Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 34–49

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 34–49

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ M-ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З ВИПАДКОВИМ ШУМОМ, ЩО МАЄ СИНГУЛЯРНИЙ СПЕКТР

УДК 519.21

О. В. ІВАНОВ І І. В. ОРЛОВСЬКИЙ

Анотація. В роботі отримано достатні умови асимптотичної нормальності M-оцінок векторного параметра нелінійної моделі регресії з неперервним часом та випадковим шумом, що є нелінійно перетвореним гауссівським стаціонарним процесом із сингулярним спектром.

Abstract. Time continuous nonlinear regression model with noise being nonlinearly transformed Gaussian stationary process with singular spectrum is considered in the paper. Sufficient conditions for asymptotic normality of the model vector parameter M-estimator are obtained.

Аннотация. В работе получены достаточные условия асимптотической нормальности M-оценок векторного параметра нелинейной модели регрессии с непрерывным временем и случайным шумом, который является нелинейно преобразованным гауссовским стационарным процессом с сингулярным спектром.

1. Вступ

У роботі отримано достатні умови асимптотичної нормальності M-оцінок невідомого параметра нелінійної моделі регресії з неперервним часом та випадковим шумом, що має сингулярний спектр.

Властивості M-оцінок у моделях лінійної регресії з незалежними похибками спостережень розглянуто в роботах П. Хьюбера [1, 2], Ф. Р. Хемпела та ін. [3] та багатьох авторів після них.

Асимптотичні властивості M-оцінок параметрів лінійних та нелінійних моделей регресії з випадковим шумом, що задовольняє умову сильної залежності, досліджувались в роботах Г. Л. Коула [4, 5], Г. Л. Коула та К. Мукерджи [6], Л. Гірайтіса та інш. [7], Г. Л. Коула та Д. Сургайліса [8, 9, 10], Л. Гірайтіса та Г. Л. Коула [11], Г. Л. Коула та ін. [12] для моделей з дискретним часом, О. В. Іванова та М. М. Леоненко [13, 14], О.В. Іванова [15], О. В. Іванова та І. В. Орловського [16, 17, 18], І. М. Савич [19] для моделей з неперервним часом.

І. В. Орловський [20], О. В. Іванов та І. В. Орловський [17, 18, 21], О. В. Іванов [15] розглядали асимптотичні властивості M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії з неперервним часом та слабко залежним випадковим шумом.

У даній роботі досліджено M-оцінки, які побудовано за допомогою гладких функцій втрат. Останні, як і їхні недиференційовні аналоги, широко використовуються у розв'язанні задач обробки статистичних даних (див., наприклад, [22]).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62J02; Secondary62J99.

Ключові слова і фрази. Асимптотична єдиність оцінки, асимптотична нормальність, M-оцінки, нелінійні моделі регресії, сингулярний спектр.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)”, 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

Зазначимо, що ключовими моментами доведення асимптотичної нормальності є застосування граничної теореми для зваженого нелінійного перетворення гауссівського стаціонарного випадкового процеса із сингулярним спектром з роботи О. В. Іванова та ін. [23] та теореми Брауера про нерухому точку [24, 2]. Для коректного використання цієї теореми потрібна єдиність у деякому асимптотичному сенсі розв'язку системи "нормальних" рівнянь, яка визначає M-оцінку. Для нелінійних моделей регресії питання асимптотичної єдиності M-оцінок розглядалося в роботах О. В. Іванова [15] та І. В. Орловського [18].

2. Асимптотична нормальність M-оцінок

2.1. **Умови та формулювання основного результату.** Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

де $g\colon [0,+\infty) \times \Theta_\beta \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, $\Theta_\beta = \bigcup_{\|a\|\leq 1}(\Theta + \beta a)$, $\beta > 0$ — деяке число, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ — обмежена опукла відкрита множина, $\theta \in \Theta$ — істинне значення параметра.

Далі ми розглядаємо похідні функції регресії у множині Θ^c (Θ^c — замикання Θ), і саме тому нам треба, щоб функція регресії була означена на Θ_β.

