Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 163–180

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 163–180

ВИРОДЖЕНА АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОЦІНКИ У МОДЕЛІ ОЦІНЮВАННЯ КОНІЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ. II

УДК 519.21

С. В. ШКЛЯР

Анотація. Стаття є продовженням статті Шкляр (*Теорія ймовірностей та математична статистика*, 2015, вип. 92, стор. 137–150), де у функціональній моделі оцінювання параметрів кривої другого порядку за спостереженнями збурених точок, які лежать на цій кривій, доведено асимптотичну нормальність оцінки ALS2. Тут цей результат поширено на структурну модель. Наведено дві оцінки асимптотичної коваріаційної матриці оцінки ALS2 та доведено їхню консистентність.

Abstract. This paper is a sequel to the paper Shklyar (*Theor. Imovir. ta Matem. Statyst.*, 2015, vol. 92, 137–150). The paper Shklyar (2015) considers the functional version of the conic section fitting problem and states the asymptotic normality of the ALS2 estimator for the coefficients of the conic section. In the present paper, similar theorem on the asymptotic normality is obtained in the structural model. Two estimators of the asymptotic covariance matrix are constructed. Their consistency is proved.

Аннотация. Статья является продолжением статьи Шкляр (*Теор. ймовір. та матем. статист.*, 2015, вып. 92, с. 137–150), в которой в модели оценивания параметров кривой второго порядка по наблюдениям возмущенных точек, лежащих на этой кривой, доказана асимптотическая нормальность оценки ALS2. Здесь этот результат распространен на структурную модель. Построены две оценки асимптотической ковариационной матрицы, доказана состоятельность этих оценок.

1. Вступ

1.1. Статистична модель. "Істинні точки" (ξ_k, η_k) лежать на кривій другого порядку

$$A\xi_k^2 + 2B\xi_k\eta_k + C\eta_k^2 + 2D\xi_k + 2E\eta_k + F = 0. \tag{1}$$

Ці точки спостерігаються з нормально розподіленими похибками вимірювання, тобто спостереженнями є

$$\begin{aligned} x_k &= \xi_k + \delta_k, \\ y_k &= \eta_k + \varepsilon_k, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \delta_k \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma^2 I).$$

Похибки вважаємо незалежними та однаково розподіленими. Ми розглядаємо *функціональну модель*, у якій істинні точки (ξ_k, η_k) невипадкові. Також ми розглянемо *структурну модель*, у якій (ξ_k, η_k) — незалежні та однаково розподілені випадкові точки на площині, незалежні від похибок (у структурній моделі реалізації $(\xi_k, \eta_k, \delta_k, \varepsilon_k)$ — незалежні та однаково розподілені випадкові вектори).

За спостереженнями (x_k, y_k) оцінюємо параметри $\beta = (A, 2B, C, 2D, 2E, F)^\top$ та σ^2.

Коефіцієнти $A, 2B, \dots, F$ визначені з точністю до спільного множника. Тому будемо вимагати, щоб $\|\beta\| = 1$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 65D10; Secondary 62F12.

Ключові слова і фрази. Похибки в змінних, асимптотична нормальність, оцінювання параметрів конічного перерізу, оцінювання асимптотичної дисперсії.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції "Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)", 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

1.2. **Оцінка ALS2.** Означимо матричнозначну функцію $\psi(x, y; \sigma^2)$,

$$\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{6\times 6},$$

так щоб (при $\sigma^2 = 0$)

$$\psi(\xi, \eta; 0) = \left(\xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi, \eta, 1\right)^\top \left(\xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi, \eta, 1\right),$$

а при $\sigma^2 > 0$ функція $\psi(x, y; \sigma^2)$ визначалася з рівняння

$$\mathsf{E}_{(\delta,\varepsilon)^\top \sim N(0,\sigma^2 I)}\, \psi\left(\xi + \delta, \eta + \varepsilon; \sigma^2\right) = \psi(\xi, \eta; 0).$$

Матриця $\psi(x, y; v)$ складається з многочленів, див. явний вигляд $\psi(x, y; \sigma^2)$ у [7].

Позначимо випадкову матрицю

$$\Psi_n(v) = \sum_{k=1}^{n} \psi(x_k, y_k; v), \qquad v \ge 0.$$

Оцінка $\hat\sigma^2$ параметра σ^2 означається як невід'ємний розв'язок рівняння

$$\lambda_{\min}\left(\Psi_n\left(\hat\sigma^2\right)\right) = 0, \tag{2}$$

де $\lambda_{\min}$ позначає найменше власне число симетричної матриці. Розв'язок рівняння (2) існує [3, лема 6] та єдиний [6, теорема 14] завжди, при $n \ge 6$ цей розв'язок майже напевно буде додатним. Матриця $\Psi_n(\hat\sigma^2)$ вироджена. Означимо оцінку $\hat\beta$ параметра β так, щоб

$$\Psi_n(\hat\sigma^2)\hat\beta = 0, \qquad \|\hat\beta\| = 1.$$

Оцінка $\hat\beta$ визначена з точністю до знаку. Виберемо "правильне" значення

$$\hat\beta^* = \begin{cases} \hat\beta, & \text{при } \beta^\top\beta \ge 0, \\ -\hat\beta, & \text{при } \beta^\top\beta < 0. \end{cases}$$

1.3. **Структура статті.** У розділі 2 сформульовано результати для функціональної моделі. Потім у розділі 3 доведено лему про швидкість збіжності оцінки та теореми про консистентність оцінок асимптотичної коваріаційної матриці у функціональній моделі. У розділі 4 розглянуто структурну модель. Розділ 6 містить висновки. У розділі 7 наведено допоміжні формули та допоміжні твердження.

2. Результати для функціональної моделі

2.1. **Консистентність та асимптотична нормальність оцінки.** Консистентність оцінки ALS2 у більш загальній моделі (а саме — консистентність оцінки параметрів поверхні другого порядку в багатовимірному просторі) доведена в статті [6]. Для випадку оцінки кривої на площині ці умови наведені в теоремі 1 статті [7]. Асимптотична нормальність оцінки доведена в [7].

Позначимо частинну похідну функції $\psi(x, y; v)$

$$\psi'_v(x, y; v) = \frac{\partial \psi(x, y; v)}{\partial v},$$
$$\psi'_v\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

Заради зручності викладу, повторимо формулювання теореми про асимптотичну нормальність оцінки.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови, наведені у розділі 1.1 для функціональної моделі, а також*

(1) *При* $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j \le 6$ *має місце збіжність вибіркових моментів до скінченних границь*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \to \mu_{i,j}, \qquad n \to \infty.$$

(2) *Матриця*

$$\overline{\Psi}_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \psi(\xi_k, \eta_k; 0)$$

розміру 6×6 *має ранг* 5.

Тоді оцінка $(\hat\beta^*, \hat\sigma^2)$ *параметра* β *задовольняє співвідношення*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat\beta^* - \beta \\ \hat\sigma^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{d}} N(0, \Sigma),$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty \beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \beta \\ \beta^\top \overline{\Psi}'_\infty & 0 \end{pmatrix}^{-1}, \tag{3}$$

$$\overline{\Psi}'_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \psi'_v(\xi_k, \eta_k; 0),$$

$$\Sigma_6 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\left[\left(\psi(x_k, y_k, \sigma^2) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right) \beta\beta^\top \left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right)\right]. \tag{4}$$

Також у [7] показано, що за умов теореми 1 оцінка $(\hat\beta^{*\top}, \hat\sigma^2)^\top$ є сильно консистентною, а її асимптотична коваріаційна матриця Σ розміру 7×7 має ранг 6.

Доданки $\psi(\xi, \eta; 0)$ та $\psi'_v(\xi, \eta; 0)$ в означенні матриць $\overline{\Psi}_\infty$ та $\overline{\Psi}'_\infty$ є матрицями, складеними з многочленів від ξ та η степеня не більше 4. При фіксованих параметрах β та σ^2 доданок $\mathsf{E}[(\psi(x, y; \sigma^2) - \psi(\xi, \eta; 0))\beta\beta^\top(\psi(x, y; \sigma^2) - \psi(\xi, \eta; 0))]$ в означенні Σ_6 складається з многочленів від ξ та η степеня не більше 6. Тому за умови 1 теореми 1 означення матриць $\overline{\Psi}_\infty$, $\overline{\Psi}'_\infty$ та Σ_6 є коректними: границі існують.

