Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 7–21

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 7–21

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В БАГАТОВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

УДК 519.21

І. М. БОДНАРЧУК І Г. М. ШЕВЧЕНКО

Анотація. У роботі досліджено стохастичне рівняння теплопровідності на множині $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, кероване загальною стохастичною мірою $\mu(t)$, $t\in[0,T]$. Доведено існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку.

Abstract. Stochastic heat equation on $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, driven by a general stochastic measure $\mu(t)$, $t\in[0,T]$, is investigated in the work. The existence, uniqueness and Hölder regularity of the mild solution are proved.

Аннотация. В работе исследуется стохастическое уравнение теплопроводности на множестве $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, управляемое общей стохастической мерой $\mu(t)$, $t\in[0,T]$. Доказано существование, единственность и непрерывность по Гельдеру мягкого решения.

1. Вступ

В даній роботі розглядається стохастичне рівняння теплопровідності виду

$$\begin{cases} du(t,\vec{x}) = a^2\Delta_{\vec{x}}u(t,\vec{x})\,dt + f(t,\vec{x},u(t,\vec{x}))\,dt + \sigma(t,\vec{x})\,d\mu(t),\\ u(0,\vec{x}) = u_0(\vec{x}), \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,\vec{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $\Delta_{\vec{x}}$ — оператор Лапласа та μ — стохастична міра, визначена на борелевій σ-алгебрі множин з $[0,T]$ (див. Означення 2.1).

В публікації [1] для $d=1$ доведено існування, єдиність та гельдеровість м'якого розв'язку рівняння (1). Мета нашого дослідження — узагальнити результати цієї роботи для випадку $d\geq 1$.

Аналогічна задача встановлення регулярності м'якого розв'язку розв'язана в [2], де рівняння теплопровідності кероване стохастичною мірою $\mu(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Властивості розв'язків хвильового та кабельного рівнянь із аналогічною мірою розглянуто в [3] та [4] відповідно. Крім того, рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою, що залежить від просторової змінної на фракталах, досліджено в [5]. М'які розв'язки стохастичних рівнянь, керованих різними гауссівськими шумами, розглянуто в роботах [6], [7, Розділ 2] та [8].

Дана стаття побудована наступним чином. В Пункті 2 представлено основний результат роботи (Теорема 2.1). Зокрема, обґрунтовано існування модифікації м'якого розв'язку рівняння (1), яка є неперервною за Гельдером за сукупністю змінних $(t,\vec{x})$. В Пункті 3 розглядаються твердження, що використовуються для доведення основного результату. А саме, для інтеграла за стохастичною мірою з рівняння (2)

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15; Secondary 60G17, 60G57.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, стохастичне рівняння теплопровідності, м'який розв'язок, умова Гельдера, простір Бєсова.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції "Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)", 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

Матеріали статті були представлені на конференції "Stochastic Processes in Abstract Spaces (SPAS 2015)" 14–16 жовтня 2015.

сформульовано та доведено неперервність за Гельдером за просторовою змінною $\vec{x}$ (Лема 3.1) та за часовою змінною t (Лема 3.2).

Для повноти дослідження в останньому пункті порівняно отримані результати з результатами публікації [1].

2. Постановка проблеми та основний результат

Нехай $\mathsf{L}_0 = \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Нехай також X — довільна множина, а $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин з X.

Означення 2.1. Довільне σ-адитивне відображення $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathsf{L}_0$ називається *стохастичною мірою.*

В [9] таке μ називається загальною стохастичною мірою. В цій роботі (Розділ 7) для невипадкової вимірної функції $g\colon \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ визначений та досліджений інтеграл виду $\int_{\mathsf{X}} g\,d\mu$ (також див. [10]). Зокрема, будь-яка вимірна обмежена функція інтегровна за μ. Крім того, для такого інтеграла справедливий аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність [9, Твердження 7.1.1] або [10, Пункт 1.1.1, Наслідок].

У статті [11] визначено інтеграл за стохастичною мірою для випадкової функції та досліджено його властивості.

Розглядаємо рівняння (1) у м'якому сенсі, тобто

$$\begin{aligned} u(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})\,d\vec{y} + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y}) f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))\,d\vec{y} \\ + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})\,d\vec{y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$p(t,\vec{x}) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{d/2}} \exp\left\{-\frac{|\vec{x}|^2}{4a^2 t}\right\}$$

щільність гауссівського розподілу, $u(t,\vec{x}) = u(t,\vec{x},\omega)\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega \to \mathbb{R}$ невідома вимірна випадкова функція. Інтеграли від випадкових функцій по $d\vec{y}$ та ds беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$.

Далі будемо вимагати виконання наступних припущень.

A1. $u_0(\vec{y}) = u_0(\vec{y},\omega)\colon \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_0(\vec{y},\omega)| \le C(\omega)$.

A2. $u_0(\vec{y})$ неперервна за Гельдером

$$|u_0(\vec{y}_1) - u_0(\vec{y}_2)| \le C(\omega)\,|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^{\beta(u_0)}, \qquad \beta(u_0) > 0.$$

A3. $f(s,\vec{y},v)\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена $|f(s,\vec{y},v)| \le C$.

A4. $f(s,\vec{y},v)$ ліпшицева за $\vec{y}\in\mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}$

$$|f(s,\vec{y}_1,v_1) - f(s,\vec{y}_2,v_2)| \le C\left(|\vec{y}_1-\vec{y}_2| + |v_1 - v_2|\right).$$

A5. $\sigma(s,\vec{y})\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена $|\sigma(s,\vec{y})| \le C$.

A6. $\sigma(s,\vec{y})$ неперервна за Гельдером

$$|\sigma(s_1,\vec{y}_1) - \sigma(s_2,\vec{y}_2)| \le C\left(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)} + |\vec{y}_1-\vec{y}_2|^{\beta(\sigma)}\right), \qquad 1/2 < \beta(\sigma) < 1.$$

A7. μ неперервна за Гельдером

$$|\mu((s_1,s_2])| \le C(\omega)\,|s_1-s_2|^{\beta(\mu)}, \qquad s_1,s_2 \in [0,T],\ \beta(\mu) > 0.$$

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

Також відмітимо, що $|\cdot|$ позначає евклідову норму.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються припущення A1–A6. Тоді*

(i) *Рівняння* (2) *має єдиний розв'язок* $u(t,\vec{x})$ *з точністю до м.н. для всіх* $t \in [0,T]$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$.