Відносно шуму $\varepsilon(t)$ припустимо, що виконані наступні умови.

A1. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є локальним функціоналом від гауссівського стаціонарного процесу $\xi(t)$, тобто $\varepsilon(t) = G(\xi(t))$, де $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — борелева функція, причому $\mathsf{E}\,\varepsilon(0) = 0$, $\mathsf{E}\,\varepsilon^4(0) < \infty$.

A2. $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — неперервний в середньому квадратичному вимірний стаціонарний гауссівський процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією (к.ф.)

$$B(t) = \sum_{j=0}^{r} A_j B_{\alpha_j,\chi_j}(t), \qquad r \geq 0, \tag{2}$$

де

$$B_{\alpha_j,\chi_j}(t) = \frac{\cos(\chi_j t)}{(1+t^2)^{\alpha_j/2}},$$

$0 \leq \chi_0 < \chi_1 < \cdots < \chi_r$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 0,\dots,r$, $\sum_{j=0}^r A_j = 1$, $A_j > 0$.

Таку модель к.ф. було введено у роботі [25] з метою отримання прикладу спектральної щільності (с.щ.), що має хоч і складний, але явний вигляд, а також, можливо, сингулярності розташовані не в нулі, як у випадку сильно залежного процесу. Умова **A2** також використовувалась з тією ж метою в роботах [23, 26].

С.щ. f випадкового процесу ξ має вигляд

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} A_j f_{\alpha_j,\chi_j}(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

де

$$f_{\alpha_j,\chi_j}(\lambda) = \frac{C_1(\alpha_j)}{2}\left[K_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(|\lambda+\chi_j|)|\lambda+\chi_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2}} + K_{\frac{\alpha_j-1}{2}}(|\lambda-\chi_j|)|\lambda-\chi_j|^{\frac{\alpha_j-1}{2}}\right],$$

$$j = 0,\dots,r, \qquad C_1(\alpha) = 2^{\frac{1-\alpha}{2}}/\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{\nu-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(s+\frac{1}{s}\right)z\right\}ds, \qquad z \geq 0,\ \nu \in \mathbb{R},$$

є модифікованою функцією Бесселя 3-го роду порядку ν.

Зауважимо, що $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$, і для $z \downarrow 0$

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu)2^{\nu-1}z^{-\nu}, \qquad \nu > 0.$$

Отже, при $\lambda \to \pm\chi_j$, $j = 0, \dots, r$,

$$f_{\alpha_j,\chi_j}(\lambda) \sim \frac{C_2(\alpha_j)}{2}|\lambda \pm \chi_j|^{\alpha_j-1}\big(1 - h_j(|\lambda \pm \chi_j|)\big),$$

де $C_2(\alpha) = [2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)]^{-1}$,

$$h_j(|\lambda|) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\alpha_j}{2}\right)} \cdot \left|\frac{\lambda}{2}\right|^{1-\alpha_j} + \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_j+1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3+\alpha_j}{2}\right)} \cdot \left|\frac{\lambda}{2}\right|^2 + o\left(|\lambda|^2\right), \qquad \lambda \to 0,\ j = 0, \dots, r.$$

Тому с.щ. f має $2r + 2$ різні точки сингулярності

$$\{-\chi_r, -\chi_{r-1}, \dots, -\chi_1, -\chi_0, \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_r\}$$

за умови **A2**, коли $\chi_0 \neq 0$ та $0 < \alpha_j < 1$, $j = 0, \dots, r$. Якщо $\chi_0 = 0$, тоді f має $2r + 1$ точку сингулярності.

