проекція елемента $A_s\xi$ на підпростір $H^0(\xi+\eta)$. Така проекція визначається з наступних умов:

1) $\hat{A}_s\xi\in H^0(\xi+\eta)$,
2) $A_s\xi-\hat{A}_s\xi\perp H^0(\xi+\eta)$.

З умови 2) випливає, що спектральна характеристика $h(\lambda)$ для всіх $j\in\mathbb{Z}\setminus S$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\left(A_s\xi-\hat{A}_s\xi\right)\left(\overline{\xi(j)}+\overline{\eta(j)}\right)\\&\quad=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(A_s\left(e^{i\lambda}\right)-h\left(e^{i\lambda}\right)\right)e^{-ij\lambda}f(\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h\left(e^{i\lambda}\right)e^{-ij\lambda}g(\lambda)\,d\lambda=0.\end{aligned}$$

Тобто

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A_s\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-h\left(e^{i\lambda}\right)(f(\lambda)+g(\lambda))\right]e^{-ij\lambda}\,d\lambda=0,\qquad j\in\mathbb{Z}\setminus S.$$

Звідси випливає, що функція $\left[A_s(e^{i\lambda})f(\lambda)-h(e^{i\lambda})(f(\lambda)+g(\lambda))\right]$ має вигляд

$$A_s\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-h\left(e^{i\lambda}\right)(f(\lambda)+g(\lambda))=C_s\left(e^{i\lambda}\right),$$

$$C_s\left(e^{i\lambda}\right)=\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}}c(k)e^{ik\lambda},$$

де $c(k)$, $k\in S$ — невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти.

З останнього співвідношення отримаємо наступний вигляд спектральної характеристики оцінки $\hat{A}_s\xi$

$$h(e^{i\lambda})=A_s\left(e^{i\lambda}\right)\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}-\frac{C_s\left(e^{i\lambda}\right)}{f(\lambda)+g(\lambda)}.\tag{2}$$

З 1-ї умови, $\hat{A}_s\xi\in H^0(\xi+\eta)$, що визначає оптимальну оцінку функціонала $A_s\xi$, випливає, що

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h\left(e^{i\lambda}\right)e^{-ij\lambda}\,d\lambda=0,\qquad j\in S,$$

тобто

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(A_s\left(e^{i\lambda}\right)\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}-\frac{C_s\left(e^{i\lambda}\right)}{f(\lambda)+g(\lambda)}\right)e^{-ij\lambda}\,d\lambda=0,\qquad j\in S.$$

Скористаємося останньою рівністю, щоб знайти невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k\in S$.

Розкриємо дужки і отримаємо таке співвідношення

$$\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(k-j)\lambda}f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda-\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} c(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i(k-j)\lambda}}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda=0,$$
$$j\in S. \tag{3}$$

Введемо наступні позначення

$$R^s_{j,k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(j-k)\lambda}\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda,$$
$$B^s_{j,k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(j-k)\lambda}\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda,$$
$$Q^s_{j,k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(j-k)\lambda}\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}\,d\lambda.$$

Скориставшись введеними позначеннями, запишемо співвідношення (3) у вигляді системи рівнянь

$$\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} R^s_{j,k}a(k)=\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}} B^s_{j,k}c(k),\qquad j\in S.$$

Вказані рівняння можна подати у наступному вигляді

$$\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s=\mathbf{B}_s\vec{\mathbf{c}}_s,$$

де $\vec{\mathbf{a}}_s$ — вектор, що побудований з коефіцієнтів, які визначають функціонал $A_s\xi$, $\vec{\mathbf{c}}_s$ — вектор, що складається з невідомих коефіцієнтів $c(k)$, $k\in S$. Позначимо $q=N_1+N_2+\cdots+N_s+s$, $\mathbf{B}_N,\mathbf{R}_N$ — матриці розмірності $q\times q$ з елементами $\mathbf{B}_s(j,k)=B^s_{j,k}$, $\mathbf{R}_s(j,k)=R^s_{j,k}$, $j,k\in S$. Таким чином, невідомі коефіцієнти $c(k)$, $k\in S$ обчислюються за формулою

$$c(k)=\left(\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s\right)_k,$$

де $(\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s)_k$ — k-ий елемент вектора $\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s$. Отже, спектральна характеристика $h(e^{i\lambda})$ оцінки $\hat{A}_s\xi$ обчислюється за наступною формулою