2.2. **Оцінки асимптотичної коваріаційної матриці.** У цьому розділі наведемо дві оцінки асимптотичної коваріаційної матриці Σ та сформулюємо теореми про їхню консистентність у функціональній моделі. Ці оцінки наведені в монографії [1, додаток A.6.1] для коваріаційних матриць M-оцінок параметрів моделі з незалежними та однаково розподіленими спостереженнями. (M-оцінка означається як розв'язок оціночного рівняння, як точка, у якій оціночна функція дорівнює 0.) Таким чином, оцінки асимптотичної коваріаційної матриці зручніше будувати в структурній моделі, але ми цією зручністю не скористаємось. Ми будемо досліджувати одні і ті самі оцінки матриці Σ як у функціональній, так і в структурній моделі.

У [7] у формулюванні теореми 2 наведений явний вираз матриць $\overline{\Psi}_\infty$ та $\overline{\Psi}'_\infty$ через граничні моменти $\mu_{i,j}$, $i + j \le 4$. За допомогою символьних обчислень отримано явний вираз матриці Σ_6 через граничні моменти $\mu_{i,j}$, $i + j \le 6$, та істинні значення параметрів β та σ^2 (матриця Σ_6 складається з многочленів, кожний одночлен яких має вигляд $\mathrm{coef} \cdot \mu_{i,j} \beta^{(k)} \beta^{(l)} \sigma^{2r}$, де $i + j + 2r \le 8$, $i + j \le 6$, та $\beta^{(k)}$ і $\beta^{(l)}$ позначають елементи 6-вимірного вектора β). Використовуючи формулу (3), можна виразити асимптотичну коваріаційну матрицю Σ через $\mu_{i,j}$, $i + j \le 6$, β та σ^2:

$$\Sigma = \Sigma\left(\mu_{i,j}, i{+}j \le 6; \beta, \sigma^2\right). \tag{5}$$

Один зі способів побудувати оцінку асимптотичної коваріаційної матриці — це підставити у формулу для обчислення цієї матриці замість істинних значень параметрів їхні оцінки:

$$\widehat{\Sigma}_{\text{theor}} = \Sigma\big(\hat{\mu}_{i,j}, i{+}j \le 6; \hat{\beta}^*, \sigma^2\big), \tag{6}$$

де $\hat{\mu}_{i,j}$ — оцінки граничних моментів. Ми можемо використати оцінку

$$\hat{\mu}_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H_i\left(x_k; \hat{\sigma}^2\right) H_j\left(y_k; \hat{\sigma}^2\right),$$

де $H_i(x;\sigma^2)$ — многочлен Ерміта, який задовольняє рівняння

$$\mathsf{E}_{\delta\sim N(0,\sigma^2)}\, H_i\left(\xi+\delta;\sigma^2\right) = \xi^i \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Явний вигляд многочлена $H_i(x;\sigma^2)$ наведений у додатку у формулі (41). Многочлен $H_i(x;\sigma^2)$ так виражається через стандартні многочлени Ерміта:

$$H_i(x;\sigma^2) = \sigma^i H_i\left(\frac{x}{\sigma};1\right) = \frac{\sigma^i}{2^{i/2}} H_i^*\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

де $H_i(x;1)$ — "імовірнісний" многочлен Ерміта, а $H_i^*(x)$ — "фізичний" многочлен Ерміта,

$$H_i^*(x) = (-1)^i e^{x^2} \frac{d^i}{dx^i}\left(e^{-x^2}\right).$$

Введемо позначення для матриць, які зустрічаються у формулі (3), так щоб

$$\begin{aligned}
&\Sigma(\mu_{i,j}, i{+}j \le 6; \beta, \sigma^2) \\
&\quad = \left(V_1\left(\mu_{i,j}, i{+}j \le 4; \beta, \sigma^2\right)\right)^{-1} \\
&\qquad \times \begin{pmatrix} \Sigma_6(\mu_{i,j}, i{+}j \le 6; \beta, \sigma^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(V_1\left(\mu_{i,j}, i{+}j \le 4; \beta, \sigma^2\right)\right)^{-\top}.
\end{aligned}$$

Позначимо

$$\hat{V}_1 = V_1\left(\hat{\mu}_{i,j}, i{+}j \le 4; \hat{\beta}^*, \hat{\sigma}^2\right)$$

— це оцінка матриці V_1 у формулі для асимптотичної коваріаційної матриці. Можна перевірити, що

$$\hat{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\Psi_n(\hat{\sigma}^2) & \frac{1}{n}\Psi'_n(\hat{\sigma}^2)\hat{\beta}^* \\ (\hat{\beta}^*)^\top & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де

$$\Psi'_n(\hat{\sigma}^2) = \sum_{k=1}^{n} \psi'_v(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2) = \left.\frac{d\Psi_n(v)}{dv}\right|_{v=\hat{\sigma}^2}.$$

Із цим позначенням оцінка коваріаційної матриці (6) означається так:

$$\widehat{\Sigma}_{\text{theor}} = \hat{V}_1^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_6(\hat{\mu}_{i,j}, i{+}j \le 6; \hat{\beta}^*, \hat{\sigma}^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{V}_1^{-\top}.$$

Теорема 2. *За умов теореми 1 оцінка $\widehat{\Sigma}_{\text{theor}}$ асимптотичної коваріаційної матриці є сильно консистентною, тобто при зростанні обсягу вибірки*

$$\widehat{\Sigma}_{\text{theor}} \to \Sigma \quad \textit{м.н.}$$

Нагадаємо загальну сандвіч-формулу для асимптотичної коваріаційної матриці. Якщо оцінка $\hat{\theta}$ задана як розв'язок системи рівнянь $\sum_{i=1}^n g(Z_n;\hat{\theta}_n)$, то за певних умов (одна з яких — однаковий розподіл спостережень — у функціональній моделі не виконується) оцінка асимптотично нормальна з асимптотичною коваріаційною матрицею $\Sigma = V_1^{-1} B V_1^{-\top}$, де

$$V_1 = \mathsf{E}\, g'(Z_1;\theta), \qquad B = \mathsf{E}\, g(Z_1;\theta) g(Z_1;\theta)^\top.$$

Тут $g'(z,\theta) = \frac{\partial g(z,\theta)}{\partial \theta^\top}$ позначає похідну векторної функції, тобто матрицю Якобі, Z_k позначає одне спостереження (в нашому випадку $Z_k = (x_k, y_k)$), та θ позначає істинне значення параметра (в нашому випадку це 7-вимірний вектор $\theta = (\beta^\top, \sigma^2)^\top$).

У нас

$$g(x,y;\beta,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \psi(x,y;\sigma^2)\beta \\ \frac{1}{2}(\beta\beta^\top - 1) \end{pmatrix},$$

$$g'(x,y;\beta,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \psi(x,y;\sigma^2) & \psi'_v(x,y;\sigma^2)\beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

Оцінка асимптотичної коваріаційної матриці знаходиться з сандвіч-формули, у яку замість математичних сподівань (2.2) підставили вибіркові середні

$$\widehat{\Sigma}_{\mathrm{sample}} = \hat{V}_1^{-1} \hat{B} \hat{V}_1^{-\top}, \tag{8}$$

$$\hat{V}_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g'\big(x_k, y_k; \hat{\beta}^*, \hat{\sigma}^2\big), \tag{9}$$

$$\hat{B} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\big(x_k, y_k; \hat{\beta}^*, \hat{\sigma}^2\big) g\big(x_k, y_k; \hat{\beta}^*, \hat{\sigma}^2\big)^\top. \tag{10}$$

Матриця $\hat{V}_1$ виявляється така сама, як і в формулі (7). Якщо насправді $\|\hat{\beta}^*\| = 1$ та $\Psi_n(\hat{\sigma}^2)\hat{\beta}^* = 0$, то матриця $\hat{B}$ має вигляд

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \widehat{\Sigma}_{6,\mathrm{sample}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$\widehat{\Sigma}_{6,\mathrm{sample}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right) \hat{\beta}^* (\hat{\beta}^*)^\top \psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right).$$

Теорема 3. *За умови теореми 1 оцінка $\widehat{\Sigma}_{\mathrm{sample}}$ асимптотичної коваріаційної матриці Σ консистентна, тобто при зростанні обсягу вибірки має місце збіжність $\widehat{\Sigma}_{\mathrm{sample}} \to \Sigma$ за ймовірністю.*

Теорема 4. *Якщо виконуються умови теореми 1 та*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^{12} + \eta_k^{12}}{k^2} < \infty, \tag{11}$$

то оцінка $\widehat{\Sigma}_{\mathrm{sample}}$ асимптотичної коваріаційної матриці Σ сильно консистентна, тобто при зростанні обсягу вибірки має місце збіжність $\widehat{\Sigma}_{\mathrm{sample}} \to \Sigma$ майже напевно.