Означення 2.1. M-оцінкою невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями $X(t)$, $t \in [0, T]$, виду (1) та неперервною функцією втрат $\rho(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(X(t), t \in [0, T]) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \qquad Q_T(\tau) = \int_0^T \rho(X(t) - g(t, \tau))\, dt, \quad \tau \in \Theta^c. \tag{3}$$

Зробимо деякі припущення щодо функції регресії $g(t, \tau)$ та функції втрат $\rho(x)$. Нехай $g(t, \tau)$ двічі неперервно диференційовна за $\tau \in \Theta^c$. Позначимо

$$g_i(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i} g(t, \tau), \qquad g_{il}(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_i \partial \tau_l} g(t, \tau), \qquad \tau \in \Theta^c,\ i, l = 1, \dots, q;$$

$$d_T^2(\theta) = \operatorname{diag}\left(d_{iT}^2(\theta)\right)_{i=1}^q, \qquad d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t, \theta)\, dt, \qquad i = 1, \dots, q,$$

$$\liminf_{T \to \infty} T^{-1} d_{iT}^2(\theta) > 0, \qquad i = 1, \dots, q,$$

$$d_{il,T}^2(\theta) = \int_0^T g_{il}^2(t, \theta)\, dt, \qquad i, l = 1, \dots, q.$$

Буквами k (з індексами та хвилями) будемо позначати додатні константи. Припустимо, що для всіх достатньо великих $T (T > T_0)$ виконано наступні умови

B1. Для будь-якого $t \geq 0$ $g(t, \cdot) \in C^2(\Theta^c)$ та

(i) $\displaystyle\sup_{t \in [0,T]} \sup_{\tau \in \Theta^c} \frac{|g_i(t, \tau)|}{d_{iT}(\theta)} \leq k^i T^{-1/2}$;

(ii) $\displaystyle\sup_{t \in [0,T]} \sup_{\tau \in \Theta^c} \frac{|g_{il}(t, \tau)|}{d_{il,T}(\theta)} \leq k^{il} T^{-1/2}$;

(iii) $\displaystyle\sup_{\tau \in \Theta^c} \frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} \leq \tilde{k}^{il} T^{-1/2}$, $i, l = 1, \dots, q$.

C1. Функція $\rho(x)$ є невід'ємною, парною, двічі неперервно диференційовною, $\rho(0) = 0$, та її похідні $\rho'(x) = \psi(x)$ і $\rho''(x) = \psi'(x)$ задовольняють вимогам

(i)$\mathsf{E}\, \psi\big(G(\xi(0))\big) = 0$;

(ii)$\mathsf{E}\, \psi'\big(G(\xi(0))\big) > 0$;

(iii) Для довільних $x, h \in \mathbb{R}$ та деякої константи L

$$|\psi'(x + h) - \psi'(x)| \leq L|h|.$$

За умови **C1(iii)** для кожного x та деякого $\eta = \eta(x) \in (0, 1)$

$$|\psi(x) - \psi(0)| = |\psi'(\eta x)| \cdot |x| \leq (|\psi'(0)| + L|\eta x|)|x| \leq |\psi'(0)| \cdot |x| + Lx^2,$$

звідки

$$|\psi(x)| \leq |\psi(0)| + |\psi'(0)| \cdot |x| + Lx^2.$$

Крім того,

$$|\psi'(x)| \le |\psi'(0)| + L|x|.$$

Таким чином, випадкові процеси $\psi(G(\xi(t)))$ та $\psi'(G(\xi(t)))$, $t \in \mathbb{R}$, за умов **A1, A2, C1** мають скінченні другі моменти.

Нехай функція $K \in L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$, $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$. Тоді її можна розкласти в цьому просторі в ряд Фур'є:

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(K)}{n!} H_n(x), \qquad C_n(K) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)H_n(x)\varphi(x)\,dx, \qquad n \ge 0,$$

за поліномами Чебишова–Ерміта

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad n \ge 0.$$

Означення 2.2. Функція $K \in L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$ має ранг Ерміта m ($\mathrm{Hrank}(K) = m$), якщо або $C_1(K) \ne 0$ і $m = 1$, або для деякого $m \ge 2$,

$$C_1(K) = \cdots = C_{m-1}(K) = 0, \qquad C_m(K) \ne 0.$$

Функції $\psi \circ G$ та $\psi' \circ G$ можна розкласти у ряди Фур'є за поліномами Чебишова–Ерміта в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)\,dx)$

$$\psi(G(x)) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n(\psi \circ G)}{n!} H_n(x),$$

$$\psi'(G(x)) = C_0(\psi' \circ G) + \sum_{n=m'}^{\infty} \frac{C_n(\psi' \circ G)}{n!} H_n(x),$$

де $m = \mathrm{Hrank}(\psi \circ G)$, $m' = \mathrm{Hrank}(\psi' \circ G)$; $C_0(\psi \circ G) = \mathsf{E}\,\psi\big(G(\xi(0))\big) = 0$ за умови **C1**(i).