$$h\left(e^{i\lambda}\right)=A_s\left(e^{i\lambda}\right)\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)}-\frac{\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}}\left(\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s\right)_k e^{ik\lambda}}{f(\lambda)+g(\lambda)}. \tag{4}$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_s\xi$ обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}\Delta(h;f,g)&=\mathsf{E}\left|A_s\xi-\hat{A}_s\xi\right|^2\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda)+\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}}(\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}\right|^2}{(f(\lambda)+g(\lambda))^2}f(\lambda)\,d\lambda\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda)-\sum_{l=0}^{s-1}\sum_{k=M_l}^{M_l+N_{l+1}}(\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s)_k e^{ik\lambda}\right|^2}{(f(\lambda)+g(\lambda))^2}g(\lambda)\,d\lambda\\&=\langle\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s,\mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s\rangle+\langle\mathbf{Q}_s\vec{\mathbf{a}}_s,\vec{\mathbf{a}}_s\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$

де $\mathbf{Q}_s$ — матриця розмірності $q\times q$ з елементами $\mathbf{Q}_s(j,k)=Q^s_{j,k}$, $j,k\in S$.

Таким чином, можемо стверджувати, що справедлива наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ — некорельовані стаціонарні стохастичні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ і $g(\lambda)$, для яких виконується умова мінімальності* (1). *Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)+\eta(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$ можна обчислити за формулами* (4), (5).

Наслідок 2.1. *Нехай $\xi(j)$ — стаціонарна послідовність, яка має спектральну щільність $f(\lambda)$ таку, що функція $f^{-1}(\lambda)$ інтегровна. Спектральну характеристику $h(e^{i\lambda})$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $S = \bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l, \dots, M_l + N_{l+1}\}$, можна обчислити за формулами*

$$h\left(e^{i\lambda}\right) = A_s\left(e^{i\lambda}\right) - C_s\left(e^{i\lambda}\right) f^{-1}(\lambda), \tag{6}$$

$$\Delta(h;f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|C_s\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2 f^{-1}(\lambda)\,d\lambda = \langle B_s^{-1}\vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s\rangle, \tag{7}$$

де

$$C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \left(B_s^{-1}\vec{\mathbf{a}}_s\right)_j e^{ij\lambda},$$

$q = N_1 + N_2 + \dots + N_s + s$, *$B_s$ — оператор у просторі C^q, який визначається матрицею розмірності $q \times q$*

$$B_s = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{pmatrix},$$

де B_{mn} — матриці розмірності $(N_m+1)\times(N_n+1)$, які утворені коефіцієнтами Фур'є функції $f^{-1}(\lambda)$:

$$B_{mn}(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda}\,d\lambda = r_{k-j},$$
$$k = M_{m-1}, \dots, M_{m-1}+N_m, \qquad j = M_{n-1}, \dots, M_{n-1}+N_n, \qquad m,n = 1,\dots,s.$$

Приклад 2.1. Розглянемо дві некорельовані послідовності

$$\{\xi(j)\colon j \in \mathbb{Z}\}, \qquad \{\eta(j)\colon j \in \mathbb{Z}\}$$

зі спектральними щільностями

$$f(\lambda) = \left|1 - ae^{-i\lambda}\right|^2, \qquad |a| < 1,$$
$$g(\lambda) = \left|1 - be^{-i\lambda}\right|^2, \qquad |b| < 1,$$

відповідно. Знайдемо оптимальну в середньоквадратичному сенсі лінійну оцінку функціонала $A_2\xi = \xi(0) + \xi(3)$ від невідомих значень $\xi(0)$, $\xi(3)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0,3\}$. Спектральна щільність послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ має вигляд

$$f(\lambda) + g(\lambda) = \left|1 - ae^{-i\lambda}\right|^2 + \left|1 - be^{-i\lambda}\right|^2 = \left|x - ye^{-i\lambda}\right|^2,$$
$$x = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{(1+a)^2 + (1+b)^2} \pm \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2}\right),$$
$$y = \frac{a+b}{x}.$$