3. Доведення

3.1. **Швидкість збіжності оцінки ALS2.**

Лема 5. *За умов теореми 1 майже напевно виконуються співвідношення*

$$\hat{\beta}^* - \beta = O\left(\frac{1}{n}\|\Psi_n(\sigma^2) - \overline{\Psi}_n\|\right),$$

$$\hat{\sigma}^2 - \sigma^2 = O\left(\frac{1}{n}\|\Psi_n(\sigma^2) - \overline{\Psi}_n\|\right)$$

при $n \to \infty$, де $\overline{\Psi}_n = \sum_{k=1}^{n} \psi(\xi_k, \eta_k; 0)$.

Доведення. У доведенні β зустрічається в двох різних значеннях: це аргумент функції $G(\psi;\beta,v)$, $\beta\in\mathbb{R}^6$, або істинне значення параметра β. Сподіваюсь, значення β буде зрозуміле з контексту. Проте σ^2 позначає істинне значення параметра, а відповідний аргумент функції $G(\psi;\beta,v)$ позначено через $v\in\mathbb{R}$.

Застосуємо теорему про неявну функцію для функції $G\colon \mathbb{R}^{6\times 6}\times\mathbb{R}^{6+1}\to\mathbb{R}^7$,

$$G(\psi;\beta,v)=\begin{pmatrix}(\psi+\mathsf{A}(\psi)(v-\sigma^2)+\frac{1}{2}\mathsf{A}^2(\psi)(v-\sigma^2)^2)\beta\\ \frac{1}{2}(\beta^\top\beta-1)\end{pmatrix},$$

де лінійний оператор $\mathsf{A}\colon\mathbb{R}^{6\times 6}\to\mathbb{R}^{6\times 6}$ визначений в [7], σ^2 є істинним значенням параметра. Функція $G(\psi;\beta,v)$ є неперервно диференційованою на $\mathbb{R}^{6\times 6}\times\mathbb{R}^{6+1}$. Для істинних значень параметрів β та σ^2 виконується $G(\overline{\Psi}_\infty;\beta,\sigma^2)=0$. Матриця-похідна

$$\begin{aligned}G'(\psi;\beta,v)&=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial G(\psi;\beta,v)}{\partial\beta^\top} & \dfrac{\partial G(\psi;\beta,v)}{\partial v}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\psi+\mathsf{A}(\psi)(v-\sigma^2)+\frac{1}{2}\mathsf{A}^2(\psi)(v-\sigma^2)^2 & (\mathsf{A}(\psi)+\mathsf{A}^2(\psi)(v-\sigma^2))\beta\\ \beta^\top & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

у точці істинних значень параметрів є невиродженою матрицею

$$G'(\overline{\Psi}_\infty;\beta,\sigma^2)=\begin{pmatrix}\overline{\Psi}_\infty & \mathsf{A}(\overline{\Psi}_\infty)\beta\\ \beta^\top & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty\beta\\ \beta^\top & 0\end{pmatrix}=V_1.$$

За теоремою про неявну функцію [2, розділ 6, §2, п. 208, теорема 4, с. 510] отримаємо, що існує такий окіл $U\times V$ точки $(\overline{\Psi}_\infty;\beta,\sigma^2)$, що

а) Рівняння

$$G(\psi,\theta)=0,\qquad \psi\in U,\ \theta\in V,$$

задає однозначну функцію $\theta=f(\psi)$, $f\colon U\to V$.

б) $f(\overline{\Psi}_\infty)=(\beta,\sigma^2)$.

в) Функція $f(\psi)$ неперервна на U.

г) Функція $f(\psi)$ неперервно диференційовна на U.

Особливістю доведення теореми про неявну функцію в [2] є те, що окіл точки будується у вигляді замкненого прямокутного паралелепіпеда з центром у цій точці: окіл U точки $\overline{\Psi}_\infty$ має вигляд

$$U=\left\{\psi\in\mathbb{R}^{6\times 6}\colon \overline{\Psi}_\infty-\Delta\le\psi\le\overline{\Psi}_\infty+\Delta\right\},$$

де Δ — матриця з додатними елементами, а нерівності розуміються поелементно. Під неперервною диференційовністю розуміється неперервність частинних похідних на U, причому на межі U деякі частинні похідні будуть односторонніми. Частинні похідні функції $f(\psi)$ неперервні на компакті U, тому обмежені, і тому функція $f(\psi)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\exists h\ \forall\psi_1\in U\ \forall\psi_2\in U\colon\quad \|f(\psi_1)-f(\psi_2)\|\le h\|\psi_1-\psi_2\|.$$

У додатку (див. розділ 7.1) показано, що

$$\psi(x,y;v)=\psi\left(x,y;\sigma^2\right)+\mathsf{A}\left(\psi\left(x,y;\sigma^2\right)\right)\left(v-\sigma^2\right)+\frac{1}{2}\mathsf{A}^2\left(\psi\left(x,y;\sigma^2\right)\right)\left(v-\sigma^2\right)^2, \tag{12}$$

$$\frac{1}{n}\Psi_n\left(\hat\sigma^2\right)=\frac{1}{n}\Psi_n\left(\sigma^2\right)+\mathsf{A}\left(\frac{1}{n}\Psi_n\left(\sigma^2\right)\right)\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)+\frac{1}{2}\mathsf{A}^2\left(\frac{1}{n}\Psi_n\right)\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)^2.$$

Тому виконується рівність

$$G\left(\frac{1}{n}\Psi_n;\hat\beta,\hat\sigma^2\right)=0. \tag{13}$$

Зі збіжності (19) випливає збіжність $\frac{1}{n}\Psi_n(\sigma^2) \to \overline{\Psi}_\infty$ майже напевно, тому зрештою $\frac{1}{n}\Psi_n(\sigma^2) \in U$. Оцінки $\hat\beta^*$ та $\hat\sigma^2$ сильно консистентні, отже зрештою $(\hat\beta^*, \hat\sigma^2) \in V$. Тому з (13) маємо

$$\left(\hat\beta^*, \hat\sigma^2\right) = f\left(\frac{1}{n}\Psi_n(\sigma^2)\right). \tag{14}$$

З першої умови теореми 1 випливає $\frac{1}{n}\overline{\Psi}_n \to \overline{\Psi}_\infty$, тому для достатньо великих n виконується $\frac{1}{n}\overline{\Psi}_n \in U$. З урахуванням рівності $\overline{\Psi}_n\beta = 0$ отримаємо, що при істинних значеннях параметрів $G\left(\frac{1}{n}\overline{\Psi}_n; \beta, \sigma^2\right) = 0$. Тому при достатньо великих n

$$\left(\beta, \sigma^2\right) = f\left(\frac{1}{n}\overline{\Psi}_n\right). \tag{15}$$

З урахуванням умови Ліпшиця для функції $f(\psi)$, з (14) та (15) випливає твердження леми. □

З асимптотичної нормальності оцінок $\hat\beta^*$ та $\hat\sigma^2$ випливає стохастична обмеженість $\sqrt{n}(\hat\beta^* - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat\sigma^2 - \sigma^2)$. Доведемо, що для всіх $q < \frac{1}{2}$ майже напевно

$$n^q\left(\hat\beta^* - \beta\right) \to 0, \tag{16}$$

$$n^q\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right) \to 0. \tag{17}$$

Доведення співвідношень (16) *та* (17). Позначимо $p = 1 - q$. За умовою $p > \frac{1}{2}$. Випадкові матриці $\psi(x_i, y_i; \sigma^2)$ незалежні та мають математичні сподівання $\psi(\xi_i, \eta_i; 0)$. Оскільки $\mathsf{E}\,\|\psi(\xi{+}\delta, \eta{+}\varepsilon; \sigma^2) - \psi(\xi, \eta; 0)\|_{\mathrm{F}}^2$, де $(\xi, \eta) \sim N(0, \sigma^2 I)$, є многочленом від ξ та η шостого степеня, то

$$\mathsf{E}\left\|\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right\|_{\mathrm{F}}^2 \le \mathrm{const}\cdot\left(\xi_k^6 + \eta_k^6 + 1\right),$$