C2. Або (i) $\mathrm{Hrank}(\psi \circ G) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$, або (ii) $\mathrm{Hrank}(\psi \circ G) = m$, $\alpha m > 1$, де $\alpha = \min_{j=0,\dots,r} \alpha_j$, α_j, $j = 0, \dots, r$ — числа з умови **A2**.

Запишемо

$$J_T(\theta) = (J_{il,T}(\theta))_{i.l=1}^{q},$$

$$J_{il,T}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \int_0^T g_i(t,\theta) g_l(t,\theta)\,dt, \qquad i,l = 1, \dots, q.$$

Позначимо $\lambda_{\min}(A)$ ($\lambda_{\max}(A)$) — найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A.

B2. Для деякого $\lambda_* > 0$ та $T > T_0$ виконується $\lambda_{\min}(J_T(\theta)) \ge \lambda_*$.

Позначимо $\Lambda_T(\theta) = J_T^{-1}(\theta)$.

Введемо матричну міру $\mu_T(dx;\theta)$ на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, де $\mathfrak{B}$ — борелева σ-алгебра на $\mathbb{R}$, з матрицею щільності

$$\Big(\mu_T^{jl}(x;\theta)\Big)_{j,l=1}^{q},$$

$$\mu_T^{jl}(x;\theta) = g_T^j(x,\theta)\overline{g_T^l(x,\theta)} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|g_T^j(x,\theta)\right|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \left|g_T^l(x,\theta)\right|^2 dx \right)^{-1/2},$$

$$g_T^j(x,\theta) = \int_0^T e^{ixt} g_j(t,\theta)\,dt, \qquad j,l = 1, \dots, q.$$

Зауважимо, що $d_{jT}^2(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left|g_T^j(x,\theta)\right|^2 dx$.

B3. Сім'я мір $\mu_T(\cdot;\theta)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до міри $\mu(\cdot;\theta)$ такої, що $\mu(\mathbb{R};\theta)$ є додатно визначеною матрицею.

Означення 2.3 ([28, 27])**.** Матрична міра $\mu(\cdot;\theta) = (\mu^{jl}(\cdot;\theta))_{j.l=1}^{q}$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t,\theta)$.

Зауважимо, що з умов **B2** та **B3** випливає при $T \to \infty$

$$J_T(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \mu_T(dx;\theta) \to \int_{\mathbb{R}} \mu(dx;\theta) = \mu(\mathbb{R};\theta) = J(\theta).$$

Позначимо $\Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta)$.

Введемо поняття μ-припустимості с.щ. $f(\lambda)$ (Детальніше див. [28, 29].)

Означення 2.4. С.щ. f називається μ-припустимою, якщо вона μ-інтегровна, тобто всі елементи матриці $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mu(d\lambda)$ скінченні, і

$$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mu_T(d\lambda) \to \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mu(d\lambda), \qquad T \to \infty.$$

Достатні умови μ-припустимості с.щ. стаціонарного процеса, яким, зокрема, задовольняє с.щ. f процеса ξ з к.ф. (2), можна знайти в роботах [23, 30]. Головна умова полягає в тому, щоб сукупність точок сингулярності f не перетиналась із сукупністю атомів спектральної міри μ, яка є атомною для всіх відомих на сьогодні прикладів її існування.

Нехай $f^{(*1)}(\lambda) = f(\lambda)$ і для $j \geq 2$

$$f^{(*j)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{j-1}} f(\lambda - \lambda_2 - \cdots - \lambda_j) \prod_{i=2}^{j} f(\lambda_i)\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_j$$

є j-та згортка с.щ. $f(\lambda)$ випадкового процесу ξ,

$$\gamma = \big(\mathsf{E}\,\psi'\big(G(\xi(0))\big)\big)^{-1}.$$

A3. $\int_{\mathbb{R}} f^{(*j)}(\lambda)\,\mu(d\lambda)$, $j \geq 1$, — додатно визначені матриці.