Оскільки $|a| < 1$, $|b| < 1$, то $|y/x| < 1$. Використаємо розклад функції $\frac{1}{1-t}$ в степеневий ряд, щоб факторизувати функції $(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}$, $f(\lambda)/(f(\lambda)+g(\lambda))$ та $f(\lambda)g(\lambda)/(f(\lambda)+g(\lambda))$

$$\frac{1}{f(\lambda)+g(\lambda)} = \frac{1}{|x-ye^{-i\lambda}|^2} = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{x^{k+1}}e^{-ik\lambda}\right|^2,$$

$$\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} = \frac{\left|1-ae^{-i\lambda}\right|^2}{|x-ye^{-i\lambda}|^2} = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{x^{k+1}}e^{-ik\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{ay^k}{x^{k+1}}e^{-i(k+1)\lambda}\right|^2$$
$$= \left|\frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}}\right)e^{-i(k+1)\lambda}\right|^2,$$

$$\frac{f(\lambda)g(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} = \frac{\left|1-ae^{-i\lambda}\right|^2\cdot\left|1-be^{-i\lambda}\right|^2}{|x-ye^{-i\lambda}|^2} = \frac{\left|1-(a+b)e^{-i\lambda}+abe^{-i2\lambda}\right|^2}{|x-ye^{-i\lambda}|^2}$$
$$= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{x^{k+1}}e^{-ik\lambda} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+b)y^k}{x^{k+1}}e^{-i(k+1)\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{aby^k}{x^{k+1}}e^{-i(k+2)\lambda}\right|^2$$
$$= \left|\frac{1}{x} + \frac{y-ax-bx}{x^2}e^{-i\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}}\right)e^{-i(k+2)\lambda}\right|^2.$$

Спектральну характеристику $h(f,g)$ оцінки $\hat{A}_2\xi$ можна обчислити за формулою (4), вона буде мати наступний вигляд

$$h(\lambda) = (1+e^{i3\lambda})\frac{f(\lambda)}{f(\lambda)+g(\lambda)} - \frac{\left(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2\right)_0 + \left(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2\right)_3\cdot e^{i3\lambda}}{f(\lambda)+g(\lambda)}.$$

Матриці $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{Q}_2$ мають вигляд

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-3} \\ b_3 & b_0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} r_0 & r_{-3} \\ r_3 & r_0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} q_0 & q_{-3} \\ q_3 & q_0 \end{pmatrix},$$

де b_j, r_j, q_j, $j\in\{-3,0,3\}$ коефіцієнти Фур'є функцій $(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}$, $f(\lambda)/(f(\lambda)+g(\lambda))$ та $f(\lambda)g(\lambda)/(f(\lambda)+g(\lambda))$ відповідно. Вектор, який визначає функціонал $A_2\xi$, має вигляд $\mathbf{a}_2 = (a(0),a(3)) = (1,1)$. Тоді невідомі коефіцієнти в формулі (4) обчислюються за наступними формулами

$$\left(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2\right)_0 = \frac{b_0r_0 - b_{-3}r_3 + b_0r_{-3} - b_{-3}r_0}{b_0^2 - b_{-3}b_3},$$
$$\left(\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2\right)_3 = \frac{-b_3r_0 + b_0r_3 - b_3r_{-3} + b_0r_0}{b_0^2 - b_{-3}b_3},$$

де

$$b_0 = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{y^k}{x^{k+1}}\right|^2,$$
$$b_3 = \overline{b_{-3}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{y^k}{x^{k+1}}\right)\overline{\left(\frac{y^{k+3}}{x^{k+4}}\right)},$$

$$r_0 = \frac{1}{|x|^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}} \right|^2,$$

$$r_3 = \overline{r_{-3}} = \frac{1}{x} \overline{\left(\frac{y^3}{x^4} - \frac{ay^2}{x^3} \right)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+1}}{x^{k+2}} - \frac{ay^k}{x^{k+1}} \right) \overline{\left(\frac{y^{k+4}}{x^{k+5}} - \frac{ay^{k+3}}{x^{k+4}} \right)}.$$

Середньоквадратична похибка оцінки $\hat{A}_2\xi$ обчислюється за формулою (5)

$$\begin{aligned}
\Delta(h; f) &= \mathsf{E} \left| A_2\xi - \hat{A}_2\xi \right|^2 = \left\langle \mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2, \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{R}_2\vec{\mathbf{a}}_2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}_2\vec{\mathbf{a}}_2, \vec{\mathbf{a}}_2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{b_0^2 - b_{-3}b_3} \Big(2b_0r_0^2 - b_{-3}r_0r_3 + 2b_0r_0r_{-3} - b_{-3}r_0^2 - b_{-3}r_{-3}r_3 + b_0r_{-3}^2 \\
&\qquad - b_{-3}r_0r_{-3} - b_3r_0r_3 + b_0r_3^2 - b_3r_3r_{-3} + 2b_0r_0r_3 \\
&\qquad - b_3r_0^2 - b_3r_0r_{-3} \Big) \\
&\quad + 2q_0 + q_3 + q_{-3},
\end{aligned}$$