(ii) *Для будь-якого фіксованого* $t \in [0,T]$, $K > 0$, $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1 \le \beta(u_0)$ *стохастична функція* $u(t,\vec{x})$, $|\vec{x}| \le K$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

(iii) *Якщо також справедливе припущення* A7, *то для будь-яких фіксованих* $\delta > 0$, $K > 0$ *та* γ_1, γ_2 *таких, що* $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1 \le \beta(u_0)$, $\gamma_2 \le \beta(\mu) \wedge \beta(u_0)$ *та* $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$, *стохастична функція* $u(t,\vec{x})$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,\vec{x})$, *для якої виконується*

$$
\begin{gathered}
|\bar{u}(t_1,\vec{x}_1) - \bar{u}(t_2,\vec{x}_2)| \le C(\omega)\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{\gamma_1}\right), \\
t_i \in [\delta, T], \qquad |\vec{x}_i| \le K, \qquad i = 1, 2.
\end{gathered}
$$

Доведення. Обґрунтування справедливості пунктів (i) та (ii) нашої теореми повністю повторює доведення відповідних пунктів Теореми зі статті [2] з використанням Леми 3.1 (замість [2, Лема 5.1]) та ітераційного процесу, для якого $u^{(0)}(t,\vec{x}) = 0$ та $\forall n \ge 0$

$$
\begin{aligned}
u^{(n+1)}(t,\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t,\vec{x}-\vec{y}) u_0(\vec{y})\, d\vec{y} + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y}) f(s,\vec{y},u^{(n)}(s,\vec{y}))\, d\vec{y} \\
+ \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y}) \sigma(s,\vec{y})\, d\vec{y}.
\end{aligned}
$$

Розглянемо тепер (iii). Нехай $\vec{x} \in \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \colon |\vec{x}| \le K\}$, $\delta < t_1 < t_2 < T$ фіксовані. Застосуємо також процес ітерації та метод математичної індукції.

Нехай для $n \ge 0$ існує така константа $C(\omega) > 0$, що

$$
\left| u^{(n)}(t_1,\vec{x}) - u^{(n)}(t_2,\vec{x}) \right| \le C(\omega) |t_1 - t_2|^{\gamma_2}.
$$

Тоді, застосовуючи Лему 3.2 матимемо для відповідної модифікації $u(\cdot,\vec{x})$:

$$
\begin{aligned}
&\left| u^{(n+1)}(t_1,\vec{x}) - u^{(n+1)}(t_2,\vec{x}) \right| \\
&\quad \le \left| \int_{\mathbb{R}^d} p(t_1,\vec{x}-\vec{y}) u_0(\vec{y})\, d\vec{y} - \int_{\mathbb{R}^d} p(t_2,\vec{x}-\vec{y}) u_0(\vec{y})\, d\vec{y} \right| \\
&\qquad + \left| \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}^d} p(t_1-s,\vec{x}-\vec{y}) f\left(s,\vec{y},u^{(n)}(s,\vec{y})\right) d\vec{y} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}^d} p(t_2-s,\vec{x}-\vec{y}) f\left(s,\vec{y},u^{(n)}(s,\vec{y})\right) d\vec{y} \right| \\
&\qquad + \left| \int_{t_1}^{t_2} ds \int_{\mathbb{R}^d} p(t_2-s,\vec{x}-\vec{y}) f\left(s,\vec{y},u^{(n)}(s,\vec{y})\right) d\vec{y} \right| + C(\omega)|t_1 - t_2|^{\tilde{\gamma}_2} \\
&\quad = D_1 + D_2 + D_3 + C(\omega)|t_1 - t_2|^{\tilde{\gamma}_2}.
\end{aligned}
$$

Зробивши заміну змінних $\vec{v} = (\vec{x} - \vec{y})/(2a\sqrt{t_i})$, $i = 1, 2$, з A2 одержимо

$$
\begin{aligned}
D_1 = C \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{v}|^2} \left(u_0(\vec{x} - 2a\vec{v}\sqrt{t_1}) - u_0(\vec{x} - 2a\vec{v}\sqrt{t_2}) \right) d\vec{v} \right| \le C|\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}|^{\beta(u_0)} \\
\le C|t_1 - t_2|^{\beta(u_0)}.
\end{aligned}
$$

З аналогічною підстановкою та використовуючи A4 і припущення індукції маємо оцінку другого доданку:

$$\begin{aligned}
D_2 &= C\Bigg|\int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec v|2} f\left(s, \vec x - 2a\vec v\sqrt{t_1}, u^{(n)}(s, \vec x - 2a\vec v\sqrt{t_1})\right) d\vec v \\
&\qquad - \int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec v|2} f\left(s, \vec x - 2a\vec v\sqrt{t_2}, u^{(n)}(s, \vec x - 2a\vec v\sqrt{t_2})\right) d\vec v\Bigg| \\
&\le C\int_0^{t_1} ds \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec v|^2} \\
&\qquad\qquad \times \left(|\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}||\vec v| + \left|u^{(n)}\left(s, \vec x - 2a\vec v\sqrt{t_1}\right) - u^{(n)}(s, \vec x - 2a\vec v\sqrt{t_2})\right|\right) d\vec v \\
&\le C|t_1 - t_2| + C(\omega)|t_1 - t_2|^{\gamma_2} \le C(\omega)|t_1 - t_2|^{\gamma_2}.
\end{aligned}$$

З припущення A3 одержимо $D_3 \le C|t_1 - t_2|$, а отже,

$$\left|u^{(n+1)}(t_1, \vec x) - u^{(n+1)}(t_2, \vec x)\right| \le C(\omega)|t_1 - t_2|^{\gamma_2}.$$

Таким чином, за припущень пункту (iii), ми отримали модифікацію $\bar u^{(\vec x)}$, неперервну за Гельдером за змінною $\vec x$ при фіксованому t, та модифікацію $\bar u^{(t)}$, що задовільняє умову Гельдера за t при кожному фіксованому $\vec x$. Виключимо всі $\omega \in \Omega$, для яких $\bar u^{(\vec x)}(t, \vec x) \ne \bar u^{(t)}(t, \vec x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t, \vec x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}^d$. Для всіх інших ω покладемо $\bar u = \bar u^{(\vec x)} = \bar u^{(t)}$ для раціональних $(t, \vec x)$ та довизначимо на всю множину $[\delta, T] \times \mathbb{R}^d$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\bar u(t, x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та $\vec x$. □

3. Регулярність інтеграла за стохастичною мірою

У даному пункті ми досліджуємо інтеграл за стохастичною мірою μ з рівності (2)

$$\int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t - s, \vec x - \vec y)\sigma(s, \vec y)\, d\vec y.$$

Спочатку розглянемо деякі додаткові відомості про простори Бєсова, та зробимо певні оцінки, які ми будемо використовувати для дослідження неперервності за Гельдером нашого інтеграла.

