Теорія ймовір. та матем. статист. Вип. 93, 2015, стор. 22–33

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst. No. 93, 2015, pp. 22–33

МАКСИМАЛЬНЕ СКЛЕЮВАННЯ ТА V-СТІЙКІСТЬ ДИСКРЕТНИХ НЕОДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

УДК 519.21

В. В. ГОЛОМОЗИЙ І М. В. КАРТАШОВ

Анотація. Ми розглядаємо два неоднорідні дискретні ланцюги Маркова, перехідні ймовірності яких за один крок мало відрізняються у V-нормі. Досліджується задача стійкості математичних сподівань від $f(X_n)$, де $|f| \le V$. Для цього припускається виконання умови V-перемішування. Доведення грунтуються на методі максимального склеювання, що максимізує ймовірності склеювання при переходах за один крок.

Abstract. We consider two time-inhomogeneous discrete Markov chains with close in the V-variation norm one-step transition probabilities. The problem of the stability of the expectations for $f(X_n)$, where $|f| \le V$, is investigated. The main assumption is the V-mixing. Proofs are based on the maximal coupling procedure that maximize the one-step coupling probabilities.

Аннотация. Мы рассматриваем две неоднородные дискретные цепи Маркова, переходные вероятности которых за один шаг мало отличаются в V-норме. Исследуется задача устойчивости математических ожиданий от $f(X_n)$, где $|f| \le V$. Для этого допускается выполнение условия V-перемешивания. Доказательства основаны на методе максимального склеивания, которое максимизирует вероятности склеивания.

1. Вступ

Дана робота присвячена дослідженню стійкості дискретних ланцюгів Маркова з використанням максимального склеювання. Схожі питання розглядалися в статтях [26, 27] де отримані основні результати для однорідних ланцюгів, а саме – оцінки стійкості перехідних ймовірнстоей за n кроків, скінченновимірних розподілів, а також V-стійкості.

Далі в статті [30] було узагальнено результати щодо стійкості перехідних ймовірностей на неоднорідний випадок, і врешті в даній роботі представлені результати, що стосуються V-стійкості в неоднорідному випадку.

Основна відмінність даної роботи від робіт [26, 27] полягає у тому, що тут розглядаються неоднорідні ланцюги Маркова, а відмінність від роботи [30] в тому, що представлені результати не щодо стійкості перехідних ймовірностей, а щодо стійкості математичних сподівань функціоналів від двох різних неоднорідних ланцюгів Маркова.

Стійкість ланцюгів Маркова є важливою проблемою, зокрема і у прикладних застосуваннях. Питанню стійкості ланцюгів Маркова присвячено багато робіт (див. наприклад роботи [2, 3, 5, 24]). Класичними є результати щодо стійкості ланцюга Маркова відносно початкового розподілу в однорідному випадку. Однак у практичних застосуваннях часто виникає необхідність порівнювати в деякому сенсі близькі між собою, але різні ланцюги. Окрім того, теорія неоднорідних ланцюгів розвинена

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

Ключові слова і фрази. Coupling theory, coupling method, maximal coupling, discrete Markov chains, stability of distributions, test functions.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)”, 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

недостатньо, хоча на практиці часто виникають задачі для розв'язання яких використовують саме неоднорідні ланцюги. Одним з прикладів такої задачі може бути проблема підрахунку нетто-премії за умови наявності стрес-фактора у моделі страхування "пенсія вдівця". Більше деталей, щодо цієї задачі можна знайти у роботі авторів [31].

Теорія склеювання активно розвивається останнім часом. Так у списку літератури представлено ряд посилань на інші роботи, присвячені склеюванню (наприклад [6, 8]). Зокрема, роботи авторів, де розглядаються питання стійкості однорідних та неоднорідних ланцюгів за різних умов ([22, 23, 29]), роботи [25, 28] присвячені питанню існування моменту склеювання. В перелічених вище роботах використовується переважно метод C-склеювання, адаптований для склеювання різних ланцюгів. Існує цілий ряд робіт, в яких ці методи були впроваджені вперше ([1, 7, 11, 15]), або застосовувалися для аналізу стійкості однорідного ланцюга Маркова відносно різних початкових розподілів ([10, 9, 13, 14, 16, 20, 19, 17, 18, 21]). Читачу також може бути цікаво звернути увагу на техніку "роз'єднання" (splitting), яка за своєю суттю схожа на склеювання. Більше інформації по цій темі можна знайти в роботах [4, 12].

Варто зауважити, що для повного розуміння методів, які використані у статті читатч повинен бути знайомим з основами методу склеювання. Для цього рекомендуємо класичний підручник [11].

2. Основні умови та результати

Позначення які прийнято в даній роботі, аналогічні до позначень з робіт [26, 27, 30].