де

$$q_0 = \left| \frac{1}{x} \right|^2 + \left| \frac{y - ax - bx}{x^2} \right|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}} \right|^2,$$

$$\begin{aligned}
q_3 &= \overline{q_{-3}} \\
&= \frac{1}{x} \overline{\left(\frac{y^3}{x^4} - \frac{(a+b)y^2}{x^3} + \frac{aby}{x^2} \right)} + \frac{y - ax - bx}{x^2} \overline{\left(\frac{y^4}{x^5} - \frac{(a+b)y^3}{x^4} + \frac{aby^2}{x^3} \right)} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{k+2}}{x^{k+3}} - \frac{(a+b)y^{k+1}}{x^{k+2}} + \frac{aby^k}{x^{k+1}} \right) \overline{\left(\frac{y^{k+5}}{x^{k+6}} - \frac{(a+b)y^{k+4}}{x^{k+5}} + \frac{aby^{k+3}}{x^{k+4}} \right)}.
\end{aligned}$$

3. Мінімаксна інтерполяція

Метод проекцій у гільбертових просторах, що описаний у попередньому розділі застосовується до задач оцінювання у тому випадку, коли точно відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ відомі. На практиці, однак, повної інформації про спектральні щільності отримати неможливо. Проте у тому випадку, коли відомо, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать до деякого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$, ми можемо застосовують мінімаксний підхід до задач оцінювання. При такому підході шукають оцінку, яка мінімізує величину похибки одразу для всіх спектральних щільностей з даного класу $D = D_f \times D_g$.

Означення 3.1. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0(\lambda) \in D_f$, $g_0(\lambda) \in D_g$ називаються найменш сприятливими в D для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta(h(f,g); f, g).$$

Означення 3.2. Для заданої множини спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0(e^{i\lambda})$ оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо

$$h^0\left(e^{i\lambda}\right) \in H_D = \bigcap_{(f,g) \in D_f \times D_g} L_2^s(f+g),$$

$$\min_{h \in H_D} \max_{(f,g) \in D} \Delta(h; f, g) = \sup_{(f,g) \in D} \Delta\left(h^0; f, g\right).$$

Лема 3.1. *Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ найменш сприятливі в класі $D = D_f \times D_g$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функції*

$$(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}, \qquad f_0(\lambda)(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}, \qquad f_0(\lambda)g_0(\lambda)(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}$$

задають оператори B_s^0, R_s^0, Q_s^0, які визначають розв'язок екстремальної задачі

$$\max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \left\langle \mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s, \mathbf{B}_s^{-1}\mathbf{R}_s\vec{\mathbf{a}}_s \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}_s\vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \right\rangle = \left\langle \mathbf{R}_s^0\vec{\mathbf{a}}_s, (\mathbf{B}_s^0)^{-1}\mathbf{R}_s^0\vec{\mathbf{a}}_s \right\rangle + \left\langle \mathbf{Q}_s^0\vec{\mathbf{a}}_s, \vec{\mathbf{a}}_s \right\rangle. \quad (8)$$

Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ обчислюється за формулою (4) за умови, що $h(f_0, g_0) \in H_D$.

Сформульована лема є наслідком означень найменш сприятливих спектральних щільностей і мінімаксної спектральної характеристики та отриманих у попередньому розділі результатів.

Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f, g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \geq \Delta\left(h^0; f, g\right),$$
$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

виконуються, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) — розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\sup_{(f,g)\in D_f\times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \quad (9)$$

$$\Delta(h(f_0, g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right)g(\lambda) + C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{(f(\lambda)+g(\lambda))^2} f(\lambda)\,d\lambda$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right)f(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda})\right|^2}{(f(\lambda)+g(\lambda))^2} g(\lambda)\,d\lambda,$$

$$C_s^0\left(e^{i\lambda}\right) = \sum_{l=0}^{s-1}\sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} \left((\mathbf{B}_s^0)^{-1}\mathbf{R}_s^0\vec{\mathbf{a}}_s\right)_j e^{ij\lambda},$$

Задача на умовний екстремум (9) еквівалентна задачі на безумовний екструмум [24]:

$$\Delta_D(f, g) = -\Delta(h(f_0, g_0); f, g) + \delta(f, g \mid D_f \times D_g) \to \inf, \quad (10)$$

де $\delta(f, g \mid D_f \times D_g)$ — індикаторна функція множини $D = D_f \times D_g$. Розв'язок задачі (10) визначається умовою $0 \in \partial\Delta_D(f_0, g_0)$, де $\partial\Delta_D(f_0)$ — субдиференціал опуклого функціонала $\Delta_D(f, g)$ в точці (f_0, g_0).