3.1. **Додаткові відомості.** Розглянемо простір Бєсова $B_{22}^\alpha([b, c])$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, тобто, простір функцій, для яких скінченною є норма

$$\|g\|_{B_{22}^\alpha([b,c])} = \|g\|_{\mathsf{L}_2([b,c])} + \left(\int_0^{c-b} \left(w_{2,[b,c]}(g, r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}\, dr\right)^{1/2}, \tag{3}$$

де

$$w_{2,[b,c]}(g, r) = \sup_{0 \le h \le r}\left(\int_b^{c-h} |g(s + h) - g(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Для норм просторів Бєсова на множинах $[0, 1]$ та $[b, c]$ справедливе наступне співвідношення. Нехай $g(z, \tau)\colon Z \times [b, c] \to \mathbb{R}$, Z — довільна множина. Тоді

$$g(z, b + (c - b)s)\colon Z \times [0, 1] \to \mathbb{R}$$

та має місце нерівність

$$\begin{gathered}
\underline{C}_{c-b}\|g(z, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([b,c])} \le \|g(z, b + (c - b)\cdot)\|_{B_{22}^\alpha([0,1])} \le \overline{C}_{c-b}\|g(z, \cdot)\|_{B_{22}^\alpha([b,c])}, \\
\underline{C}_{c-b} = (c - b)^{-1/2}((c - b)^\alpha \wedge 1), \quad \overline{C}_{c-b} = (c - b)^{-1/2}((c - b)^\alpha \vee 1).
\end{gathered} \tag{4}$$

Отримується вона наступним чином.

$$\|g(z,b+(c-b)\,\boldsymbol{\cdot})\|^2_{\mathsf{L}_2([0,1])} = \int_0^1 |g(z,b+(c-b)s)|^2\,ds = \left|\begin{matrix} b+(c-b)s=\tau \\ ds=\frac{d\tau}{c-b}\end{matrix}\right|$$
$$= (c-b)^{-1}\int_b^c |g(z,\tau)|^2\,d\tau = (c-b)^{-1}\|g(z,\boldsymbol{\cdot})\|^2_{\mathsf{L}_2([b,c])}.$$

З іншого боку,

$$\int_0^{1-h} |g(z,b+(c-b)(s+h))-g(z,b+(c-b)s)|^2\,ds = |b+(c-b)s=\tau|$$
$$= (c-b)^{-1}\int_b^{c-(c-b)h} |g(z,\tau+(c-b)h)-g(z,\tau)|^2\,d\tau$$
$$= (c-b)^{-1}\int_b^{c-\tilde h} \left|g(z,\tau+\tilde h)-g(z,\tau)\right|^2\,d\tau,$$

де $\tilde h=(c-b)h$ та $0\le \tilde h\le (c-b)r\le (c-b)$. Тоді

$$\int_0^1 w^2_{2,[0,1]}(g(z,b+(c-b)\,\boldsymbol{\cdot}),r)r^{-2\alpha-1}\,dr$$
$$= (c-b)^{-1}\int_0^1\left(\sup_{0\le\tilde h\le(c-b)r}\left(\int_b^{c-\tilde h}\left|g(z,\tau+\tilde h)-g(z,\tau)\right|^2\,d\tau\right)^{1/2}\right)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr$$
$$\overset{(c-b)r=\tilde r}{=} (c-b)^{2\alpha-1}\int_0^{c-b}\left(\sup_{0\le\tilde h\le\tilde r}\left(\int_b^{c-\tilde h}\left|g(z,\tau+\tilde h)-g(z,\tau)\right|^2\,d\tau\right)^{1/2}\right)^2 \tilde r^{-2\alpha-1}\,d\tilde r$$
$$= (c-b)^{2\alpha-1}\int_0^{c-b} w^2_{2,[b,c]}(g(z,\boldsymbol{\cdot}),\tilde r)\tilde r^{-2\alpha-1}\,d\tilde r.$$

Таким чином, ми отримали

$$\|g(z,b+(c-b)\,\boldsymbol{\cdot})\|_{B^\alpha_{22}([0,1])}$$
$$= (c-b)^{-1/2}\|g(z,\boldsymbol{\cdot})\|_{\mathsf{L}_2([b,c])} + (c-b)^{\alpha-1/2}\left(\int_0^{c-b} w^2_{2,[b,c]}(g(z,\boldsymbol{\cdot}),\tilde r)\tilde r^{-2\alpha-1}\,d\tilde r\right)^{1/2},$$

що й доводить справедливість (4).

Зауважимо, що при $c-b=1$

$$\|g(z,b+(c-b)\,\boldsymbol{\cdot})\|_{B^\alpha_{22}([0,1])} = \|g(z,\boldsymbol{\cdot})\|_{B^\alpha_{22}([b,c])}.$$

Покладемо для довільного $t\in[0,T]$

$$\Delta^{(t)}_{kn} = \big((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t\big], \qquad n\ge 0,\ 1\le k\le 2^n.$$

Нехай функція $g(z,s)\colon Z\times[0,T]\to\mathbb{R}$ така, що $\forall z\in Z\colon g(z,\boldsymbol{\cdot})$ неперервна на $[0,T]$. Тут $Z=Z_0\times[0,T]$, Z_0 — довільна множина, а $z=(z_0,t)$. Позначимо

$$g_n(z,s) = g(z,0)\mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{1\le k\le 2^n} g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\mathbb{1}_{\Delta^{(T)}_{kn}}(s).$$

Тоді за [12, Лема 3] випадкова функція

$$\eta(z) = \int_{(0,t]} g(z,s)\,d\mu(s), \qquad z\in Z,$$

має таку модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z) = \int_{(0,t]} g_0(z,s)\,d\mu(s) + \sum_{n\ge 1}\left(\int_{(0,t]} g_n(z,s)\,d\mu(s) - \int_{(0,t]} g_{n-1}(z,s)\,d\mu(s)\right), \qquad (5)$$

що для всіх $\varepsilon > 0$, $\omega \in \Omega$, $z \in Z$

$$\begin{aligned}|\widetilde{\eta}(z)| \le{}& |g(z,0)\mu((0,t])| \\ &+ \left\{\sum_{n\ge1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|g(z,k2^{-n}T\wedge t) - g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\right|^2\right\}^{\frac12} \\ &\times \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t]\right)\right|^2\right\}^{\frac12}.\end{aligned}$$

Для цієї модифікації за [13, Теорема 1.2] справедлива оцінка

$$\begin{aligned}|\widetilde{\eta}(z)| \le{}& \left|g(z,0)\mu((0,t])\right| \\ &+ C\|g(z, T\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,1])} \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t]\right)\right|^2\right\}^{\frac12},\end{aligned}$$

де $\alpha = \varepsilon/2 + 1/2$.