Припустимо, що виконано також наступну умову.

D1. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $T_0 = T_0(\varepsilon)$, що для $T > T_0$ система рівнянь $\nabla Q_T(\tau) = 0$ має єдиний розв'язок з імовірністю не менше, ніж $1 - \varepsilon$.

В розділі 3 наведено достатні умови виконання **D1**, які одночасно виконуються з умовами теореми 2.1, якщо припустити, що $d_{iT}(\theta)$, $d_{il,T}(\theta) = O(T^{1/2})$, $i, l = 1, \ldots, q$.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови* **A1-A3, B1-B3, C1, C2, D1** *та с.щ.* f *випадкового процеса* ξ *є* μ*-припустимою. Тоді розподіл випадкового вектора* $\hat{u}_T(\theta) = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$ *при* $T \to \infty$ *збігається до гауссівського розподілу* $N(0, \sigma(\theta))$*, де*

$$\sigma(\theta) = 2\pi\gamma^2\Lambda(\theta) \cdot \left(\sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(*j)}(\lambda)\,\mu(d\lambda,\theta) \right) \cdot \Lambda(\theta). \tag{4}$$

2.2. **Допоміжні твердження.** Розглянемо нормовану M-оцінку

$$\hat{u}_T = \hat{u}_T(\theta) = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta). \tag{5}$$

Зробимо заміну змінних, яка відповідає нормуванню (5), у функції регресії та її похідних, тобто

$$g(t,\tau) = g\left(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u\right) = h(t,u), \qquad g_i(t,\tau) = g_i\left(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u\right) = h_i(t,u),$$
$$g_{il}(t,\tau) = g_{il}\left(t, \theta + d_T^{-1}(\theta)u\right) = h_{il}(t,u), \qquad i,l = 1,\ldots,q.$$

Позначимо також

$$H(t;u_1,u_2) = h(t,u_1) - h(t,u_2), \qquad H_i(t;u_1,u_2) = h_i(t,u_1) - h_i(t,u_2), \quad i = 1,\ldots,q.$$

Введемо вектори

$$M_T(u) = \left(M_T^i(u)\right)_{i=1}^q = \left(\gamma \int_0^T \psi(X(t) - h(t,u)) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\, dt\right)_{i=1}^q$$

та

$$\Psi_T(u) = \left(\Psi_T^i(u)\right)_{i=1}^q = \left(\gamma \int_0^T \psi\big(G(\xi(t))\big) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\, dt + \int_0^T H(t;0,u) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\, dt\right)_{i=1}^q .$$

Вектори $M_T(u)$ та $\Psi_T(u)$ визначені для $u \in U_T^c(\theta)$, $U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta - \theta)$.

Зауважимо, що за нашими припущеннями множини $U_T(\theta)$ розширюються до $\mathbb{R}^q$ при $T \to \infty$. Тоді для довільних $R > 0$ виконується $v(R) = \{u \in \mathbb{R}^q \colon \|u\| < R\} \subset U_T(\theta)$ для $T > T_0(R)$.

Легко зрозуміти статистичний зміст векторів $M_T(u)$ та $\Psi_T(u)$. Розглянемо функціонал $\gamma Q_T(\theta + d_T^{-1}(\theta)u)$. Тоді нормована M-оцінка $\hat{u}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$M_T(u) = 0. \tag{6}$$

Нехай

$$\eta(t) = \gamma\psi\big(G(\xi(t))\big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

та спостереження мають вигляд

$$Y(t) = g(t,\theta) + \eta(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Тоді

$$\Psi_T(u) = 0$$

є системою нормальних рівнянь для знаходження нормованої оцінки найменших квадратів

$$\breve{u}_T = \breve{u}_T(\theta) = d_T(\theta)(\breve{\theta}_T - \theta)$$

невідомого параметра θ віртуальної нелінійної регресійної моделі (7).