Вигляд (форма) фунціоналу $\Delta(h(f_0, g_0); f, g)$ дозволяє знаходити похідні та диференціали фунціоналу у просторі $L_1 \times L_1$. Тому складність оптимізаційних задач (10) визначається складністю обчислення субдиференціалів індикаторних функцій $\delta(f, g \mid D_f \times D_g)$ множин $D_f \times D_g$.

Лема 3.2. *Нехай (f_0, g_0) — розв'язок екстремальної задачі* (10). *Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D = D_f \times D_g$, а спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ мінімаксною для оптимального оцінювання функціонала $A_s\xi$, якщо $h(f_0, g_0) \in H_D$.*

4. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать множині допустимих спектральних щільностей $D = D_f^0 \times D_g^0$, де

$$D_f^0 = \left\{ f(\lambda) \;\middle|\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\,d\lambda \le P_1 \right\}, \qquad D_g^0 = \left\{ g(\lambda) \;\middle|\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\,d\lambda \le P_2 \right\}.$$

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ і функції, що визначені за формулами

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) g_0(\lambda) + C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^2}, \tag{11}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) f_0(\lambda) - C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2}{(f_0(\lambda)+g_0(\lambda))^2}. \tag{12}$$

обмежені. У цьому випадку

$$\Delta(h(f_0,g_0); f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_f(f_0,g_0) f(\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_g(f_0,g_0) g(\lambda)\,d\lambda$$

буде неперервним лінійним функціоналом у просторі $L_1 \times L_1$ і ми можемо застосувати метод невизначених множників Лагранжа, щоб розв'язати задачу на умовний екстремум (10) [24]. Отримаємо такі співвідношення для визначення найменш сприятливих спектральних щільностей $f^0 \in D_f^0$, $g^0 \in D_g^0$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_f(f_0,g_0)\rho(f(\lambda))\,d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_g(f_0,g_0)\rho(g(\lambda))\,d\lambda \\ + \alpha_1 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(f(\lambda))\,d\lambda + \alpha_2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(g(\lambda))\,d\lambda = 0, \end{aligned}$$

де $\rho(f(\lambda))$ та $\rho(g(\lambda))$ — варіації функцій $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, константи $\alpha_1 \ge 0$ та $\alpha_2 \ge 0$. Звідси знаходимо, що найменш сприятливі щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ задовольняють рівняння

$$\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) g_0(\lambda) + C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right| = \alpha_1(f_0(\lambda)+g_0(\lambda)), \tag{13}$$

$$\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) f_0(\lambda) - C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right| = \alpha_2(f_0(\lambda)+g_0(\lambda)). \tag{14}$$

Зауважимо, що $\alpha_1 \ne 0$, якщо $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0(\lambda)\,d\lambda = P_1$, і $\alpha_2 \ne 0$, якщо $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\lambda)\,d\lambda = P_2$. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_f^0$, $g_0(\lambda) \in D_g^0$ задовольняють умову мінімальності (1) і функції $h_f(f_0,g_0)$, $h_g(f_0,g_0)$, які обчислюються за формулами (11), (12), обмежені. Функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, які є розв'язком системи рівнянь (13), (14) будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D = D_f^0 \times D_g^0$, якщо вони визначають розв'зок екстремальної задачі (8). Функція, що обчислена за формулою (2), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 4.2. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_g^0$. Нехай функції $f(\lambda)$ та $g_0(\lambda)$ такі, що функція $(f(\lambda)+g_0(\lambda))^{-1}$ інтегровна, а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (12), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_g^0 для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо вона має вигляд*

$$g_0(\lambda) = \max\left\{0, \alpha_2^{-1}\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) f_0(\lambda) - C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right| - f(\lambda)\right\}$$