Враховуючи співвідношення (4) і те, що $\overline{C}_T = T^{-1/2}(T^{\alpha} \vee 1) = C$, матимемо

$$|\widetilde{\eta}(z)| \le |g(z,0)\mu((0,t])| + C\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])} \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} |\mu(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t])|^2\right\}^{\frac12}. \qquad (6)$$

Відмітимо, що модифікація $\widetilde{\eta}$ є спільною для всіх $z_0 \in Z_0$, а константа C залежить від α, T та не залежить від z, ω.

Розглянемо тепер окремо норму $\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}$. Виразимо її за допомогою норми простору Бєсова на $[0,t]$. Отже,

$$\begin{aligned}\|g(z,\cdot\wedge t)\|^2_{\mathsf{L}_2([0,T])} &= \int_0^T |g(z,s\wedge t)|^2\,ds = \int_0^t |g(z,s\wedge t)|^2\,ds + \int_t^T |g(z,t)|^2\,ds \\ &= \|g(z,\cdot)\|^2_{\mathsf{L}_2([0,t])} + (T-t)|g(z,t)|^2,\end{aligned}$$

а тому,

$$\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{\mathsf{L}_2([0,T])} \le \|g(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} + |g(z,t)|\sqrt{T-t}.$$

Далі для модуля неперервності маємо

$$\begin{aligned}w_{2,[0,T]}(g(z,\cdot\wedge t),r) &= \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{T-h} |g(z,(s+h)\wedge t) - g(z,s\wedge t)|^2\,ds\right)^{1/2} \\ &= \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{(t-h)\vee 0} |g(z,s+h) - g(z,s)|^2\,ds + \int_{(t-h)\vee 0}^{t\wedge(T-h)} |g(z,t) - g(z,s)|^2\,ds\right)^{1/2} \\ &\le \sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{(t-h)\vee 0} |g(z,s+h) - g(z,s)|^2\,ds\right)^{1/2} \\ &\quad + \sup_{0\le h\le r}\left(\int_{(t-h)\vee 0}^{t\wedge(T-h)} |g(z,t) - g(z,s)|^2\,ds\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Нехай $C_t = 1 + \mathbb{1}\{t < T\}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_t}&\int_0^T w^2_{2,[0,T]}(g(z,\cdot\wedge t),r)r^{-2\alpha-1}\,dr\\
&\le \int_0^t w^2_{2,[0,t]}(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}\,dr + \int_0^T r^{-2\alpha-1}\int_{(t-r)\vee 0}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\\
&\le \int_0^t w^2_{2,[0,t]}(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}\,dr + \int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\\
&\quad+\int_t^T r^{-2\alpha-1}\int_0^t |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\\
&= \int_0^t w^2_{2,[0,t]}(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}\,dr + \int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\\
&\quad+\frac{1}{2\alpha}\left(t^{-2\alpha}-T^{-2\alpha}\right)\int_0^t |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\\
&\le \int_0^t w^2_{2,[0,t]}(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}\,dr + \int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\\
&\quad+t^{-2\alpha}\mathbb{1}\{t<T\}\int_0^t |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds.
\end{aligned}$$

Таким чином, ми одержали наступне

$$\begin{aligned}
\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B^\alpha_{22}([0,T])} &\le \|g(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} + |g(z,t)|\sqrt{T-t}\\
&\quad+C_t^{\frac12}\left(\int_0^t w^2_{2,[0,t]}(g(z,\cdot),r)r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{\frac12}\\
&\quad+C_t^{\frac12}\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac12}\\
&\quad+C_t^{\frac12}t^{-\alpha}\mathbb{1}\{t<T\}\left(\int_0^t |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\right)^{\frac12}\\
&\le C_t^{\frac12}\|g(z,\cdot)\|_{B^\alpha_{22}([0,t])}\\
&\quad+|g(z,t)|\sqrt{T-t}\\
&\quad+C_t^{\frac12}\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac12}\\
&\quad+C_t^{\frac12}t^{-\alpha}\mathbb{1}\{t<T\}\left(\int_0^t |g(z,t)-g(z,s)|^2\,ds\right)^{\frac12}.
\end{aligned}\tag{7}$$

3.2. **Умова Гельдера за змінною $\vec{x}$.**

Лема 3.1. *Нехай виконуються припущення A5 та A6. Тоді для будь-яких фіксованих $t \in [0,T]$, $K > 0$ та $\tilde{\gamma}_1 < \beta(\sigma)$ випадкова функція*

$$\vartheta(\vec{x}) = \int_{(0,t]} d\mu(s)\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})\,d\vec{y}, \qquad |\vec{x}| \le K$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_1$.

Доведення. Для довільного фіксованого $t \in (0, T]$ позначимо

$$q(z,s) = \int_{\mathbb{R}^d} (p(t-s, \vec{x}_1 - \vec{y}) - p(t-s, \vec{x}_2 - \vec{y}))\sigma(s, \vec{y})\, d\vec{y}, \qquad z = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, t),$$

де $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \colon |\vec{x}| \leq K\}$ — будь-які фіксовані та $s \leq t$.

Тоді для модифікації (5) випадкової функції

$$\eta(z) = \vartheta(\vec{x}_1) - \vartheta(\vec{x}_2) = \int_{(0,t]} q(z,s)\, d\mu(s)$$

використаємо оцінку (6), причому модифікацію будуємо на множині

$$Z \times [0,t] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \colon |\vec{x}| \leq K\} \times [0,t] \times [0,t].$$

У такому випадку оцінка (6) має вигляд

$$|\vartheta(\vec{x}_1) - \vartheta(\vec{x}_2)| \leq \left|q(z,0)\mu((0,t])\right| + C\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])} \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\leq k\leq 2^n} \left|\mu\left(\Delta^{(t)}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де стала C залежить від t.