Розглянемо дискретний простір $E = \{i, j, k, \dots\}$ з сигма-алгеброю всіх підмножин $\mathcal{E} = 2^E$. Основним вихідним об'єктом дослідження є два неоднорідних ланцюги Маркова X та X', що задано парою наборів матриць перехідних ймовірностей на t-тому кроці: $P^{(t)} = (P_{ij}^{(t)}, i, j \in E)$, $P'^{(t)} = (P_{ij}'^{(t)}, i, j \in E)$, відповідно. Позначимо через P_i, E_i умовні ймовірності та математичні сподівання породжені неоднорідним ланцюгом Маркова $X = (X_n, n \ge 0)$:

$$\mathsf{P}_{i_0}(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathsf{P}_{i_k i_{k+1}}^{(k)},$$
$$\mathsf{E}_i[f(X_n)] = \sum_{k \in E} \mathsf{P}_i(X_n = k) f(k).$$

Аналогічний зміст мають позначення P'_i, E'_i для ланцюга $X' = (X'_n, n \ge 0)$.

Введемо також позначення для перехідної ймовірності за k кроків, на проміжку $(t, t+k)$:

$$P^{(t,t+k)} = \prod_{j=0}^{k-1} P^{(t+j)}.$$

Надалі підсумовування та обчислення верхньої межі без вказівки на множину індексів поширюється на простір E. Позначення $x^{\pm}$ є додатною та від'ємною частиною числа x, $\delta_{ij} = \mathbb{1}_{i=j}$ — символи Кронекера. Символом $\wedge$ будемо позначати мінімум.

Окрім того, для зручності читання будемо використовувати наступне позначення. Нехай A — деяка випадкова подія, ξ - випадкова величина. Тоді під $\mathsf{E}[\xi; A]$ будемо розуміти $\mathsf{E}[\xi \mathbb{1}_A]$, де $\mathbb{1}$ — індикатор.

1. V-перемішування, та V-стійкість. Нехай $V = (V_j, j \in E)$ — деяка додатня пробна функція (не обов'язково обмежена), для якої виконано наступні умови

$$V_i \geq 1, \qquad \sum_j P_{ij}^{(t)} V_j < \infty, \qquad \sum_j P_{ij}'^{(t)} V_j < \infty, \qquad \forall t > 0. \tag{1}$$

Умова V-стійкості за один крок полягає у зближенні перехідних матриць $P^{(t)}$ та $P'^{(t)}$ у V-нормі:

$$\exists \varepsilon \in (0,1) \left\| P^{(t)} - P'^{(t)} \right\|_V = \sup_i V_i^{-1} \sum_j \left| P_{ij}^{(t)} - P_{ij}'^{(t)} \right| V_j \leq \varepsilon, \qquad \forall t \geq 0. \tag{2}$$

Умова V-перемішування:

$$\exists \rho_V \in (0,1), \qquad \sum_j \left| P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)} \right| V_j \leq \rho_V (V_i + V_k), \qquad \forall i \neq j \in E, \qquad \forall t \geq 0. \tag{3}$$

Теорема 2.1. *Нехай виконано умову V-стійкості* (2)*, та рівномірного V-перемішування* (3)*. Тоді для кожного $n \geq 1$ виконуються нерівності*

$$\sup_{|f| \leq V} \left| \mathsf{E}_i f(X_n) - \mathsf{E}_i' f(X_n') \right| \leq \varepsilon K_i^{(n)} (1 - \rho_V^n)/(1 - \rho_V), \tag{4}$$

де:

$$K_i^{(n)} = \sup_{t<n} \mathsf{E}_i V_{X_t}, \qquad \rho_V \in (0,1)$$

з умови (3)*.*

Замість умови перемішування (3), можна розглядати дещо простіші умови (5)-(6), як видно в наступному наслідку:

Наслідок 2.1. *Нехай виконано умову V-стійкості, з деяким $\varepsilon_V \in (0,1)$, та існує така підмножина станів $\mathrm{O} \in E$, число $\rho_O < 1 - \varepsilon_V$ та пробна функція V_i, що для довільного $t > 0$ мають місце нерівності:*

$$\sum_j P_{ij}^{(t)} V_j \leq \rho_O V_i, \qquad \forall i \notin \mathrm{O},\ V_i \geq 1, \tag{5}$$

$$\sum_j \left| P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)} \right| V_j \leq \rho_O (V_i + V_k), \qquad \forall i \in E,\ k \in \mathrm{O},\ i \neq k. \tag{6}$$

Тоді для всіх $n > 0$ та $i \in E$ виконується нерівність:

$$\sup_{|f| \leq V} |\, \mathsf{E}_i[f(X_n)] - \mathsf{E}_i'[f(X_n')]| \leq \frac{\varepsilon_V K_i^{(n)}}{1 - \rho_O - \varepsilon_V}, \tag{7}$$

де $K_i^{(n)} = \sup_{t<n} \mathsf{E}_i[V_{X_t}] \leq \max\{V_i, \sup_{i \in \mathrm{O}, t \geq 0} \sum_j P_{ij}^{(t)} V_j/(1 - \rho_O)\}$.

Зауваження 2.1*.* Зауважимо, що у деяких випадках величина $K_i^{(n)}$ буде обмеженою. Зокрема, якщо $V_i = 1$ і ланцюг рівномірно ергодичний (зокрема скінчений).

3. Приклад

Розглянемо в якості прикладу однорідний ланцюг народження та загибелі, що збурено неоднорідним чином.