де const залежить від параметра σ^2. Тут для довільної матриці Ψ вираз $\|\Psi\|_{\mathrm{F}}^2$ позначає суму квадратів елементів матриці Ψ та є квадратом норми Фробеніуса матриці Ψ. Існує таке C, що при всіх n має місце нерівність $\sum_{k=1}^n \xi_k^2 < Cn$, див. доведення теореми 4. Далі,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^6}{k^{2p}} &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^{2p}} - \frac{1}{(k+1)^{2p}}\right)\sum_{i=1}^k \xi_i^6 + \frac{1}{n^{2p}}\sum_{i=1}^n \xi_i^6 \\ &\le \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^{2p}} - \frac{1}{(k+1)^{2p}}\right)kC + \frac{1}{n^{2p}}nC = \sum_{k=1}^n \frac{C}{k^{2p}}.\end{aligned}$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^\infty k^{-2p}$ збіжний, то $\sum_{k=1}^\infty \xi_k^6 k^{-2p} < \infty$ та аналогічно $\sum_{k=1}^\infty \eta_k^6 k^{-2p} < \infty$. Тому

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathsf{E}\left\|\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right\|_{\mathrm{F}}^2}{k^{2p}} < \infty, \tag{18}$$

і тому за посиленим законом великих чисел Колмогорова майже напевно

$$\frac{\Psi_n(\sigma^2) - \overline{\Psi}_n}{n^p} = \frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^n\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right) \to 0.$$

З урахуванням леми 5 майже напевно

$$n^{1-p}\left(\hat\beta^* - \beta\right) \to 0,$$
$$n^{1-p}\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right) \to 0. \qquad \square$$

3.2. Доведення консистентності оцінки $\widehat{\Sigma}_{\mathbf{theor}}$.

Доведення теореми 2. Зауважимо, що згідно з теоремою 3 з [7] оцінки $\hat{\beta}^*$ та $\hat{\sigma}^2$ є сильно консистентними, тобто мають місце збіжності майже напевно $\hat{\beta}^* \to \beta$ та $\hat{\sigma}^2 \to \sigma^2$ при зростанні обсягу вибірки.

Доведемо збіжність

$$\hat{\mu}_{i,j} \to \mu_{i,j} \quad \text{м.н.} \tag{19}$$

при зростанні обсягу вибірки при всіх i та j, $i+j \le 6$. Вираз $H_i(\xi+\delta;\sigma^2)H_j(\eta+\varepsilon;\sigma^2)-\xi^i\eta^j$ є многочленом з одночленами вигляду $\mathrm{const}\cdot\xi^p\eta^q\delta^{i-p}\varepsilon^{j-q}$, де $p+q \le i+j-1 \le 5$. При невипадкових ξ, η та при $(\delta,\varepsilon) \sim N(0,\sigma^2)$ отримаємо, що дисперсія

$$\mathbf{D}\left[H_i\left(\xi+\delta;\sigma^2\right)H_j\left(\eta+\varepsilon;\sigma^2\right)\right] = \mathsf{E}\left(H_i\left(\xi+\delta;\sigma^2\right)H_j\left(\eta+\varepsilon;\sigma^2\right)-\xi^i\eta^j\right)^2$$

є многочленом з одночленами виду $\mathrm{const}\cdot\xi^p\eta^q\sigma^{2r}$, де $p+q+2r = 2i+2j$, $p+q \le 2i+2j-2 \le 10$. Тому

$$\mathbf{D}\left[H_i\left(\xi+\delta;\sigma^2\right)H_j\left(\eta+\varepsilon;\sigma^2\right)\right] \le \mathrm{const}\cdot\left(\xi^{10}+\eta^{10}+1\right),$$
$$\mathbf{D}\left[H_i\left(x_k;\sigma^2\right)H_j\left(y_k;\sigma^2\right)\right] \le \mathrm{const}\cdot\left(\xi_k^{10}+\eta_k^{10}+1\right),$$

де const залежить від параметра σ^2.

Зі збіжності $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k^6 \to \mu_{6,0}$ випливає обмеженість $\sum_{k=1}^n \xi_k^6 \le Cn$ та $|\xi_k| \le C^{1/6}k^{1/6}$ для якогось $0 < C < \infty$. Використовуючи перетворення Абеля, отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^{10}}{k^2} &\le C^{2/3}\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k^6}{k^{4/3}} \\ &= C^{2/3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i^6\right)\left(\frac{1}{k^{4/3}}-\frac{1}{(k+1)^{4/3}}\right)+C^{2/3}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^6\right)\frac{1}{n^{4/3}} \\ &\le C^{5/3}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k^{4/3}}-\frac{1}{(k+1)^{4/3}}\right)+C^{5/3}n\frac{1}{n^{4/3}} \\ &= C^{5/3}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{4/3}}.\end{aligned}$$

Зі збіжності гармонічного ряду $\sum_{k=1}^\infty k^{-4/3}$ випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^\infty \xi_k^{10}k^{-2}$. Аналогічно доводиться збіжність ряду $\sum_{k=1}^\infty \eta_k^{10}k^{-2}$. Тому

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\mathbf{D}\left[H_i\left(x_k;\sigma^2\right)H_j\left(y_k;\sigma^2\right)\right]}{k^2} < \infty.$$

За посиленим законом великих чисел Колмогорова

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(H_i\left(x_k;\sigma^2\right)H_j\left(y_k;\sigma^2\right)-\xi_k^i\eta_k^j\right) \to 0 \quad \text{м.н.} \tag{20}$$

Зі збіжності (20) та умови 1 теореми 1 випливає збіжність

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n H_i\left(x_k;\sigma^2\right)H_j\left(y_k;\sigma^2\right) \to \mu_{i,j} \quad \text{м.н.} \tag{21}$$

Позначимо коефіцієнти узагальненого многочлена Ерміта $k_{p,q,r}$:

$$H_i\left(x;\sigma^2\right)H_j\left(y;\sigma^2\right) = \sum_{\substack{p=0,\ldots,i\\ q=0,\ldots,j\\ p+q+2r=i+j}} k_{p,q,r}x^py^q\sigma^{2r}, \tag{22}$$

причому $k_{i,j,0} = 1$. Надалі для зручності будемо писати $\sum_{p,q,r}$.

Рівність

$$H_i\left(x;\hat\sigma^2\right)H_j\left(y;\hat\sigma^2\right)=\sum_{p,q,r}k_{p,q,r}H_p\left(x;\sigma^2\right)H_q\left(y;\sigma^2\right)\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)^r \tag{23}$$

доведено у додатку 7.1.

Тепер

$$\begin{aligned}\hat\mu_{i,j}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_i\left(x_k;\hat\sigma^2\right)H_j\left(y_k;\hat\sigma^2\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p,q,r}k_{p,q,r}H_p\left(x_k;\sigma^2\right)H_q\left(y_k;\sigma^2\right)\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)^r\\&=\sum_{p,q,r}k_{p,q,r}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}H_p\left(x_k;\sigma^2\right)H_q\left(y_k;\sigma^2\right)\right)\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)^r.\end{aligned}$$

Перейдемо до границі згідно з (21) та з консистентністю оцінки $\hat\sigma^2$ (збіжність (21) застосовуємо кілька разів, підставляючи замість i та j різні значення p та q). Отримаємо збіжність

$$\hat\mu_{i,j}\to\sum_{p,q,r}k_{p,q,r}\mu_{p,q}\,\mathbb{1}\{r=0\}=\mu_{i,j}\quad\text{м.н.};$$

тут враховано рівність $k_{i,j,0}=1$.

Таким чином, збіжність (19) доведено при всіх $i\ge0$ та $j\ge0$ таких, що $i+j\le6$.

Функція $\Sigma(\mu_{i,j},i{+}j\le6;\beta,\sigma^2)$ неперервна на множині $\{(\mu_{i,j},i{+}j\le6;\beta,\sigma^2)\in\mathbb{R}^7\times\mathbb{R}^6\times\mathbb{R}\mid\det(V_1(\mu_{i,j},i{+}j{\le}4;\beta,\sigma^2))\ne0\}$. Функція $V_1(\mu_{i,j},i{+}j{\le}4;\beta,\sigma^2)$ є неперервною на $\mathbb{R}^6\times\mathbb{R}^6\times\mathbb{R}$. При формулюванні теореми 1 мається на увазі (та доведено в [7]), що в точці істинних значень параметрів матриця $V_1(\mu_{i,j},i{+}j\le4;\beta,\sigma^2)$ невироджена. З цієї невиродженості та з неперервності функції $\det(V_1(\dots))$ випливає, що функція $\Sigma(\dots)$ означена в околі істинних значень параметрів. З неперервності функції $\Sigma(\dots)$ та сильної консистентності $\hat\beta^*$, $\hat\sigma^2$, $\hat\mu_{i,j}$, $i{+}j\le6$, випливає сильна консистентність оцінки $\widehat\Sigma_{\mathrm{theor}}$:

$$\widehat\Sigma_{\mathrm{theor}}=\Sigma\big(\hat\mu_{i,j},i{+}j\le6;\hat\beta^*,\hat\sigma^2\big)\to\Sigma\left(\mu_{i,j},i{+}j\le6;\beta,\sigma^2\right)=\Sigma$$

майже напевно. □

Зауваження 1. З останнього абзацу доведення теореми 2 випливає збіжність

$$\hat V_1=V_1\big(\hat\mu_{i,j},i{+}j\le4;\hat\beta^*,\hat\sigma^2\big)\to V_1\left(\mu_{i,j},i{+}j\le4;\beta,\sigma^2\right)=V_1 \tag{24}$$

майже напевно. Збіжність (24) буде використано при доведенні теорем 3 та 4.