Розглянемо $\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])}$. Спочатку оцінимо модуль неперервності $w_{2,[0,t]}(q,r)$. Для цього покладемо

$$A_1(s,h) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(p(t-s-h, \vec{y}) - p(t-s, \vec{y})\big)\big(\sigma(s+h, \vec{x}_1 - \vec{y}) - \sigma(s+h, \vec{x}_2 - \vec{y})\big)\, d\vec{y},$$
$$A_2(s,h) = \int_{\mathbb{R}^d} \big(p(t-s, \vec{x}_1 - \vec{y}) - p(t-s, \vec{x}_2 - \vec{y})\big)\big(\sigma(s+h, \vec{y}) - \sigma(s, \vec{y})\big)\, d\vec{y}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} A_1(s,h) &= \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h, \vec{y})\sigma(s+h, \vec{x}_1 - \vec{y})\, d\vec{y} - \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h, \vec{y})\sigma(s+h, \vec{x}_2 - \vec{y})\, d\vec{y} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{y})\sigma(s+h, \vec{x}_1 - \vec{y})\, d\vec{y} + \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{y})\sigma(s+h, \vec{x}_2 - \vec{y})\, d\vec{y} \\ &\overset{(\vec{x}_i - \vec{y}) \to \vec{y}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h, \vec{x}_1 - \vec{y})\sigma(s+h, \vec{y})\, d\vec{y} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s-h, \vec{x}_2 - \vec{y})\sigma(s+h, \vec{y})\, d\vec{y} - \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}_1 - \vec{y})\sigma(s+h, \vec{y})\, d\vec{y} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}_2 - \vec{y})\sigma(s+h, \vec{y})\, d\vec{y}, \end{aligned}$$

то з останнього виразу для $A_1(s,h)$ і виразу для $A_2(s,h)$ маємо

$$A_1(s,h) + A_2(s,h) = q(z, s+h) - q(z,s),$$

отже,

$$\int_0^{t-h} |q(z,s+h) - q(z,s)|^2\, ds \leq 2\left(\int_0^{t-h} A_1^2(s,h)\, ds + \int_0^{t-h} A_2^2(s,h)\, ds\right).$$

Далі використаємо оцінку [14, (4.16)]:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} p(t, \vec{x})\right| \leq C t^{-\frac{d}{2}-1} \exp\left\{-\frac{b|\vec{x}|^2}{t}\right\}, \tag{8}$$

де сталі $C, b > 0$ залежать лише від коефіцієнта a з (1).

Враховуючи припущення A6, можемо записати

$$
\begin{aligned}
|A_1(s,h)| &\overset{\text{A6}}{\le} C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(p(t-s-h,\vec{y})-p(t-s,\vec{y})\right)\,d\vec{y}\right|\\
&\overset{(8)}{\le} C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{\mathbb{R}^d}d\vec{y}\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-\frac{d}{2}-1}\exp\left\{-\frac{b|\vec{y}|^2}{\tau}\right\}d\tau\\
&= C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-\frac{d}{2}-1}\,d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left\{-\frac{b|\vec{y}|^2}{\tau}\right\}d\vec{y}\\
&= C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{t-s-h}^{t-s}\tau^{-1}\,d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\tau^{-\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{b|\vec{y}|^2}{\tau}\right\}d\vec{y}\\
&= C|x_1-x_2|^{\beta(\sigma)}\ln\frac{t-s}{t-s-h}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t-h}A_1^2(s,h)\,ds &\le C|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{t-h}\ln^2\frac{t-s}{t-s-h}\,ds\\
&\overset{t-s-h=\tau}{=} C|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{t-h}\ln^2\Big(1+\frac{h}{\tau}\Big)\,d\tau\\
&\overset{\tau=hu}{\le} Ch|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}\int_0^{+\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{u}\right)\,du = Ch|x_1-x_2|^{2\beta(\sigma)}.
\end{aligned}
$$

Далі розглядаємо $A_2(s,h)$. Скористаємось рівністю

$$
g(\vec{x}_1)-g(\vec{x}_2)=\int_0^1 g'_{\vec{x}_1-\vec{x}_2}(\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2)\,d\theta=\int_0^1\big(\operatorname{grad} g(\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2),\vec{x}_1-\vec{x}_2\big)\,d\theta.
$$

Маємо (з урахуванням нерівності $|\operatorname{grad} g|\le|\partial g/\partial x^1|+\ldots+|\partial g/\partial x^d|$)

$$
\begin{aligned}
&p(t-s,\vec{x}_1-\vec{y})-p(t-s,\vec{x}_2-\vec{y})\\
&\quad=\int_0^1\big(\operatorname{grad}_{\vec{x}}p(t-s,\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y}),\vec{x}_1-\vec{x}_2\big)\,d\theta\\
&\quad\le|\vec{x}_1-\vec{x}_2|\int_0^1\big|\operatorname{grad}_{\vec{x}}p(t-s,\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y})\big|\,d\theta\\
&\quad\le C\frac{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}{(t-s)^{\frac{d+1}{2}}}\int_0^1\exp\left\{-\frac{b|\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y}|^2}{t-s}\right\}d\theta,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

де знову використали оцінку [14, (4.16)]:

$$
\left|\frac{\partial p(t,\vec{x})}{\partial x^i}\right|\le Ct^{-\frac{d+1}{2}}\exp\left\{-\frac{b|\vec{x}|^2}{t}\right\},\qquad b>0,\ i=1,\ldots,d.
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
|A_2(s,h)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d}\big(p(t-s,\vec{x}_1-\vec{y})-p(t-s,\vec{x}_2-\vec{y})\big)\big(\sigma(s+h,\vec{y})-\sigma(s,\vec{y})\big)\,d\vec{y}\right|\\
&\overset{\text{A6},(9)}{\le} Ch^{\beta(\sigma)}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|\int_{\mathbb{R}^d}d\vec{y}\int_0^1(t-s)^{-\frac{d+1}{2}}\exp\left\{-\frac{b|\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y}|^2}{t-s}\right\}d\theta\\
&\le C\frac{h^{\beta(\sigma)}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}{(t-s)^{1/2}}\int_0^1 d\theta\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left\{-\frac{(\theta\vec{x}_1+(1-\theta)\vec{x}_2-\vec{y})^2}{t-s}\right\}\frac{d\vec{y}}{(t-s)^{\frac{d}{2}}}\\
&= C\frac{h^{\beta(\sigma)}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}{(t-s)^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Також

$$\int_0^{t-h} A_2^2(s,h)\,ds \le Ch^{2\beta(\sigma)}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2\int_0^{t-h}\frac{ds}{t-s} \le Ch^{2\beta(\sigma)}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2\,(C+|\ln h|)$$
$$\le Ch|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2.$$

В останній нерівності ми використали те, що $\beta(\sigma)>1/2$ та при $0<h\le T$

$$h^{\beta}\,|\ln h|\le C,\qquad \forall 0<\beta<1.$$

Отже,

$$w_{2,[0,t]}(q(z,\cdot),r)\le 2\sup_{0\le h\le r}\left(\int_0^{t-h}A_1^2(s,h)\,ds+\int_0^{t-h}A_2^2(s,h)\,ds\right)^{1/2}$$
$$\le Cr^{1/2}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}. \tag{10}$$

В тексті роботи [1] було отримано оцінку (9) для $d=1$:

$$\bigl|q(z,s+h)-q(z,s)\bigr|\le Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)^{-\beta(\sigma)/2}. \tag{11}$$

Для випадку $d\ge 1$ вона теж справедлива, і одержується аналогічним чином.