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 1-\alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & 0 & 1-\alpha_1 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 1-\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix},$$

$$P'^{(t)} = \begin{pmatrix} \alpha_0+\delta_0(t) & 1-\alpha_0-\delta_0(t) & 0 & 0\dots & \\ \alpha_1+\delta_1(t) & 0 & 1-\alpha_1-\delta_1(t) & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2+\delta_2(t) & 0 & 1-\alpha_2-\delta_2(t) & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3+\delta_3(t) & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{pmatrix}.$$

В якості функції V виберемо наступну:

$$V_0 = 1, \qquad V_i = v^i,$$

для деякого $v \geq 1$. Пізніше ми знайдемо умови, за яких таке v можна вибрати.

Перевіримо умову V-стійкості, тоді i-те рівняння виглядає так:

$$v^{-i} 2\delta_i(t) v^{i+1} \leq \varepsilon,$$

або

$$2\delta_i(t) v \leq \varepsilon,$$
$$\delta_i(t) \leq \varepsilon/2v.$$

Отже за достатньо малих $\delta_i(t)$ умова V-стійкості виконана рівномірно за t, i.

Перевіримо тепер умову V-перемішування. Для цього скористаємось наслідком, з $\mathrm{O} = \{0\}$:

$$\alpha_i v^{i-1} + (1-\alpha_i) v^{i+1} \leq \rho_O v^i,$$
$$\alpha_i + (1-\alpha_i) v^2 \leq \rho_O v,$$
$$(1-\alpha_i) v^2 - \rho_O v + \alpha_i \leq 0.$$

Дана нерівність має розв'язки, якщо $\rho_O \geq 2\sqrt{(1-\alpha_i)\alpha_i}$. В цьому разі

$$v \in \left[\frac{\rho_O - \sqrt{\rho^2 - 4(1-\alpha_i)\alpha_i}}{2(1-\alpha_i)}, \frac{\rho_O + \sqrt{\rho^2 - 4(1-\alpha_i)\alpha_i}}{2(1-\alpha_i)} \right].$$

Припустимо, що $\gamma = \inf_i \alpha_i > 1/2$. Тоді можна вибрати $\rho_O = 2\sqrt{\gamma(1-\gamma)} < 1$. Розглянемо тепер нерівність з точки зору α_i:

$$(1-\alpha_i) v^2 - \rho_O v + \alpha_i \leq 0,$$
$$\alpha_i (1 - v^2) \leq \rho_O v - v^2,$$
$$\alpha_i \geq \frac{\rho_O v - v^2}{1 - v^2},$$
$$\inf_i \alpha_i \geq \frac{\rho_O v - v^2}{1 - v^2}.$$

Тоді визначимо v з рівняння:

$$\gamma = \frac{\rho_O v - v^2}{1 - v^2},$$
$$(1-\gamma) v^2 - \rho_O v + \gamma = 0,$$
$$(\sqrt{1-\gamma}\, v - \sqrt{\gamma})^2 = 0,$$
$$v = \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}} > 1.$$

Перевіримо тепер другу умову, для $i > 2$:

$$\alpha_0 + (1-\alpha_0) v + \alpha_i v^{i-1} + (1-\alpha_i) v^{i+1} \leq (1 + v^i).$$

З урахуванням вище доведеного досить показати, що

$$\alpha_0 + (1-\alpha_0) v \leq 1 + (1-\rho_O) v^i,$$

або

$$\alpha_0(1-v) \le 1 + (1-\rho_O)v^i - v,$$

або

$$\alpha_0 \ge 1 + \frac{(1-\rho_O)v^i}{1-v}.$$

Ясно, що права частина зростає по i, тому

$$\alpha_0 \ge 1 + \frac{(1-\rho_O)v^3}{1-v}. \tag{8}$$

Перевіримо другу умову для $i = 1$:

$$|\alpha_0 - \alpha_1| + (1-\alpha_0)v + (1-\alpha_1)v^2 \le (1+v).$$

Досить вимагати, щоб

$$|\alpha_0 - \alpha_1| + (1-\alpha_0)v - \alpha_1 \le 1 + (1-\rho_O)v. \tag{9}$$

Перевіримо другу умову для $i = 2$:

$$\alpha_0 + |1-\alpha_0-\alpha_2|v + (1-\alpha_2)v^3 \le (1+v^2),$$

або

$$\alpha_0 + |1-\alpha_0-\alpha_2|v - \alpha_2 v \le 1 + (1-\rho_O)v^2. \tag{10}$$

Тоді умови наслідку, а отже і теореми в даному випадку будуть виконані за наступних умов: Для α_0, α_1, α_2 виконані умови (8), (9), (10). Крім того $\gamma = \inf_i \alpha_i > 1/2$, та $\delta_i(t) < \varepsilon(\sqrt{1-\gamma})/\gamma$, для деякого фіксованого ε. Тоді виконані умови наслідку, з $v = \sqrt{\gamma/(1-\gamma)}$, $V_i = v^i$, $\rho_O = 2\sqrt{\gamma(1-\gamma)}$, та $\mathrm{O} = \{0\}$. Зауважимо, що у класичному випадку $\alpha_0 = 1$, умови (8), (9), (10) виконані автоматично. Окрім того, умова $\gamma = \inf_i \alpha_i > 1/2$ в однорідному випадку є необхідна і достатня для рівномірної ергодичності.