3.3. Доведення консистентності оцінки $\widehat{\boldsymbol\Sigma}_{\mathbf{sample}}$.

Лема 6. *Нехай* $\{(v_{n,k},k=1,\dots,n),n\ge1\}$ *та* $\{(w_{n,k},k=1,\dots,n),n\ge1\}$ *— послідовності серій d-вимірних невипадкових векторів-стовпців. Якщо при* $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{n}v_{n,k}v_{n,k}^\top\to\Sigma,\qquad\sum_{k=1}^{n}\|w_{n,k}\|^2\to0,$$

де Σ — матриця розміру $d\times d$, то

$$\sum_{k=1}^{n}(v_{n,k}+w_{n,k})(v_{n,k}+w_{n,k})^\top\to\Sigma,\qquad n\to\infty.$$

Доведення. Позначимо матриці розміру $n \times d$:

$$V_n = (v_{n,1}, v_{n,2}, \ldots, v_{n,n})^\top, \qquad W_n = (w_{n,1}, w_{n,2}, \ldots, w_{n,n})^\top.$$

У цих позначеннях умови леми переписуються так

$$V_n^\top V_n \to \Sigma, \qquad \|W_n\|_{\mathrm{F}} \to 0.$$

Для довільного вектора $e \in \mathbb{R}^d$

$$e^\top V_n^\top V_n e \to e^\top \Sigma e, \qquad \|V_n e\| \to \sqrt{e^\top \Sigma e}, \qquad \|W_n e\| \to 0.$$

Можна отримати нерівності

$$e^\top (V_n + W_n)^\top (V_n + W_n) e \le e^\top V_n V_n^\top e + 2\|V_n e\| \|W_n e\| + \|W_n e\|^2,$$
$$e^\top (V_n + W_n)^\top (V_n + W_n) e \ge e^\top V_n V_n^\top e - 2\|V_n e\| \|W_n e\| + \|W_n e\|^2,$$

з яких випливає

$$e^\top (V_n + W_n)^\top (V_n + W_n) e \to e^\top \Sigma e, \qquad n \to \infty. \tag{25}$$

З того, що збіжність (25) має місце для всіх $e \in \mathbb{R}^d$, з урахуванням симетричності матриць $(V_n + W_n)^\top (V_n + W_n)$ випливає збіжність

$$(V_n + W_n)^\top (V_n + W_n) \to \Sigma, \qquad n \to \infty,$$

рівносильна твердженню леми. □

Зауваження 2. Лема 6 залишається справедливою для випадкових векторів $v_{n,k}$ та $w_{n,k}$, якщо у формулюванні всі збіжності замінити на збіжності за ймовірністю. Також лема 6 залишається справедливою, якщо всі збіжності замінити на збіжності майже напевно. Ми будемо використовувати лему 6 для невипадкової матриці Σ (хоча це неістотно — узагальнення леми 6 залишаються справедливими також і для випадкової матриці Σ).

Спільна частина доведення теорем 3 та 4. Потрібно довести збіжності

$$\hat{V}_1 \to V_1 \quad \text{та} \quad \widehat{\Sigma}_{6,\mathrm{sample}} \to \Sigma_6.$$

Матриця $\hat{V}_1$, визначена формулою (9), така сама, як і визначена формулою (7). Тому збіжність $\hat{V}_1 \to V_1$ майже напевно вже доведено, див. зауваження 1.

Для доведення збіжності

$$\widehat{\Sigma}_{6,\mathrm{sample}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right) \hat{\beta}^* \left(\hat{\beta}^*\right)^\top \psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right)$$

скористаємось чотири рази лемою 6.

Враховуючи, що $\psi(\xi_k, \eta_k; 0)\beta = 0$, отримаємо розклад

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right) \hat{\beta}^* &= \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right) \hat{\beta}^* - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\beta\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \big(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\big)\, \beta \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\big(\hat{\beta}^* - \beta\big) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right) \left(\hat{\beta}^* - \beta\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\psi\left(x_k, y_k; \hat{\sigma}^2\right) - \psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right)\right) \hat{\beta}^*.
\end{aligned}$$

З урахуванням розкладу многочлена другого степеня в околі точки $v = \sigma^2$

$$\psi(x, y; v) = \psi\left(x, y; \sigma^2\right) + \psi'_v\left(x, y; \sigma^2\right)\left(v - \sigma^2\right) + \frac{1}{2}\Psi''_1\left(v - \sigma^2\right)^2,$$

де Ψ''_1 — стала матриця, формула для якої наведена в [7], маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\psi\left(x_k, y_k; \hat\sigma^2\right)\hat\beta^* &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right)\beta \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}}\psi(\xi_k, \eta_k; 0)\big(\hat\beta^* - \beta\big) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right)\left(\hat\beta^* - \beta\right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n}}\psi'_v\left(x_k, y_k; \sigma^2\right)\hat\beta^*\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{n}}\Psi''_1\hat\beta^*\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right)^2.\end{aligned}$$

Потрібно довести наступні збіжності (для теореми 3 — за ймовірністю, а для теореми 4 — майже напевно):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right) \to \Sigma_6, \tag{26}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\psi(\xi_k, \eta_k; 0)\big(\hat\beta^* - \beta\big)\right\|^2 \to 0, \tag{27}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\big(\psi(x_k, y_k; \sigma^2) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\big)\left(\hat\beta^* - \beta\right)\right\|^2 \to 0, \tag{28}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\psi'_v\left(x_k, y_k; \sigma^2\right)\hat\beta^*\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right)\right\|^2 \to 0, \tag{29}$$

$$\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\Psi''_1\hat\beta^*(\hat\sigma^2 - \sigma^2)^2\right\|^2 = \frac{1}{4}\left\|\Psi''_1\hat\beta^*\right\|^2\left(\hat\sigma^2 - \sigma^2\right)^4 \to 0. \tag{30}$$

Збіжності (27)–(30) будемо доводити майже напевно.

Доведемо збіжність (27). Квадрат норми Фробеніуса $\|\psi(\xi, \eta; 0)\|_{\mathrm{F}}^2$ є многочленом від ξ та η 8-го степеня. Тому існує така стала const, що $\|\psi(\xi_k, \eta_k; 0)\|_{\mathrm{F}}^2 \le \mathrm{const}\cdot(\xi_k^8 + \eta_k^8 + 1)$. Зі збіжностей $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k^6 \to \mu_{6,0}$ та $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \eta_k^6 \to \mu_{0,6}$ випливає обмеженість: існує таке $C < +\infty$, що при всіх n виконуються нерівності $\sum_{k=1}^n \xi_k^6 < nC$, $\sum_{k=1}^n \eta_k^6 < nC$ і, як наслідок, $\xi_n^2 < n^{1/3}C^{1/3}$ та $\eta_n^2 < n^{1/3}C^{1/3}$. Побудуємо ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\|\psi(\xi_k, \eta_k; 0)\|_{\mathrm{F}}^2 &\le \mathrm{const}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^8 + \eta_k^8 + 1\right) \\ &\le \mathrm{const}\cdot C^{1/3}\sum_{k=1}^{n}k^{1/3}\left(\xi_k^6 + \eta_k^6\right) + \mathrm{const}\cdot n \\ &\le \mathrm{const}\cdot C^{1/3}n^{1/3}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^6 + \eta_k^6\right) + \mathrm{const}\cdot n \\ &\le 2\cdot\mathrm{const}\cdot C^{4/3}n^{4/3} + \mathrm{const}\cdot n.\end{aligned}$$

Згідно зі збіжністю (16)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\psi(\xi_k,\eta_k;0)\big(\hat\beta^*-\beta\big)\right\|^2 \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|\psi(\xi_k,\eta_k;0)\|_{\mathrm F}^2\|\hat\beta^2-\beta\|^2$$
$$\le 2\cdot\mathrm{const}\cdot C^{4/3}\left(n^{1/6}\|\hat\beta^*-\beta\|\right)^2+\mathrm{const}\cdot\left\|\hat\beta^*-\beta\right\|^2\to 0$$

майже напевно. Отже, збіжність (27) має місце майже напевно.