Тому маємо

$$w_{2,[0,t]}(q(z,\cdot),r)\le\sup_{0\le h\le r}Ch^{\beta(\sigma)}\left(\int_0^{t-h}(t-s)^{-\beta(\sigma)}\,ds\right)^{1/2}\le Cr^{\beta(\sigma)}.$$

Перемноживши цю нерівність в степені $1-\lambda$ та (10) в степені λ для деякого $\lambda\in(0,1)$, отримуємо

$$\bigl(w_{2,[0,t]}(q(z,\cdot),r)\bigr)^2\le Cr^{\lambda(1-2\beta(\sigma))+2\beta(\sigma)}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{2\lambda\beta(\sigma)}.$$

При $0<\lambda<1$, $1-2\beta(\sigma)<0$ буде

$$\lambda(1-2\beta(\sigma))+2\beta(\sigma)>1-2\beta(\sigma)+2\beta(\sigma)=1,$$

тому інтеграл в (3) буде скінченним для кожного $0<\lambda<1$ при деякому $\alpha>1/2$ та матиме місце нерівність

$$\left(\int_0^t\bigl(w_{2,[0,t]}(g,r)\bigr)^2r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2}\le C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\lambda\beta(\sigma)}$$

Крім того, використовуючи заміни

$$\vec{v}=\frac{\vec{x}_i-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s}},\qquad i=1,2$$

та припущення A6, одержимо $\forall s\in[0,t)$

$$|q(z,s)|=C\left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\sigma(s,\vec{x}_1-2a\vec{v}\sqrt{t-s})\,d\vec{v}-\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\sigma(s,\vec{x}_2-2a\vec{v}\sqrt{t-s})\,d\vec{v}\right|$$
$$\le C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec{v}|^2}\,d\vec{v}=C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}.$$

Отже,

$$|q(z,0)|\le C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)},\qquad \|q(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])}=\left(\int_0^t|q(z,s)|^2\,ds\right)^{1/2}\le C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\beta(\sigma)}.$$

Таким чином, ми отримали, що

$$|\vartheta(\vec{x}_1)-\vartheta(\vec{x}_2)|\le C|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^{\lambda\beta(\sigma)}\left(\bigl|\mu((0,t])\bigr|+\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{\frac12}\right),$$

для будь-якого $\lambda \in (0,1)$. Скінченність суми зі стохастичною мірою випливає з [2, Лема 3.1], що й завершує наше доведення. $\square$

3.3. **Умова Гельдера за змінною t.**

Лема 3.2. *Нехай виконуються припущення* A5, A6 *та* A7. *Тоді для будь-яких фіксованих $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$, $\tilde{\gamma}_2 \le \beta(\mu)$, $\tilde{\gamma}_2 < \beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$ випадкова функція*

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})\, d\vec{y}, \qquad t \in [\delta, T]$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_2$.

Доведення. Нехай $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ фіксоване. Розглянемо модифікацію (5) випадкової функції

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})\, d\vec{y} = \int_{(0,t]} \hat{q}(z,s)\, d\mu(s),$$
$$z = (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [\delta, T].$$

Тоді для довільних фіксованих $\delta \le t_1 < t_2 \le T$ та $z_i = (\vec{x}, t_i)$, $i = 1,2$ маємо

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta}(t_2) - \hat{\vartheta}(t_1) &= \int_{(0,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{q}_0(z_1,s)\, d\mu(s) \\
&\quad + \sum_{n\ge1} \left(\int_{(0,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(0,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)\, d\mu(s) \right) \\
&\quad - \sum_{n\ge1} \left(\int_{(0,t_1]} \hat{q}_n(z_1,s)\, d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{q}_{n-1}(z_1,s)\, d\mu(s) \right) \\
&= \int_{(0,t_1]} (\hat{q}_0(z_2,s) - \hat{q}_0(z_1,s))\, d\mu(s) \\
&\quad + \sum_{n\ge1} \Bigg(\int_{(0,t_1]} \big(\hat{q}_n(z_2,s) - \hat{q}_n(z_1,s)\big)\, d\mu(s) \\
&\qquad\qquad - \int_{(0,t_1]} \big(\hat{q}_{n-1}(z_2,s) - \hat{q}_{n-1}(z_1,s)\big)\, d\mu(s) \Bigg) \\
&\quad + \int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)\, d\mu(s) \\
&\quad + \sum_{n\ge1} \left(\int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)\, d\mu(s) \right) \\
&= I_{11} + I_{12} + I_{21} + I_{22} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

До I_2 застосовуємо метод отримання оцінки F_1 з [1] і одержимо такий самий результат, а саме

$$|I_2| \le C(\omega)(t_2 - t_1)^{\tilde{\gamma}_2}.$$

Для $s \in (0, t_1]$ та $\tilde{z} = (\vec{x}, t_1, t_2)$ покладемо

$$Q(\tilde{z}, s) = \hat{q}(z_2, s) - \hat{q}(z_1, s) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(p(t_2 - s, \vec{x}-\vec{y}) - p(t_1 - s, \vec{x}-\vec{y})\right) \sigma(s,\vec{y})\, d\vec{y}.$$

Аналогічно до оцінки (6) можемо записати

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \left|Q(\tilde z,0)\mu((0,t_1])\right| \\
&\quad + C\overline{C}_T\|Q(\tilde z,\cdot\wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t_1]\right)\right|^2\right\}^{\frac12} \qquad (12)\\
&\le \left|Q(\tilde z,0)\mu((0,t_1])\right| + C(\omega)\|Q(\tilde z,\cdot\wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])},
\end{aligned}
$$

де остання нерівність отримується наступним чином.

Позначимо через k_{n1} такий номер, що $t_1\in((k_{n1}-1)2^{-n}T,k_{n1}2^{-n}T]$. Використовуючи припущення A7, можемо записати

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t_1]\right)\right|^2 &= \sum_{1\le k\le k_{n1}-1}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right)\right|^2+\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{k_{n1}}\cap(0,t_1]\right)\right|^2\\
&\le \sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right)\right|^2 + C(\omega)|t_1-(k_{n1}-1)2^{-n}T|^{2\beta(\mu)}\\
&\le \sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right)\right|^2 + C(\omega)\left(2^{-n}T\right)^{2\beta(\mu)}\\
&\le \sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right)\right|^2 + C(\omega).
\end{aligned}
$$

Тоді маємо

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\cap(0,t_1]\right)\right|^2 &\le \sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right)\right|^2 + C(\omega)\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\\
&\le \sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(T)}_{kn}\right)\right|^2 + C(\omega)\le C(\omega),
\end{aligned}
$$

де в останній нерівності ми використали те, що сума зі стохастичною мірою скінченна за [2, Лема 3.1].