і пара $f(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (8). *Функція, обчислена за формулою* (2), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 4.3. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_f^0$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, а функція $h(f_0)$, що визначена за формулою* (6), *обмежена. Тоді для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, найменш сприятливою щільністю в класі D_f^0 буде спектральна щільність $f_0(\lambda)$, якщо*

$$f_0(\lambda) = \alpha_1 \left| C_s^0 \left(e^{i\lambda}\right) \right|$$

і $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (8). *Функція $h^0 = h(f_0)$, обчислена за формулою* (6), *буде мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

5. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за спостереженнями послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ в моменти часу $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, за умови, що спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать множині допустимих спектральних щільностей $D = D_v^u \times D_\varepsilon$, де

$$D_u^v = \left\{ f(\lambda) \,\middle|\, v(\lambda) \le f(\lambda) \le u(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, d\lambda \le P_1 \right\},$$

$$D_\varepsilon = \left\{ g(\lambda) \,\middle|\, g(\lambda) = (1-\varepsilon) g_1(\lambda) + \varepsilon w(\lambda), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda)\, d\lambda \le P_2 \right\},$$

де спектральні щільності $u(\lambda)$, $v(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ відомі і фіксовані, і, крім того, щільності $u(\lambda)$ та $v(\lambda)$ обмежені.

Нехай щільності $f^0(\lambda) \in D_v^u$, $g^0(\lambda) \in D_\varepsilon$ визначають обмежені функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$ за формулами (11), (12). Тоді з умови $0 \in \partial\Delta_{D_{f,g}}(f_0, g_0)$ визначаємо рівняння яким задовольняють найменш сприятливі щільності

$$\left| A_s \left(e^{i\lambda}\right) g_0(\lambda) + C_s^0 \left(e^{i\lambda}\right) \right| = \left(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)\right) \left(\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \alpha_1^{-1}\right), \qquad (15)$$

$$\left| A_s(e^{i\lambda}) f_0(\lambda) - C_s^0 \left(e^{i\lambda}\right) \right| = \left(f_0(\lambda) + g_0(\lambda)\right) \left(\varphi(\lambda) + \alpha_2^{-1}\right), \qquad (16)$$

де $\gamma_1 \le 0$ і $\gamma_1 = 0$ коли $f_0(\lambda) \ge v(\lambda)$; $\gamma_2 \ge 0$ і $\gamma_2 = 0$ коли $f_0(\lambda) \le u(\lambda)$; $\varphi(\lambda) \le 0$ і $\varphi(\lambda) = 0$ коли $g_0(\lambda) \ge (1-\varepsilon) g_1(\lambda)$.

Отримали наступну теорему.

Теорема 5.1. *Нехай $f_0(\lambda) \in D_v^u$, $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$ і виконується умова мінімальності* (1). *Нехай функції, що визначені формулами* (11), (12), *є обмежені. Тоді функції $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$, визначені з рівнянь* (15), *16 будуть найменш сприятливими щільностями в класі $D_v^u \times D_\varepsilon$, якщо вони визначають розв'зок екстремальної задачі* (8). *Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою* (2), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 5.2. *Нехай відома спектральна щільність $f(\lambda)$, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_\varepsilon$. Нехай функція $f(\lambda)+g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності* (1), *а функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою* (12), *обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі D_ε для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо*

$$g_0(\lambda) = \max\left\{(1-\varepsilon) g_1(\lambda), \alpha_2 \left| A_s \left(e^{i\lambda}\right) f_0(\lambda) - C_s^0 \left(e^{i\lambda}\right) \right| - f(\lambda)\right\}$$

і пара $f(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (8). *Функція, обчислена за формулою* (2), *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 5.3. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_v^u$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, функція $h(f_0)$, визначена за формулою (6), обмежена. Тоді спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою щільністю в класі D_v^u для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, якщо вона має вигляд*

$$f_0(\lambda) = \max\left\{v(\lambda), \min\left\{u(\lambda), \alpha_1 \left|C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right|\right\}\right\}$$

і функція $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (8). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$ обчислюється за формулою (6).

6. Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$

Розглянемо задачу мінімаксного оцінювання функціонала $A_s\xi$ для множини спектральних щільностей $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, що описують моделі "$\varepsilon$-околу"стохастичних послідовностей у просторі $L_2 \times L_1$. Нехай

$$D_{2\varepsilon_1} = \left\{ f(\lambda) \,\middle|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2\, d\lambda \le \varepsilon_1 \right\}$$

це "ε-окіл"у просторі L_2 заданої обмеженої спектральної щільності $f_1(\lambda)$,

$$D_{1\varepsilon_2} = \left\{ g(\lambda) \,\middle|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|\, d\lambda \le \varepsilon_2 \right\}$$

це "ε-окіл" у просторі L_1 заданої обмеженої спектральної щільності $g_1(\lambda)$.

Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda) \in D_{1\varepsilon_2}$ такі, що функції $h_f(f_0, g_0)$, $h_g(f_0, g_0)$, визначені за формулами (11), (12), обмежені. З умови $0 \in \partial\Delta_{D_{f,g}}(f^0, g^0)$, коли $D = D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$, знаходимо рівняння

$$\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) g_0(\lambda) + C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2 (f_0(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1, \tag{17}$$

$$\left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) f_0(\lambda) - C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2 = (f_0(\lambda) + g_0(\lambda))^2 \Psi(\lambda)\alpha_2, \tag{18}$$

де $|\Psi(\lambda)| \le 1$ та $\Psi(\lambda) = sign(g_0(\lambda) - g_1(\lambda))$, коли $g_0(\lambda) \ne g_1(\lambda)$, α_1, α_2 — сталі величини. Рівняння (17), (18) разом з екстремальною умовою (8) та умовою нормування

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2\, d\lambda = \varepsilon_1 \tag{19}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(\lambda) - g_1(\lambda)|\, d\lambda = \varepsilon_2 \tag{20}$$

визначають найменш сприятливі спектральні щільності в класі.

Справедливі наступні теореми.

Теорема 6.1. *Нехай щільності $f_0(\lambda) \in D_{2\varepsilon_1}$, $g_0(\lambda) \in D_{1\varepsilon_2}$ такі, що виконується умова мінімальності (1) і функції, що обчислені за формулами (11), (12), обмежені. Спектральні щільності $f_0(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ будуть найменш сприятливими в класі $D_{2\varepsilon_1} \times D_{1\varepsilon_2}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо вони задовольняють рівняння (17)–(20), і визначають розвя'зок екстремальної задачі (8). Функція $h(f_0, g_0)$, обчислена за формулою (2), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.*

Теорема 6.2. *Нехай спектральна щільність $f(\lambda)$ відома, а спектральна щільність $g_0(\lambda) \in D_{1\varepsilon_2}$. Нехай функція $f(\lambda) + g_0(\lambda)$ задовольняє умову мінімальності (1), а* *функція $h_g(f, g_0)$, що визначена за формулою (12), обмежена. Спектральна щільність $g_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою в класі $D_{1\varepsilon_2}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$, якщо вона має вигляд*

$$g_0(\lambda) = \max\left\{g_1(\lambda), \alpha_2 \left|A_s\left(e^{i\lambda}\right) f_0(\lambda) - C_s^0\left(e^{i\lambda}\right)\right| - f(\lambda)\right\}$$

і пара $f(\lambda)$, $g_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (8). Функція, обчислена за формулою (2), є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$.

Теорема 6.3. *Нехай спектральна щільність $f_0(\lambda) \in D_{2\varepsilon_1}$, функція $f_0^{-1}(\lambda)$ інтегровна, функція $h(f_0)$, що визначена в формулі (6), обмежена. Тоді спектральна щільність $f_0(\lambda)$ буде найменш сприятливою щільністю в класі $D_{2\varepsilon_1}$ для оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j)$, $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, якщо виконується співвідношення*

$$\left|C_s^0(e^{i\lambda})\right|^2 = (f(\lambda))^2 (f(\lambda) - f_1(\lambda))\alpha_1$$

і функція $f_0(\lambda)$ визначає розв'язок екстремальної задачі (8). Мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0)$ оптимальної оцінки функціонала $A_s\xi$ обчислюється за формулою (6).

7. Висновки

В статті запропоновано метод розв'язання задачі оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(j)\xi(j)$, $M_l = \sum_{k=0}^{l}(N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, що залежить від невідомих значень стаціонарної послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$ при $j \in \mathbb{Z} \setminus S$, де $\eta(j)$ — некорельована з $\xi(j)$ стаціонарна послідовність, множина пропусків $S = \bigcup_{l=0}^{s-1}\{M_l, \ldots, M_l + N_{l+1}\}$. У тому випадку, коли відомі спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ стохастичних послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$, застосований метод проекцій у гільбертових просторах та знайдено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оцінки функціонала $A_s\xi$. У випадку, коли спектральні щільності послідовностей $\xi(j)$ та $\eta(j)$ невідомі, але визначені класи допустимих щільностей, використано мінімаксний підхід до задачі оптимальної лінійної інтерполяції функціонала $A_s\xi$. Для заданих класів щільностей знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та формули для обчислення мінімаксної спектральної характеристики оцінки функціонала $A_s\xi$.