Доведемо збіжність (28). Оскільки ряд (18) збіжний при $p=\frac{2}{3}$, то за теоремою 9 майже напевно

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\psi(x_k,y_k;\sigma^2)-\psi(\xi_k,\eta_k;0)\|_{\mathrm F}^2}{n^{4/3}}\to 0. \tag{31}$$

Остаточно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\left(\psi(x_k,y_k;\sigma^2)-\psi(\xi_k,\eta_k;0)\right)\left(\hat\beta^*-\beta\right)\right\|^2$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\psi(x_k,y_k;\sigma^2)-\psi(\xi_k,\eta_k;0)\|_{\mathrm F}^2}{n^{4/3}}\left(n^{1/6}\|\hat\beta^*-\beta\|\right)^2\to 0$$

майже напевно згідно зі збіжностями (16) та (31). Отже, збіжність (28) доведено.

Доведемо збіжність (29). Функціонал $\mathsf E\,\|\psi_v'(\xi{+}\delta,\eta{+}\varepsilon;\sigma^2)\|_{\mathrm F}^2$, де $(\delta,\varepsilon)\sim N(0,\sigma^2 I)$, є многочленом від ξ та η четвертого степеня, тому

$$\mathsf E\,\|\psi_v'(x_k,y_k;\sigma^2)\|_{\mathrm F}^2\le\mathrm{const}\cdot(\xi_k^4+\eta_k^4+1).$$

Для $\|\psi_v'(x_k,y_k;\sigma^2)\|_{\mathrm F}^2$ можна повторити всі міркування, які ми зробили для

$$\left\|\psi\left(x_k,y_k;\sigma^2\right)-\psi(\xi_k,\eta_k;0)\right\|_{\mathrm F}^2,$$

та довести збіжність

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\psi_v'(x_k,y_k;\sigma^2)\|_{\mathrm F}^2}{n^{4/3}}\to 0\qquad\text{м.н.} \tag{32}$$

З урахуванням рівності $\|\hat\beta^*\|=1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\psi_v'\left(x_k,y_k;\sigma^2\right)\hat\beta^*\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)\right\|^2\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\|\psi_v'(x_k,y_k;\sigma^2)\|_{\mathrm F}^2}{n^{4/3}}\left(n^{1/6}(\hat\sigma^2-\sigma^2)\right)^2,$$

що прямує до 0 майже напевно згідно зі збіжностями (17) та (32).

Доведемо збіжність (30). Збіжність

$$\left\|\Psi_1''\hat\beta^*\right\|^2\left(\hat\sigma^2-\sigma^2\right)^4\to 0\quad\text{м.н.}$$

випливає з того, що матриця Ψ_1'' не залежить від n, з нормування $\|\hat\beta^*\|=1$ та із сильної консистентності оцінки параметра σ^2.

Доведемо збіжність (26). Нам потрібно довести, що матриця

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi\left(x_k,y_k;\sigma^2\right)\beta\beta^\top\psi\left(x_k,y_k;\sigma^2\right)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\psi\left(x_k,y_k;\sigma^2\right)-\psi(\xi_k,\eta_k;0)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(x_k,y_k;\sigma^2\right)-\psi(\xi_k,\eta_k;0)\right) \tag{33}$$

та її математичне сподівання збігаються до однакової граничної матриці (яку ми позначили Σ_6, див. формулу (4)). Матриця

$$\left(\psi\left(\xi{+}\delta,\eta{+}\varepsilon;\sigma^2\right)-\psi(\xi,\eta;0)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(\xi{+}\delta,\eta{+}\varepsilon;\sigma^2\right)-\psi(\xi,\eta;0)\right)$$

складається з многочленів із одночленами виду

$$\mathrm{coef} \cdot \xi^i \eta^j \delta^p \varepsilon^q \sigma^{2r} \beta^{(k)} \beta^{(l)} = \mathrm{const}\left(\beta, \sigma^2\right) \cdot \xi^i \eta^j \delta^p \varepsilon^q,$$

де $i+j+p+q+2r \le 8$, $i+j \le 6$, $\beta^{(k)}$ позначає елемент істинного значення векторного параметра β (тут $k, l = 1, 2, \ldots, 6$), $\mathrm{const}(\beta, \sigma^2)$ — невипадкова стала, яка залежить від параметрів моделі. Для доведення того, що матриця (33) та її математичне сподівання збігаються до однакової границі, достатньо показати збіжності

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \delta_k^p \varepsilon_k^q \to \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\, \xi_k^i \eta_k^j \delta_k^p \varepsilon_k^q = \mu_{i,j}\, \mathsf{E}\, \delta_1^p \varepsilon_1^q \tag{34}$$

при всіх $i+j+p+q \le 8$, $i+j \le 6$. Далі доведення розгалужується: для теореми 3 покажемо збіжність (34) за ймовірністю, а для теореми 4 покажемо збіжність (34) майже напевно. □

Закінчення доведення теореми 3. Зі збіжності $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \to \mu_{i,j}$ випливають збіжності

$$\frac{\xi_n^i \eta_n^j}{n} \to 0, \qquad \frac{\max_{k=1,\ldots,n} |\xi_k^i \eta_k^j|}{n} \to 0,$$

а зі збіжностей $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^6 \to \mu_{6,0}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \eta_k^6 \to \mu_{0,6}$ випливає таке:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left|\xi_k^i \eta_k^j\right| < \infty, \qquad i+j \le 6.$$

Тому

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2i} \eta_k^{2j} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i \eta_k^j|}{n} \frac{\max_{k=1,\ldots,n} |\xi_k^i \eta_k^j|}{n} \to 0.$$

Оскільки (ξ_k, η_k) є незалежними та однаково розподіленими випадковими векторами, причому $\mathsf{E}\,\delta_1^{16} < +\infty$, $\mathsf{E}\,\varepsilon_1^{16} < \infty$, то математичне сподівання випадкової величини $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \delta_k^p \varepsilon_k^q$ прямує до $\mu_{i,j}\, \mathsf{E}[\delta_1^i \varepsilon_1^j]$, а дисперсія прямує до 0:

$$\mathbf{D}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \delta_k^p \varepsilon_k^q\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{2i} \eta_k^{2j}\, \mathbf{D}[\delta_1^p \varepsilon_1^q] \to 0.$$

Тому має місце збіжність (34) в середньому квадратичному, а отже і за ймовірністю. □

Закінчення доведення теореми 4. Маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}[\xi_k^i \eta_k^j \delta_k^p \varepsilon_k^q]}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^{2i} \eta_k^{2j}\, \mathbf{D}[\delta_1^p \varepsilon_1^q]}{k^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^{12} + \eta_k^{12} + 1}{k^2}\, \mathbf{D}[\delta_1^p \varepsilon_1^q] < \infty,$$

тому за посиленим законом великих чисел Колмогорова має місце збіжність майже напевно

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^i \eta_k^j \delta_k^p \varepsilon_k^q - \xi_k^i \eta_k^j\, \mathsf{E}[\delta_1^p \varepsilon_1^q]\right) \to 0,$$

звідки, з урахуванням збіжності $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i \eta_k^j \to \mu_{i,j}$, випливає збіжність (34) майже напевно. □

4. Структурна модель

Нагадаємо, що в структурній моделі, на відміну від функціональної, (ξ_k, η_k) вважаються незалежними та однаково розподіленими випадковими точками на істинній кривій другого порядку (1).

Консистентність оцінки ALS2 у структурній моделі у більш загальному випадку доведена в статті [6].

Наведемо умови асимптотичної нормальності оцінки.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови, наведені у розділі 1.1 для структурної моделі, а також наступні умови.*

(1) *Координати істинних точок мають скінченні шості моменти:*

$$\mathsf{E}\,\xi_1^6 < \infty, \qquad \mathsf{E}\,\eta_1^6 < \infty.$$

(2) *Матриця*

$$\overline{\Psi}_\infty = \mathsf{E}\,\psi(\xi_1, \eta_1; 0)$$

розміру 6×6 *має ранг* 5.