Розглянемо тепер оцінки доданків з нерівності (12).

Оцінимо спочатку величину $Q(\tilde z,s)$. Використовуючи обмеженість σ та нерівність $|\partial_t p(t,\vec x)|\le Ct^{-1}p(t,\vec x/2)$, маємо

$$
|Q(\tilde z,s)|\le C\int_{\mathbb{R}^d}\int_{t_1}^{t_2}(u-s)^{-1}p(u-s,(\vec x-\vec y)/2)\,du\,d\vec y\le C(t_2-t_1)(t_1-s)^{-1}. \qquad (13)
$$

Зробивши заміни змінних

$$
\vec v=\frac{\vec x-\vec y}{2a\sqrt{t_2-s}},\qquad \vec v=\frac{\vec x-\vec y}{2a\sqrt{t_1-s}},
$$

отримаємо, з огляду на припущення A5:

$$
\begin{aligned}
|Q(\tilde z,s)| &= C\left|\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec v|^2}\sigma(s,\vec x-2a\vec v\sqrt{t_2-s})\,d\vec v-\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec v|^2}\sigma(s,\vec x-2a\vec v\sqrt{t_1-s})\,d\vec v\right|\\
&\le C\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|\vec v|^2}|\vec v(\sqrt{t_2-s}-\sqrt{t_1-s})|^{\beta(\sigma)}\,d\vec v\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}(t_2-s)^{-\beta(\sigma)/2}\\
&\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1-s)^{-\beta(\sigma)/2}.
\end{aligned} \qquad (14)
$$

Тоді, враховуючи, що $s\le t_1$, маємо

$$
|Q(\tilde z,s)|\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2},\qquad \|Q(\tilde z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t_1])}\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2}. \qquad (15)
$$

Крім того, з (14) та A7 випливає

$$|Q(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])| \le C(\omega)(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)} t_1^{\beta(\mu)-\beta(\sigma)/2} \le C(\omega)(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}. \qquad (16)$$

Розглянемо тепер вираз $\|Q(\tilde{z},\cdot)\|^2_{B^{\alpha}_{22}([0,t_1])} - \|Q(\tilde{z},\cdot)\|^2_{\mathsf{L}_2([0,t_1])}$.

З оцінок (13) та (14) маємо

$$|Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)| \le |Q(\tilde{z},s+h)| + |Q(\tilde{z},s)| \le C(t_2-t_1)(t_1-s-h)^{-1}, \qquad (17)$$

та

$$|Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)| \le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)}(t_1-s-h)^{-\beta(\sigma)/2} \qquad (18)$$

відповідно. Далі, запишемо

$$|Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)| \le J_1(s,h) + J_2(t_2,s,h) + J_2(t_1,s,h),$$

де

$$J_1(s,h) = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(p(t_2-s,\vec{x}-\vec{y}) - p(t_1-s,\vec{x}-\vec{y})\big)\big(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\big)\, d\vec{y} \right|,$$

$$J_2(t,s,h) = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(p(t-s-h,\vec{x}-\vec{y}) - p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\big)\sigma(s+h,y)\, d\vec{y} \right|.$$

Аналогічно до (13),

$$\begin{aligned} J_1(s,h) &\le C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t_1}^{t_2} (u-s)^{-1} p(u-s,(\vec{x}-\vec{y})/2)\, du h^{\beta(\sigma)}\, d\vec{y} \\ &\le C h^{\beta(\sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (u-s)^{-1}\, du \le C h^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)(t_1-s-h)^{-1}. \end{aligned}$$

Так само,

$$J_2(t,s,h) \le Ch(t-s-h)^{-1},$$

для $t \in \{t_1,t_2\}$, тому

$$|Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)| \le C\big(h^{\beta(\sigma)}(t_2-t_1)+h\big)(t_1-s-h)^{-1}. \qquad (19)$$

З іншого боку, використовуючи підстановки

$$\vec{v} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s-h}}, \qquad \vec{v} = \frac{\vec{x}-\vec{y}}{2a\sqrt{t-s}},$$

одержимо нерівність, аналогічну до (11), таким чином

$$|Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)| \le Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)^{-\beta(\sigma)/2} \le Ch^{\beta(\sigma)}(t_1-s-h)^{-\beta(\sigma)/2}. \qquad (20)$$

Запишемо тепер

$$\begin{aligned} &\|Q(\tilde{z},\cdot)\|^2_{B^{\alpha}_{22}([0,t_1])} - \|Q(\tilde{z},\cdot)\|^2_{\mathsf{L}_2([0,t_1])} \\ &\quad = \left(\int_{t_2-t_1}^{t_1} + \int_0^{t_2-t_1}\right) \sup_{0\le h\le r} \left(\int_0^{t_1-h} |Q(\tilde{z},s+h)-Q(\tilde{z},s)|^2\, ds\right) r^{-2\alpha-1}\, dr \\ &\quad =: L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Для оцінки L_1 для деякого $\lambda \in (1/2,1)$ перемножимо (17) в степені $2-2\lambda$ та (18) в степені 2λ і позначимо $\rho = 2\lambda\big(\beta(\sigma)-1\big)+2$, $\nu = \lambda\big(2-\beta(\sigma)\big)-2$. Тоді, за умови $\nu > -1$ маємо

$$\begin{aligned} L_1 &\le C(t_2-t_1)^{\rho} \int_{t_2-t_1}^{t_1} \sup_{0\le h\le r} \left(\int_0^{t_1-h} (t_1-s-h)^{\nu}\, ds\right) r^{-2\alpha-1}\, dr \\ &\le C(t_2-t_1)^{\rho} \int_{t_2-t_1}^{t_1} t_1^{\nu+1} r^{-2\alpha-1}\, dr \le C(t_2-t_1)^{\rho-2\alpha}. \end{aligned}$$

Так само, для оцінки L_2 перемножимо (19) в степені $2-2\lambda$ та (20) в степені 2λ і одержимо

$$L_2 \le \int_0^{t_2-t_1} \sup_{0\le h\le r}\left(h^{2\beta(\sigma)}(t_2-t_1)^{2-2\lambda}\int_0^{t_1-h}(t_1-s-h)^{\nu}\,ds\right)r^{-2\alpha-1}\,dr$$
$$+C\int_0^{t_2-t_1}\sup_{0\le h\le r}\left(h^{\rho}\int_0^{t_1-h}(t_1-s-h)^{\nu}\,ds\right)r^{-2\alpha-1}\,dr$$
$$\le C(t_2-t_1)^{2-2\lambda}\int_0^{t_2-t_1}r^{2\beta(\sigma)-2\alpha-1}\,dr+C\int_0^{t_2-t_1}r^{\rho-2\alpha-1}\,dr\le C(t_2-t_1)^{\rho-2\alpha}.$$

Отже,

$$\|Q(\tilde z,\cdot)\|^2_{B^{\alpha}_{22}([0,t_1])}-\|Q(\tilde z,\cdot)\|^2_{\mathsf{L}_2([0,t_1])}\le C(t_2-t_1)^{\rho-2\alpha}. \tag{21}$$

Вибираючи λ і α достатньо близько до $1/(2-\beta(\sigma))$ і $1/2$ відповідно, можна зробити показник як завгодно близьким до $2(\beta(\sigma)-1)/(2-\beta(\sigma))+1=\beta(\sigma)/(2-\beta(\sigma))>2\tilde\gamma_2$.