4. Максимальне склеювання ланцюгів

Дана конструкція повністю аналогічна введеній у роботі [30]. Ми приводимо її тут, для спрощення подальших посилань. Для більш детального опису побудови траєкторій, а також для обгрунтування властивості "максимальності" склеювання відсилаємо читача до робіт [26] (однорідний випадок) та [32] (неоднорідний).

Визначимо множину

$$D = \{0, 1\},$$

та розглянемо ланцюг Маркова: $Z_n = \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}, d_n\right)$ зі значеннями у просторі (E, E, D) (тут під простором (E, E, D) ми розуміємо $E \times E \times D$, де E — це фазовий простір визначений на початку статті) з сигма алгеброю всіх підмножин наступним чином:

$$d_0 \in \{0,1\}, \qquad Z_0^{(1)} = X_0, \qquad Z_0^{(2)} = X_0'.$$

Зауважимо, що всі процеси — $Z_n^{(1)}$, $Z_n^{(2)}$, d_n задано на одному ймовірнісному просторі. Через $\mathbb{P}$ позначимо ймовірність породжену тривимірним ланцюгом Z_n. Далі ітеративно визначимо Z_{n+1} знаючи Z_n. В даних позначеннях d_n — це індекс який характеризує чи склеєні чи розклеєні ланцюги в даний момент часу (момент n). Якщо $d_n = 1$ то ланцюги склеєні, якщо $d_n = 0$ то розклеєні. Наша мета так визначити ймовірності переходів, щоб маргінальні ймовірності завжди співпадали з оригінальними.

Визначимо, спочатку ймовірності переходу для *склеєних ланцюгів*:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=(j,j,1)\mid Z_n=(i,i,1))=P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{ij},\qquad i,j\in E,\tag{11}$$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=(j,k,1)\mid Z_n=(i,i,1))=0,\qquad k\neq j,\tag{12}$$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}=(j,k,0)\mid Z_n=(i,i,1))=\frac{\left(P^{(n)}_{ij}-P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{ij}\right)\left(P'^{(n)}_{ik}-P^{(n)}_{ik}\wedge P'^{(n)}_{ik}\right)}{1-\sum_{l\in E}P^{(n)}_{il}\wedge P'^{(n)}_{il}}.\tag{13}$$

Розглянемо тепер маргинальні розподіли:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_{n+1}\in(j,E,D)\mid Z_n=(i,i,1))\\
&=P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{ij}+\sum_{k\in E}\left(\frac{\left(P^{(n)}_{ij}-P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{ij}\right)\left(P'^{(n)}_{ik}-P^{(n)}_{ik}\wedge P'^{(n)}_{ik}\right)}{1-\sum_{l\in E}P^{(n)}_{il}\wedge P'^{(n)}_{il}}\right)\\
&=P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{ij}+\left(P^{(n)}_{ij}-P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{ij}\right)\frac{\sum_{k\in E}\left(P'^{(n)}_{ik}-P^{(n)}_{ik}\wedge P'^{(n)}_{ik}\right)}{1-\sum_{l\in E}P^{(n)}_{il}\wedge P'^{(n)}_{il}}\\
&=P^{(n)}_{ij}.
\end{aligned}$$

Таким чином отримали:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}\in(j,E,D)\mid Z_n=(i,i,1))=P^{(n)}_{ij},\qquad \forall i,j\in E.\tag{14}$$

Аналогічно, легко показати, що

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}\in(E,j,D)\mid Z_n=(i,i,1))=P'^{(n)}_{ij},\qquad \forall i,j\in E.\tag{15}$$

Тепер визначимо ймовірності переходу для *розклеєних ланцюгів*:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1}=(j,j,1)\mid Z_n=(i,k,0))&=P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{kj},\qquad i,k,j\in E,\\
\mathbb{P}(Z_{n+1}=(j,l,1)\mid Z_n=(i,k,0))&=0,\qquad k\neq l,\\
\mathbb{P}(Z_{n+1}=(j,l,0)\mid Z_n=(i,k,0))&\\
=\frac{\left(P^{(n)}_{ij}-P^{(n)}_{ij}\wedge P'^{(n)}_{kj}\right)\left(P'^{(n)}_{kl}-P^{(n)}_{il}\wedge P'^{(n)}_{kl}\right)}{1-\sum_{s\in E}P^{(n)}_{is}\wedge P'^{(n)}_{ks}}&,\qquad i,k,j,l\in E.
\end{aligned}\tag{16}$$

Розглянемо тепер маргинальні розподіли для $d_n=0$, легко бачити, що аналогічно до попереднього випадку мають місце рівності:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}\in(j,E,D)\mid Z_n=(i,k,0))=P^{(n)}_{ij},\tag{17}$$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1}\in(E,j,D)\mid Z_n=(i,k,0))=P'^{(n)}_{ij},\tag{18}$$

Зауваження 4.1. В даному випадку, як і в роботі [30] залишається вірним зауваження 2, ст. 20 з [30]. А саме про те, що d_n є функціоналом від Z_n, і взагалі кажучи, введеня цієї величини не є необхідиним. В даному випадку, воно зроблено з метою зробити більш зрозумілими викладки, а також щоб стандартизувати доведення класу подібних теорем в інших роботах авторів.