Тоді оцінка $(\hat\beta^*, \hat\sigma^2)$ *параметра* β *задовольняє співвідношення*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat\beta^* - \beta \\ \hat\sigma^2 - \sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathsf{d}} N(0, \Sigma), \tag{35}$$

де

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \overline{\Psi}'_\infty \beta \\ \beta^\top & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_\infty & \beta \\ \beta^\top \overline{\Psi}'_\infty & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\overline{\Psi}'_\infty = \mathsf{E}\,\psi'_v(\xi_1, \eta_1; 0),$$

$$\Sigma_6 = \mathsf{E}\left[\left(\psi\left(x_1, y_1; \sigma^2\right) - \psi(\xi_1, \eta_1; 0)\right)\beta\beta^\top \left(\psi\left(x_1, y_1; \sigma^2\right) - \psi(\xi_1, \eta_1; 0)\right)\right].$$

З умов теореми 7 випливають умови твердження 22 статті [6], тому за умов теореми 7 оцінки $\hat\beta^*$ та $\hat\sigma^2$ є сильно консистентними.

Доведення теореми 7. Розглянемо умовний розподіл усіх змінних структурної моделі відносно ξ_k, η_k, $k \in \mathbb{N}$. Для зручності σ-алгебру, породжену випадковими змінними ξ_k, η_k, $k \in \mathbb{N}$, позначимо $\mathcal{Z}_0$.

Покажемо, що умовна модель задовольняє умови теореми 1 майже напевно. Умовні розподіли ξ_k та η_k відносно $\mathcal{Z}_0$ вироджені, і ξ_k та η_k задовольняють (1) майже напевно. Оскільки істинні точки та похибки незалежні в сукупності, по умовний сукупний розподіл похибок відносно $\mathcal{Z}_0$ такий самий, як і маргінальний сукупний розподіл похибок: $[(\delta_k, \varepsilon_k) \mid \mathcal{Z}_0] \sim N(0, \sigma^2 I)$ та для різних спостережень похибки $\mathcal{Z}_0$-умовно незалежні. Отже, умовна модель майже напевно задовольняє умови, наведені в розділі 1.1 для функціональної моделі.

Перевіримо виконання умови 1 теореми 1. Зі скінченності математичних сподівань $\mathsf{E}\,\xi_1^6$ та $\mathsf{E}\,\eta_1^6$ випливає існування та скінченність математичних сподівань $\mathsf{E}\,\xi_1^i \eta_1^j$, $i + j \le 6$. Тому за посиленим законом великих чисел Хінчіна

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k^i \eta_k^j \to \mathsf{E}\,\xi_1^i \eta_1^j$$

майже напевно при $i + j \le 6$.

Перевіримо, що в теоремах 1 та 7 матриці $\overline{\Psi}_\infty$, $\overline{\Psi}'_\infty$ та Σ_6 однакові.

Матриці $\psi(\xi_k, \eta_k; 0)$ та $\psi'_v(\xi_k, \eta_k; 0)$ складаються з одночленів до 4-го степеня та, відповідно, з многочленів до 2-го степеня від ξ_k та η_k, див. кінець розділу 2.1. Матриця

$$\mathsf{E}\left[\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right) \,\middle|\, \mathcal{Z}_0\right]$$

складається з многочленів від ξ_k та η_k до 6-го степеня з коефіцієнтами, що залежать від параметрів моделі. Тому ці матриці мають скінченне математичне сподівання. За посиленим законом великих чисел майже напевно мають місце збіжності

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi(\xi_k, \eta_k; 0) \to \mathsf{E}\,\psi(\xi_1, \eta_1; 0) = \overline{\Psi}_\infty, \tag{36}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi'_v(\xi_k, \eta_k; 0) \to \mathsf{E}\,\psi'_v(\xi_1, \eta_1; 0) = \overline{\Psi}'_\infty, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\left[\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(x_k, y_k; \sigma^2\right) - \psi(\xi_k, \eta_k; 0)\right) \,\middle|\, \mathcal{Z}_0\right] \\ \to \mathsf{E}\left[\left(\psi\left(x_1, y_1; \sigma^2\right) - \psi(\xi_1, \eta_1; 0)\right)\beta\beta^\top\left(\psi\left(x_1, y_1; \sigma^2\right) - \psi(\xi_1, \eta_1; 0)\right)\right] = \Sigma_6.\end{aligned} \tag{38}$$

За означенням, наведеним у формулюванні теореми 1, границі лівих частин (36)–(38) є матрицями $\overline{\Psi}_\infty$, $\overline{\Psi}'_\infty$ та Σ_6. Праві частини збіжностей (36)–(38) — це матриці $\overline{\Psi}_\infty$, $\overline{\Psi}'_\infty$ та Σ_6 згідно з означеннями у теоремі 7. Отже, майже напевно матриця $\overline{\Psi}_\infty$ в теоремі 1 така сама, як і в теоремі 7. Те ж саме можна сказати про $\overline{\Psi}'_\infty$ та Σ_6. Матриці Σ також однакові (майже напевно), бо задаються однаковими формулами.

Умова 2 теореми 1 випливає з умови 2 теореми 7.

За теоремою 1 має місце слабка збіжність умовних розподілів

$$\left[\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\beta}^* - \beta \\ \hat{\sigma}^2 - \sigma^2\end{pmatrix} \,\middle|\, \mathcal{Z}_0\right] \Rightarrow N(0, \Sigma) \quad \text{м.н.},$$

звідки випливає твердження (35) теореми. □

Ми розглянемо оцінки $\widehat{\Sigma}_{\text{theor}}$ та $\widehat{\Sigma}_{\text{sample}}$ асимптотичної коваріаційної матриці Σ, наведені в розділі 2.2.

Теорема 8. *За умов теореми 7 оцінки коваріаційної матриці Σ сильно консистентні:*

$$\widehat{\Sigma}_{\text{theor}} \to \Sigma \quad \textit{м.н.}, \tag{39}$$

$$\widehat{\Sigma}_{\text{sample}} \to \Sigma \quad \textit{м.н.} \tag{40}$$

Доведення. Збіжність (39) випливає з теореми 2, застосованої до умовної моделі.

Для доведення сильної консистентності оцінки $\widehat{\Sigma}_{\text{sample}}$ скористаємось теоремою 4. Оскільки $\mathsf{E}\,\xi_1^6 < \infty$ та $\mathsf{E}\,\eta_1^6 < \infty$, то за лемою 10 майже напевно

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k^{12}}{k^2} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k^{12}}{k^2} < \infty,$$

звідки випливає умова (11). З теореми 4 випливає збіжність (40). □

5. Застосування

5.1. **Оцінювання функції від β.** Розглянемо, наприклад, задачу оцінювання центру кривої другого порядку. Центр так виражається через коефіцієнти рівняння (1):

$$c(\beta) = \frac{1}{AC - B^2}\begin{pmatrix}BE - CD \\ BD - AE\end{pmatrix}.$$

Якщо виконуються умови теореми 1 або 7 та, додатково, $AC \neq B^2$, то оцінка $c(\hat\beta)$ центру кривої є сильно консистентною та асимптотично нормальною,

$$\sqrt{n}(c(\hat\beta) - c(\beta)) \xrightarrow{\mathsf{d}} N(0, \Sigma_c),$$
$$\Sigma_c = c'(\beta)\Sigma_\beta(c'(\beta))^\top,$$

де Σ_β — асимптотична коваріаційна матриця оцінки ALS2 параметра β. Вона є підматрицею розміру 6×6 матриці Σ. Матриця $c'(\beta)$ розміру 2×6 — це похідна векторної функції $c(\beta)$ (тут — у точці істинного значення параметра β). Можна показати, що асимптотична коваріаційна матриця Σ_c є невиродженою.

Зауважимо, що функція $c(\beta)$ є парною, і оскільки $\hat\beta = \pm\hat\beta^*$, то $c(\hat\beta) = c(\hat\beta^*)$.

Якщо ж $AC = B^2$, то істинна крива другого порядку є нецентральною.

5.2. **Побудова асимптотичної довірчої множини.** Для будь-якого вектора $x \in \mathbb{R}^6$, $x \neq 0$, існує матриця M_x розміру 5×6, рядки якої утворюють базис ортогонального доповнення до вектора x, тобто $M_x x = 0$ та $M_x M_x^\top$ є невиродженою матрицею. Матрицю M_x можна вибрати безліччю способів, зокрема так, щоб M_x неперервно залежало від x в околі істинного значення параметра β (позначимо цей вибір через M_x^*).