Література

1. P. Bondon, *Influence of missing values on the prediction of a stationary time series*, Journal of Time Series Analysis **26** (2005), no. 4, 519–525.
2. P. Bondon, *Prediction with incomplete past of a stationary process*, Stochastic Process and Their Applications **98** (2002), 67–76.
3. R. Cheng, A.G. Miamee, M. Pourahmadi, *Some extremal problems in $L^p(w)$*, Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), no. 8, 2333–2340.
4. I. I. Dubovets'ka, O. Yu. Masyutka, and M. P. Moklyachuk, *Interpolation of periodically correlated stochastic sequences*, Theory Probab. Math. Stat. **84** (2011), 43–56.
5. J. Franke, *Minimax robust prediction of discrete time series*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **68** (1985), 337–364.
6. J. Franke and H. V. Poor, *Minimax-robust filtering and finite-length robust predictors*, Robust and Nonlinear Time Series Analysis, Lecture Notes in Statistics, vol. 26, Springer-Verlag, 1984, pp. 87–126.
7. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *The theory of stochastic processes. I*, Springer, Berlin, 2004.
8. І. І. Голіченко, М. П. Моклячук, *Оцінки функціоналів від періодично корельованих процесів*, НВП "Інтерсервіс", Київ, 2014.

9. U. Grenander, *A prediction problem in game theory*, Ark. Mat. **3** (1957), 371–379.
10. E. J. Hannan, *Multivariate time series*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.
11. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, “Наука”, Москва, 1974.
12. K. Karhunen, *Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, no. 37, 1947.
13. Y. Kasahara, M. Pourahmadi, and A. Inoue, *Duals of random vectors and processes with applications to prediction problems with missing values*, Stat. Probab. Lett. **79** (2009), no. 14, 1637–1646.
14. S. A. Kassam and H. V. Poor, *Robust techniques for signal processing: A survey*, Proceedings of the IEEE **73** (1985), no. 3, 433–481.
15. A. N. Kolmogorov, *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics* (A. N. Shiryayev, ed.), Mathematics and Its Applications. Soviet Series., vol. 26, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
16. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, “Наука”, Москва, 1973.
17. M. M. Luz and M. P. Moklyachuk, *Interpolation of functionals of stochactic sequanses with stationary increments*, Theory Probab. Math. Stat. **87** (2013), 117–133.
18. M. P. Moklyachuk, *Robust procedures in time series analysis*, Theory Stoch. Process. **6** (2000), no. 3–4, 127–147.
19. М. П. Моклячук, *Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів*, Київ, ВПЦ “Київський університет”, 2008.
20. M. Moklyachuk and O. Masyutka, *Minimax-Robust EStimation Technique for Stationary Stochastic Processes*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012.
21. M. Moklyachuk and M. Sidei, *Interpolation problem for stationary sequences with missing observations*, Statistics, Optimization & Information Computing **3(3)** (2015), 259–275.
22. T. Nakazi, *Two problems in prediction theory*, Studia Math. **78** (1984), 7—14.
23. M. Pourahmadi, A. Inoue, and Y. Kasahara, *A prediction problem in $L^2(w)$*, Proc. Am. Math. Soc. **135** (2007), no. 4, 1233–1239.
24. Б. Н. Пшеничный, *Необходимые условия экстремума*, “Наука“, Москва, 1982.
25. Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы*, 2-е изд., доп., “Наука”, Москва, 1990.
26. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1997.
27. H. Salehi, *Algorithms for linear interpolator and interpolation error for minimal stationary stochastic processes*, The Annals of Probability **7** (1979), no. 5, 840–846.
28. K. S. Vastola and H. V. Poor, *An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering*, Automatica **28** (1983), 289–293.
29. N. Wiener, *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. With Engineering Applications*, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966.
30. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1987.
31. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Suplementary notes and references*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1987.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: mmp@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: marysidei4@gmail.com

Надійшла 28/10/2015