Зауваження 4.2. Окремо відмітимо, і будемо користуватися в подальшому тим фактом, що процеси $Z^{(1)}_t$ та $Z^{(2)}_t$ є ланцюгами Маркова, причому їх розподіли співпадають з розподілами X_t та X'_t відповідно (як показано вище).

5. Допоміжні леми

Лема 5.1. *Має місце наступна формула:*

$$E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right); d_n = 1\right] = E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 1\right].$$

Доведення. За лемою 5.1 з роботи [30]:

$$P_i(X_n = k) = \mathbb{P}_{ii1}(Z_n^{(1)} = k),$$

звідки маємо:

$$\begin{aligned} E_{ii1}[f(Z_n^{(1)}); d_n = 1] &= \sum_k f(k)\mathbb{P}_{ii1}(Z_n \in (k, E, 1)) = \sum_k f(k)\mathbb{P}_{ii1}(Z_n \in (k, k, 1)) \\ &= \sum_k f(k)\mathbb{P}_{ii1}(Z_n \in (E, k, 1)) = E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 1\right]. \qquad \square \end{aligned}$$

Лема 5.2. *Має місце наступна нерівність:*

$$|E_i[f(X_n)] - E_i'[f(X_n')]| \le E_{ii1}\left[W\left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right],$$

де $W(i,j) = V_i + V_j$.

Доведення. В силу того, що величини X_n та $Z_n^{(1)}$ мають однакові розподіли (див. зауваження 4.2) має місце рівність: $E_i[f(X_n)] = E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right)\right]$ (див. лему 5.1 з роботи [30]). Тоді, скориставшись лемою (5.1):

$$\begin{aligned} |E_i[f(X_n)] - E_i'[f(X_n')]| &= \left|E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right)\right] - E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(2)}\right)\right]\right| \\ &= \Big|E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right); d_n = 1\right] - E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 1\right] \\ &\qquad + E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right); d_n = 0\right] - E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right]\Big| \\ &= \left|E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right); d_n = 0\right] - E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right]\right| \\ &= \left|E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right) - f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right]\right| \\ &\le \left|E_{ii1}\left[f\left(Z_n^{(1)}\right) + f\left(Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right]\right| \\ &\le \left|E_{ii1}\left[V_{Z_n^{(1)}} + V_{Z_n^{(2)}}; d_n = 0\right]\right| \\ &= E_{ii1}\left[W(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}); d_n = 0\right]. \qquad \square \end{aligned}$$

Лема 5.3. *Для довільних* $k, i, j \in E$ *має місце наступна формула:*

$$V_k^{-1} \sum_{i,j} \mathbb{P}(Z_t = (i, j, 0) \mid Z_{t-1} = (k, k, 1))(V_i + V_j) \le \varepsilon.$$

Доведення. Скористаємось формулою (13) для виразу

$$\mathbb{P}(Z_t = (i, j, 0) \mid Z_{t-1} = (k, k, 1))$$

і отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&V_k^{-1}\sum_{i,j}\mathbb{P}(Z_t=(i,j,0)\mid Z_{t-1}=(k,k,1))(V_i+V_j)\\
&\quad=V_k^{-1}\sum_{i,j}\frac{\left(P_{ki}^{(n)}-P_{ki}^{(n)}\wedge P_{ki}^{\prime(n)}\right)\left(P_{kj}^{\prime(n)}-P_{kj}^{(n)}\wedge P_{kj}^{\prime(n)}\right)}{1-\sum_{l\in E}P_{kl}^{(n)}\wedge P_{kl}^{\prime(n)}}(V_i+V_j)\\
&\quad=\frac{V_k^{-1}}{1-\sum_{l\in E}P_{kl}^{(n)}\wedge P_{kl}^{\prime(n)}}\\
&\qquad\quad\times\sum_i\left(\left(P_{ki}^{(n)}-P_{ki}^{(n)}\wedge P_{ki}^{\prime(n)}\right)\sum_j\left(P_{kj}^{\prime(n)}-P_{kj}^{(n)}\wedge P_{kj}^{\prime(n)}\right)V_i\right)\\
&\qquad+\frac{V_k^{-1}}{1-\sum_{l\in E}P_{kl}^{(n)}\wedge P_{kl}^{\prime(n)}}\\
&\qquad\quad\times\sum_j\left(\left(P_{kj}^{\prime(n)}-P_{kj}^{(n)}\wedge P_{kj}^{\prime(n)}\right)\sum_i\left(P_{ki}^{(n)}-P_{ki}^{(n)}\wedge P_{ki}^{\prime(n)}\right)V_j\right)\\
&\quad=V_k^{-1}\sum_i\left(P_{ki}^{(n)}-P_{ki}^{\prime(n)}\right)^+V_i+V_k^{-1}\sum_j\left(P_{kj}^{\prime(n)}-P_{kj}^{(n)}\right)^+V_j\\
&\quad=V_k^{-1}\sum_i\left|P_{ki}^{(n)}-P_{ki}^{\prime(n)}\right|V_i\le\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Остання нерівність випливає з умови V-стійкості (2). □

Лема 5.4. *Для довільних $m,s\in E$ має місце формула:*

$$
\sum_{x,y}\mathbb{P}(Z_n=(x,y,0)\mid Z_{n-1}=(m,s,0))(V_x+V_y)\le\rho_V(V_m+V_s). \tag{19}
$$