За умов теореми 1 або 7 маємо

$$M^*_{\hat\beta^*} \to M^*_\beta \quad \text{м.н.}, \qquad \sqrt{n}M^*_\beta(\hat\beta^* - \beta) \xrightarrow{\mathsf{d}} N\left(0, M^*_\beta\Sigma_\beta(M^*_\beta)^\top\right),$$

звідки випливає

$$-\sqrt{n}M^*_{\hat\beta^*}\beta = \sqrt{n}M^*_{\hat\beta^*}(\hat\beta^* - \beta) \xrightarrow{\mathsf{d}} N(0, M^*_{\beta^*}\Sigma_\beta(M^*_{\beta^*})^\top).$$

Тому за асимптотичну довірчу область з рівнем довіри $1 - \alpha$ можна взяти

$$E_n = \left\{\beta \in \mathbb{R}^6 \colon n\left\|\left(M^*_{\hat\beta^*}\widehat\Sigma_\beta\big(M^*_{\hat\beta^*}\big)^\top\right)^{-1/2} M^*_{\hat\beta^*}\beta\right\|^2 \le \chi^2_5(\alpha)\right\},$$

де $\widehat\Sigma_\beta$ — це консистентна оцінка асимптотичної коваріаційної матриці Σ_β (за $\widehat\Sigma_\beta$ можна взяти підматрицю матриці $\widehat\Sigma_{\mathrm{theor}}$ або $\widehat\Sigma_{\mathrm{sample}}$), $\chi^2_5(\alpha)$ — це верхня квантиль χ^2-розподілу з 5 ступенями свободи.

Оскільки $M_{\hat\beta} = VM^*_{\hat\beta^*}$, де V — невироджена матриця заміни базису у підпросторі векторів, ортогональних до $\hat\beta^* = \pm\hat\beta$, то

$$E_n = \left\{\beta \in \mathbb{R}^6 \colon n\beta^\top M_{\hat\beta}^\top\left(M_{\hat\beta}\widehat\Sigma_\beta M_{\hat\beta}^\top\right)^{-1} M_{\hat\beta}\beta \le \chi^2_5(\alpha)\right\}.$$

Асимптотична довірча множина для параметра β є перетином еліптичного циліндра E_n та одиничної сфери $\{\beta \in \mathbb{R}^6 \colon \|\beta\| = 1\}$.

5.3. **Оцінка параметрів двох прямих.** Пара прямих є виродженим випадком кривої другого порядку. Тому оцінку ALS2 можливо застосувати для оцінювання параметрів двох прямих, точки на яких спостерігаються з похибками вимірювання [8]. Оцінка асимптотичної коваріаційної матриці може бути використана для оптимального проектування параметрів кривої другого порядку на множину таких значень параметрів, які задають пару прямих.

6. Висновки

У статті [7] було доведено асимптотичну нормальність (з виродженою асимптотичною коваріаційною матрицею Σ) оцінки ALS2 у функціональній моделі оцінювання параметрів кривої другого порядку за спостереженнями зі збуреннями точок, що лежать на цій кривій. Тут аналогічний результат було доведено для структурної моделі.

Було побудовано дві оцінки асимптотичної коваріаційної матриці Σ. Ці оцінки є консистентними за умов теорем про асимптотичну нормальність. У функціональній моделі оцінка $\widehat{\Sigma}_{\text{sample}}$ є сильно консистентною за додаткової умови (11). Можна побудувати контрприклад та навести таку послідовність істинних точок $\{(\xi_k, \eta_k), k \in \mathbb{N}\}$, що оцінка $\widehat{\Sigma}_{\text{sample}}$ буде консистентною, але майже напевно розбіжною. Оцінка $\widehat{\Sigma}_{\text{theor}}$ у функціональній моделі, а також обидві оцінки $\widehat{\Sigma}_{\text{theor}}$ та $\widehat{\Sigma}_{\text{sample}}$ у структурній моделі є сильно консистентними за умов теорем про асимптотичну нормальність.

У функціональній моделі умови сильної консистентності оцінок $\widehat{\Sigma}_{\text{theor}}$ та $\widehat{\Sigma}_{\text{sample}}$ відрізняються. У подальшій роботі планується провести чисельне порівняння цих оцінок, зокрема порівняти точність побудованих на їхній основі асимптотичних довірчих множин.

7. Додаток

7.1. **Умбральний добуток многочлена Ерміта з послідовністю многочленів Ерміта.** Доведемо рівність (23). Явний вигляд многочлена Ерміта

$$H_i(x;\sigma^2) = \sum_{\substack{0\le k\le i\\ i-k \text{ парне}}} \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)^{(i-k)/2} \frac{i!}{k!\,(\frac{1}{2}(i-k))!} x^k. \tag{41}$$

У [5, розділ 5.1, приклад 1] наведено формулу

$$H_i(x;\hat\sigma^2) = \sum_{\substack{0\le k\le i\\ i-k \text{ парне}}} \left(\frac{\sigma^2-\hat\sigma^2}{2}\right)^{(i-k)/2} \frac{i!}{k!(\frac{1}{2}(i-k))!} H_k(x;\sigma^2). \tag{42}$$

З формул (41) та (42) випливають формули (22) та, відповідно, (23) з

$$k_{p,q,r} = \left(-\frac{1}{2}\right)^r \frac{i!\,j!}{p!\,(\frac{1}{2}(i-p))!\,q!\,(\frac{1}{2}(j-q))!},$$

якщо $0 \le p \le i$, $0 \le q \le j$, числа $i-p$ та $j-q$ парні, $r = (i-p+j-q)/2$; в іншому випаду $k_{p,q,r} = 0$.

Рівність (12) можна отримати з (23) та

$$\psi\left(x,y;\sigma^2\right) = \psi(x,y;0) + \mathsf{A}(\psi(x,y;0))\sigma^2 + \frac{1}{2}\,\mathsf{A}^2(\psi(x,y;0))\sigma^4.$$

Проте більш зрозумілим є таке обґрунтування (12). Матриця $\psi(x,y;v)$ складається з многочленів, у які v входить не більш як у другому степені. Оскільки $\frac{\partial}{\partial v}\psi(x,y;v) = \mathsf{A}(\psi(x,y;v))$ і, як наслідок,

$$\frac{\partial^2\psi(x,y;v)}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}\big(\mathsf{A}(\psi(x,y;v))\big) = \mathsf{A}\left(\frac{\partial\psi(x,y;v)}{\partial v}\right) = \mathsf{A}^2(\psi(x,y;v)),$$

то (12) є розкладом $\psi(x,y;v)$ за формулою Тейлора за змінною v в точці σ^2.

7.2. **Посилений закон великих чисел.** Наступна теорема є частковим випадком теореми 11 розділу 6 монографії [4].

Теорема 9. *Нехай* $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$ *послідовність незалежних випадкових чисел зі скінченними математичними сподіваннями,* $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— невипадкова зростаюча послідовність додатних чисел,* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{E}\,|X_k|}{a_k} < \infty,$$

то

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to 0 \quad \textit{м.н.} \tag{43}$$

Наступна лема використовується при зведенні теореми про сильну консистентність оцінок у структурній моделі до відповідної теореми для функціональної моделі.

Лема 10. *Нехай* $\{X_k, k = 1, 2, \dots\}$ *— послідовність незалежних та однаково розподілених випадкових змінних. Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} X_k^2$ *збіжний майже напевно тоді і тільки тоді, коли* $\mathsf{E}\,|X_1| < \infty$.

Доведення полягає у перевірці умов теореми Колмогорова про три ряди. □

Література

1. R. J. Carroll, D. Ruppert, L. A. Stefanski, and C. M. Crainiceanu, *Measurement Error in Nonlinear Models: A Modern Perspective*, Chapman & Hall, Boca Raton, 2006.
2. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, том 1, “Физматлит”, Москва, 2003.
3. A. Kukush, I. Markovsky, and S. Van Huffel, *Consistent estimation in an implicit quadratic measurement error model*, Comput. Statist. Data Anal. **47** (2004), no. 1, 123–147.
4. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, “Наука”, Москва, 1987.
5. S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, Orlando, 1984.
6. S. Shklyar, A. Kukush, I. Markovsky, and S. Van Huffel, *On the conic section fitting problem*, J. Multivariate Anal. **98** (2007), no. 3, 588–624.
7. С. В. Шкляр, *Вироджена асимптотична нормальність оцінки у моделі оцінювання конічних перерізів. I*, Теор. ймовір. та матем. статист. **92** (2015), 137–150.
8. S. V. Shklyar, *ALS2 estimator in two lines fitting model*, International Conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces”, Institute of Mathematics, Kyiv, 2015, p. 61.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ 01601, Україна

Адреса електронної пошти: shklyar@mail.univ.kiev.ua

Надійшла 7/09/2015