Тепер розглянемо перший інтеграл з нерівності (7):

$$\left(\int_0^{t_1}r^{-2\alpha-1}\int_{t_1-r}^{t_1\wedge(T-r)}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac12}$$
$$\le\left(\int_0^{t_1}r^{-2\alpha-1}\int_{t_1-r}^{t_1}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac12}.$$

З одного боку, за (15)

$$|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|\le|Q(\tilde z,t_1)|+|Q(\tilde z,s)|\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2},$$

з іншого, за першою нерівністю співвідношення (20) для $t_1-r\le s\le t_1$

$$|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|=|Q(\tilde z,s+(t_1-s))-Q(\tilde z,s)|\le C(t_1-s)^{\beta(\sigma)/2}\le Cr^{\beta(\sigma)/2}.$$

Тоді для довільного $\lambda_0\in(0,1)$ маємо

$$|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|\le C(t_2-t_1)^{(1-\lambda_0)\beta(\sigma)/2}r^{\lambda_0\beta(\sigma)/2},$$

а, отже,

$$\left(\int_0^{t_1}r^{-2\alpha-1}\int_{t_1-r}^{t_1}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac12}$$
$$\le C(t_2-t_1)^{(1-\lambda_0)\beta(\sigma)/2}\left(\int_0^{t_1}r^{-2\alpha-1}r^{1+\lambda_0\beta(\sigma)}\,dr\right)^{\frac12}\le C(t_2-t_1)^{(1-\lambda_0)\beta(\sigma)/2},$$

при будь-якому $\lambda_0>0$ і відповідному $\alpha>1/2$.

Крім того,

$$t_1^{-\alpha}\left(\int_0^{t_1}|Q(\tilde z,t_1)-Q(\tilde z,s)|^2\,ds\right)^{\frac12}\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2}t_1^{1/2-\alpha}\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2}\delta^{1/2-\alpha}$$
$$\le C(t_2-t_1)^{\beta(\sigma)/2},$$

де C залежить від δ, α.

Таким чином, враховуючи (7), (15) та (21) одержимо

$$\|Q(\tilde z,\cdot\wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}\le C(t_2-t_1)^{\tilde\gamma_2},$$

що разом з (12) та (16) дає нам шукану оцінку

$$|I_1|\le C(\omega)(t_2-t_1)^{\tilde\gamma_2}.$$

Остаточно, ми одержали, що для кожного фіксованого $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ та довільного фіксованого $\tilde{\gamma}_2 > 0$ такого, що $\tilde{\gamma}_2 \leq \beta(\mu)$ та $\tilde{\gamma}_2 < \beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$ випадкова функція $\hat{\vartheta}(t)$ має модифікацію, для якої виконується

$$\left|\hat{\vartheta}(t_2) - \hat{\vartheta}(t_1)\right| \leq C(\omega)|t_2 - t_1|^{\tilde{\gamma}_2}, \qquad t_1, t_2 \in [\delta, T]$$

Зауважимо, що тут $C(\omega)$ не залежить від t_1 і t_2, а залежить від $\tilde{\gamma}_2, \alpha, T, \delta$ та ω. □

4. Висновки

Досліджено стохастичне рівняння теплопровідності, породжене загальною стохастичною мірою $\mu(t)$ на множині $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його неперервність за Гельдером.

Відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1 < \beta(\sigma)$, $\gamma_1 \leq \beta(u_0)$ та $\gamma_2 \leq \beta(\mu) \wedge \beta(u_0)$, $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$ за змінними $\vec{x}$ і t відповідно. При цьому, в роботі [1] для $d = 1$ було одержано $\gamma_1 < \beta(\sigma)-1/2$, $\gamma_2 \leq \beta(\mu)$ і $\gamma_2 < \beta(\sigma)-1/2$. Таким чином, нам вдалося узагальнити результати [1] та, оскільки $x/(4-2x) > x-1/2$ для $x \in (1/2, 1)$, покращити показники неперервності за Гельдером.

Література

1. V. Radchenko, *Heat equation with general stochastic measure colored in time*, Modern Stochastics: Theory and Applications **1** (2014), 129–138.
2. V. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Math. **194** (2009), no. 3, 231–251.
3. І. Боднарчук, *М'який розв'язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою*, Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка **24** (2010), 28–33.
4. В. М. Радченко, *Кабельне рівняння із загальною стохастичною мірою*, Теорія ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 123–130.
5. V. Radchenko and M. Zähle, *Heat equation with a general stochastic measure on nested fractals*, Stat. Probab. Lett. **82** (2012), 699–704.
6. R. M. Balan and C. A Tudor, *Stochastic heat equation with multiplicative fractional-colored noise*, J. Theor. Probab. **23** (2010), no. 3, 834–870.
7. C. A. Tudor, *Analysis of Variations for Self-similar Processes. A Stochastic Calculus Approach*, Probability and Its Applications, Springer, Cham Heidelberg, 2013.
8. E. Nualart and L. Quer-Sardanyons, *Gaussian estimates for the density of the non-linear stochastic heat equation in any space dimension*, Stochastic Processes and their Applications **122** (2012), 418–447.
9. S. Kwapień and W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
10. В. Н. Радченко, *Интегралы по общим случайным мерам*, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1999.
11. В. М. Радченко, *Інтегральні рівняння із загальною стохастичною мірою*, Теорія ймовір. та матем. статист. **91** (2014), 154–163.
12. В. Н. Радченко, *Эволюционные уравнения с общими стохастическими мерами в гильбертовом пространстве*, Теория вероятн. и ее прим. **59** (2014), №2, 375–386.
13. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl. **13** (1997), no. 2, 63–77.
14. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, УМН **105** (1962), №3, 3–146.

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: robeiko_i@ukr.net

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, Київ 03127, Україна

Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Надійшла 28/07/2015