Доведення. Скористаємось означенням ймовірності переходу для розклеєного ланцюга (16), яке підставимо у вираз $\sum_{x,y}\mathbb{P}(Z_n=(x,y,0)\mid Z_{n-1}=(m,s,0))(V_x+V_y)$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x,y}\mathbb{P}(Z_n=(x,y,0)\mid Z_{n-1}=(m,s,0))(V_x+V_y)\\
&\quad\le\frac{1}{1-\sum_l P_{ml}^{(n)}\wedge P_{sl}^{\prime(n)}}\sum_x\left(P_{mx}^{(n)}-P_{mx}^{(n)}\wedge P_{sx}^{\prime(n)}\right)V_x\sum_y\left(P_{sy}^{\prime(n)}-P_{sy}^{\prime(n)}\wedge P_{my}^{(n)}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{1-\sum_l P_{ml}^{(n)}\wedge P_{sl}^{\prime(n)}}\sum_y\left(P_{sy}^{\prime(n)}-P_{sy}^{\prime(n)}\wedge P_{my}^{(n)}\right)V_y\sum_x\left(P_{mx}^{(n)}-P_{mx}^{(n)}\wedge P_{sx}^{\prime(n)}\right)\\
&\quad=\sum_x\left(P_{mx}^{(n)}-P_{sx}^{\prime(n)}\right)^+V_x+\sum_y\left(P_{sy}^{\prime(n)}-P_{my}^{(n)}\right)^+V_y\\
&\quad=\sum_i\left(\left(P_{mi}^{(n)}-P_{si}^{\prime(n)}\right)^++\left(P_{si}^{\prime(n)}-P_{mi}^{(n)}\right)^+\right)V_i\\
&\quad=\sum_i\left|P_{mi}^{(n)}-P_{si}^{\prime(n)}\right|V_i\le\rho_V(V_m+V_s).
\end{aligned}
$$

Остання нерівність випливає з умови V-перемішування. □

Лема 5.5. *Для довільних $i, j \in E$, а також $t < n$ має місце наступна нерівність:*

$$(V_i + V_j)^{-1} \sum_{x,y} \mathbb{P}\Big(Z_n^{(1)} = x, Z_n^{(2)} = y, d_l = 0, l = t, \dots, n \;\Big|\; Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\Big)(V_x + V_y) \le \rho_V^{n-t}. \tag{20}$$

Доведення. Виділимо з формули (20) ймовірність переходу в останній момент, і помінявши порядок підсумовування отримаємо:

$$\begin{aligned}
&(V_i + V_j)^{-1} \sum_{x,y} \mathbb{P}\left(Z_n^{(1)} = x, Z_n^{(2)} = y, d_l = 0, l \ge t \;\middle|\; Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\right)(V_x + V_y)\\
&\quad = (V_i + V_j)^{-1} \sum_{m,s} \mathbb{P}(Z_{n-1} = (m, s, 0), d_l = 0, l = t, \dots, n-1 \mid Z_t = (i, j, 0))\\
&\quad\quad \times \sum_{x,y} \mathbb{P}(Z_n = (x, y, 0) \mid Z_{n-1} = (m, s, 0))(V_x + V_y)\\
&\quad \le \rho_V (V_i + V_j)^{-1} \sum_{m,s} \mathbb{P}\big(Z_{n-1} = (m, s, 0), d_l = 0, l = t, \dots, n-1 \mid Z_t = (i, j, 0)\big)\\
&\quad\quad \times (V_m + V_s),
\end{aligned}$$

де остання нерівність є наслідком прямого застосування леми (5.4).

Формула (20) тепер виводиться за індкуцією:

$$\begin{aligned}
&(V_i + V_j)^{-1} \sum_{x,y} \mathbb{P}\left(Z_n^{(1)} = x, Z_n^{(2)} = y, d_l = 0, l \ge t \;\middle|\; Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\right)(V_x + V_y)\\
&\quad \le (V_i + V_j)^{-1} \rho_V^{n-t} (V_i + V_j) = \rho_V^{n-t}.
\end{aligned}$$

□

6. Доведення теореми 1

За лемою (5.2):

$$|E_i[f(X_n)] - E_i'[f(X_n')]| \le E_{ii1}\left[W\left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right],$$

тому далі розглянемо:

$$\begin{aligned}
E_{ii1}\left[W\left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right] &= \sum_{x,y} \mathbb{P}_{ii1}\left(Z_n^{(1)} = x, Z_n^{(2)} = y, d_n = 0\right)(V_x + V_y)\\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k,x,y} \mathbb{P}_{ii1}\left(Z_{t-1}^{(1)} = Z_{t-1}^{(2)} = k, d_{t-1} = 1\right)\\
&\quad \times \sum_{i,j} \mathbb{P}\left(Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0 \;\middle|\; Z_{t-1}^{(1)} = Z_{t-1}^{(2)} - k, d_{t-1} = 1\right)\\
&\quad \times \mathbb{P}\left(Z_n^{(1)} = x, Z^{(2)} = y, d_l = 0, l \ge t \;\middle|\; Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\right)(V_x + V_y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k,x,y} P^{(t)}(i,k) V_k V_k^{-1} \\
&\quad \times \sum_{i,j} \mathbb{P}(Z_t = (i,j,0) \mid Z_{t-1} = (k,k,1)) \\
&\quad\quad \times \mathbb{P}\left(Z_n^{(1)} = x, Z^{(2)} = y, d_l = 0, l \geq t \,\middle|\, Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\right)(V_x + V_y) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k,x,y} P^{(t)}(i,k) V_k V_k^{-1} \\
&\quad \times \sum_{i,j} \mathbb{P}(Z_t = (i,j,0) \mid Z_{t-1} = (k,k,1))(V_i + V_j)(V_i + V_j)^{-1} \\
&\quad\quad \times \mathbb{P}\left(Z_n^{(1)} = x, Z^{(2)} = y, d_l = 0, l \geq t \,\middle|\, Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\right)(V_x + V_y) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \sum_{k} P^{(t)}(i,k) V_k V_k^{-1} \\
&\quad \times \sum_{i,j} \mathbb{P}(Z_t = (i,j,0) \mid Z_{t-1} = (k,k,1))(V_i + V_j) \\
&\quad\quad \times \Bigg(\sum_{x,y} (V_i + V_j)^{-1} \\
&\quad\quad\quad \times \mathbb{P}\left(Z_n^{(1)} = x, Z^{(2)} = y, d_l = 0, l \geq t \,\middle|\, Z_t^{(1)} = i, Z_t^{(2)} = j, d_t = 0\right) \\
&\quad\quad\quad\quad \times (V_x + V_y) \Bigg).
\end{aligned}
$$

Тепер скориставшись лемами (5.3) та (5.5) отримаємо:

$$
\begin{aligned}
E_{ii1}\left[W\left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right); d_n = 0\right] &= \sum_{x,y} \mathbb{P}_{ii1}\left(Z_n^{(1)} = x, Z_n^{(2)} = y, d_n = 0\right)(V_x + V_y) \\
&\leq \sum_{t=1}^{n} \sum_{k} P_{ik}^{(t)} V_k \varepsilon \rho^{n-t} = \sum_{t=1}^{n} E_i[V_{X_t}] \varepsilon \rho_V^{n-t} \leq \varepsilon K_i^{(n)} \sum_{t=0}^{n-1} \rho_V^t = \varepsilon K_i^{(n)} \frac{1 - \rho_V^n}{1 - \rho_V}.
\end{aligned}
$$

7. Доведення наслідку

Покажемо, що виконується умова V-перемішування, з $\rho_V = \rho_O + \varepsilon_V$. Для цього спочатку встановимо виконання формули, при довільних i, j, t:

$$
\sum_j \left| P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)} \right| V_j \leq \rho_O (V_i + V_k). \tag{21}
$$

Нехай $i, k \notin \mathrm{O}$, тоді для кожного $t > 0$:

$$
\sum_j \left| P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)} \right| V_j \leq \sum_{j \in \mathrm{O}} \left| P_{ij}^{(t)} - P_{kj}^{\prime(t)} \right| V_j + \sum_{j \notin \mathrm{O}} \left(P_{ij}^{(t)} + P_{kj}^{\prime(t)} \right) V_j
$$

$$= \sum_{j\in \mathrm{O}} \left|P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)}\right| V_j + \sum_{j\in E} P_{ij}^{(t)} V_j + \sum_{j\in E} P_{kj}'^{(t)} V_j - \sum_{j\in \mathrm{O}} P_{ij}^{(t)} V_j - \sum_{j\in \mathrm{O}} P_{kj}'^{(t)} V_j$$

$$\le \rho_O(V_i + V_k) + \sum_{j\in \mathrm{O}} \left(\left|P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)}\right| - \left(P_{ij}^{(t)} + P_{kj}'^{(t)}\right)\right) V_j$$

$$\le \rho_O(V_i + V_k),$$

де в передостанній нерівності ми використали формулу (5). Якщо ж одне зі значень i, k (або обидва) належать O, то (21) випливає з умови (6). Тепер доведемо власне умову перемішування:

$$\sum_{j} \left|P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)}\right| V_j \le \sum_{j} \left|P_{ij}^{(t)} - P_{kj}'^{(t)}\right| V_j + \sum_{j} \left|P_{kj}'^{(t)} - P_{kj}'^{(t)}\right| V_j \le \rho_O(V_i + V_k) + \varepsilon_V V_k$$
$$< (\rho_O + \varepsilon_V)(V_i + V_k) = \rho_V(V_i + V_k).$$

Далі застосувавши Теорему 1 отримаємо нерівність з умови наслідку. Залишилось довести нерівність для $K_i^{(n)}$. Зауважимо, спочатку, що при $i \notin \mathrm{O}$:

$$E_i[V_{X_1}] = \sum_{j} V_j P_{ij}^{(0,1)} \le \rho_O V_i. \tag{22}$$

Позначимо $k_i^{(n)} = E_i[V_{X_n}]$, $K_O = \sup_{i\in O, 1<t\le n} \sum_j P_{ij}^{(t-1,t)} V_j$. Тоді:

$$k_i^{(n)} = \sum_{j} P_{ij}^{(0,n)} V_j = \sum_{j} \sum_{k\in \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} P_{kj}^{(n-1,n)} V_j + \sum_{j} \sum_{k\notin \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} P_{kj}^{(n-1,n)} V_j$$
$$\le \sum_{k\in \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} K_O + \rho_O \sum_{k\notin \mathrm{O}} P_{ik}^{(0,n-1)} V_k \le K_O + \rho_O k_i^{(n-1)}.$$

Застосовуючи отриману формулу рекурсивно отримаємо:

$$k_i^{(n)} \le K_O \sum_{m=0}^{n-1} \rho_O^m + k_i^{(1)} \le K_O \frac{1-\rho_O^n}{1-\rho_O} + \rho_O^n V_i,$$

що доводить оцінку для $K_i^{(n)}$ і завершує доведення наслідку.

Автори щиро вдячні рецензентам за цінні поради та зауваження.

Література

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique **2** (1938), 77–105.
2. N. V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1996.
3. Н. В. Карташов, *Экспоненциальная асимптотика матрицы марковского восстановления*, Асимптотические задачи для случайн. процессов, Препр. Ин-та матем. АНУ, №77-24, Киев, 1977, стр. 2–43.
4. E. Nummelin, *A splitting technique for Harris recurrent chains*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie and Verw. Geb. **43** (1978), 309–318.
5. E. Nummelin and R. L. Tweedie, *Geometric ergodicity and R-positivity for general Markov chains*, Ann. Probab. **6** (1978), 404–420.
6. T. Lindvall, *On coupling of discrete renewal sequences*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **48** (1979), 57–70.
7. И. Н. Коваленко, Н. Ю. Кузнецов, *Построение вложенного процесса восстановления для существенно многомерных процессов теории массового обслуживания и его применение к получению предельных теорем*, Препринт АН УССР, №80-12, Институт кибернетики, Киев, 1980.
8. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl. **11** (1981), 11–26.

9. E. Numemelin and P. Tuominen, *Geometric ergodicity of Harris recurrent Markov chains with applicatoins to renewal theory*, Stoch. Proc. Appls. **12** (1982), 187–202.
10. E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Nonnegative Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
11. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, 1991.
12. S. P. Mayn and R. L. Tweedie, *Markov chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, 1993.
13. P. Tuominen and R. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Adv. in Appl. Probab. **26** (1994), 775–798.
14. P. Tuominen and R. L. Tweedie, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic Markov chains*, Advances in Applied Probability **26** (1994), 775–798.
15. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.
16. S. F. Jarner and G. O. Roberts, *Polynomial convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **12** (2001), 224–247.
17. R. Douc, E. Moulines, and J. S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), 1643–1664.
18. R. Douc, E. Mouliness, and J. S. Rothenthal, *Quantitative bounds on convergence of Time-inhomogeneous Markov chains*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1643–1665.
19. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Practical drift conditions for subgeometric rates of convergence*, Annals of Applied Probability **14** (2004), no. 4, 1353–1377.
20. R. Douc, E. Moulines, and P. Soulier, *Computable convergence rates for subgeometrically ergodic Markov chains*, Bernoulli **13** (2007), no. 3, 831–848.
21. R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, *Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes*, Stochastic Processes and their Applications **119** (2009), no. 3, 897–923.
22. В. В. Голомозий, *Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова*, Вісник Київського університету, Серія: фіз.-мат. науки **4** (2009), 10–15.
23. В. В. Голомозий, *Субгеометрична оцінка стійкості для однорідних ланцюгів Маркова*, Теор. ймовір. та матем. статист. **81** (2010), 31–46.
24. М. В. Карташов, *Обмеженість, границі та стійкість розв'язків неоднорідного збурення рівняння відновлення на півосі*, Теор. ймовір. та матем. статист. **81** (2009), 65–75.
25. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Середній час зклеювання незалежних дискретних процесів відновлення*, Теор. ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 78–85.
26. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, I*, Теор. ймовір. та матем. статист. **86** (2012), 81–92.
27. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних ланцюгів Маркова, II*, Теор. ймовір. та матем. статист. **87** (2012), 58–70.
28. В. В. Голомозий, М. В. Карташов, *On coupling moment integrability for time-inhomogeneous Markov chains*, Теор. ймовір. та матем. статист. **89** (2014), 1–12.
29. В. В. Голомозий, *Нерівності для моменту склеювання двох неоднорідних ланцюгів Маркова*, Теор. ймовір. та матем. статист. **90** (2014), 39–51.
30. М. В. Карташов, В. В. Голомозий, *Максимальне склеювання та стійкість дискретних неоднорідних ланцюгів Маркова*, Теор. ймовір. та матем. статист. **91** (2014), 16–26.
31. В. В. Голомозий, М. В. Карташов, Ю. М. Карташов, *Вплив стрес-фактору на нетто-премію при страхуванні життя вдівця. Доведення*, Теор. ймовір. та матем. статист. **92** (2015), 23–27.
32. Y. Kartashov, V. Golomoziy, and N. Kartashov, *The impact of stress factor on the price of widow's pension*, Modern Problems in Insurance Mathematics (D. Silverstrov and A. Martin-Lof, eds.), E. A. A. Series, Springer, 2014, pp. 223-237.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: mailtower@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Національний університет ім. Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна
Адреса електронної пошти: mailtower@gmail.com