Лема 2.1. *Нехай виконуються умови* **A1**, **A2**, **B1** *та* **C1**. *Тоді для довільних $R > 0$, $r > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u \in v^c(\mathbb{R})} \|M_T(u) - \Psi_T(u)\| > r\right\} \to 0, \qquad T \to \infty. \tag{8}$$

Доведення. Для фіксованого i

$$\begin{aligned} M_T^i(u) &- \Psi_T^i(u) \\ &= \gamma \int_0^T \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)} \left[\psi(G(\xi(t)) + H(t;0,u)) - \psi\big(G(\xi(t))\big) - \psi'\big(G(\xi(t))\big) H(t;0,u)\right] dt \\ &\quad + \gamma \int_0^T H(t;0,u) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)} \zeta(t)\, dt = I_1(u) + I_2(u), \\ &\qquad \zeta(t) = \psi'\big(G(\xi(t))\big) - \mathsf{E}\,\psi'\big(G(\xi(t))\big), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Доведемо, що $I_1(u)$ та $I_2(u)$ збігаються до нуля за ймовірністю рівномірно за $u \in v^c(\mathbb{R})$. Нехай $u \in v^c(\mathbb{R})$ фіксоване. Тоді $\mathsf{E}\, I_2(u) = 0$ та

$$\mathsf{E}\, I_2^2(u) = \gamma^2 \int_0^T \int_0^T H(t;0,u) H(s;0,u) \frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)} \frac{h_i(s,u)}{d_{iT}(\theta)} \operatorname{cov}(\zeta(t), \zeta(s))\, dt\, ds. \tag{9}$$

За формулою Тейлора та нерівністю Коші–Буняковського

$$\sup_{t \in [0,T]} |H(t;0,u)| = \sup_{t \in [0,T]} \left|\sum_{i=1}^q \frac{h_i(t,u_t^*)}{d_{iT}(\theta)} u_i\right| \le \|u\| \sup_{t \in [0,T]} \left(\sum_{i=1}^q \left[\frac{h_i(t,u_t^*)}{d_{iT}(\theta)}\right]^2\right)^{1/2},$$

де $\|u_t^*\| \le \|u\|$.

З цієї нерівності завдяки **B1**(i) отримуємо

$$\sup_{t\in[0,T]} |H(t;0,u)| \le T^{-1/2}\|k\|\cdot\|u\|, \tag{10}$$

де $k = (k^1,\dots,k^q)$ — вектор констант з умови **B1**(i).

Застосовуючи нерівність (10) та умову **B1**(i) до інтеграла (9), маємо

$$\mathsf{E}\, I_2^2(u) \le \gamma^2\|k\|^2\left(k^i\right)^2 R^2 T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T \operatorname{cov}(\zeta(t),\zeta(s))\,dt\,ds.$$

Покажемо, що

$$T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T \operatorname{cov}(\zeta(t),\zeta(s))\,dt\,ds \to 0, \qquad T\to\infty. \tag{11}$$

Використовуючи співвідношення (див., наприклад [31], с. 58)

$$\mathsf{E}\, H_l(\xi(t))H_n(\xi(s)) = \delta_l^n l!\, B^n(t-s),$$

де δ_l^n — символ Кронекера, запишемо

$$\operatorname{cov}\big(\psi'\big(G(\xi(t))\big),\psi'\big(G(\xi(s))\big)\big) = \sum_{n=m'}^{\infty}\frac{C_n^2(\psi'\circ G)}{n!}B^n(t-s).$$

Оскільки $|B(t)|\le 1$, $t\in\mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{cov}\left(\psi'\big(G(\xi(t))\big),\psi'\big(G(\xi(s))\big)\right)\right| &\le \sum_{n=m'}^{\infty}\frac{C_n^2(\psi'\circ G)}{n!}|B(t-s)|\\ &\le \mathbf{D}\,\psi'\big(G(\xi(0))\big)\cdot|B(t-s)|,\end{aligned} \tag{12}$$

та

$$T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T \operatorname{cov}(\zeta(t),\zeta(s))\,dt\,ds \le \mathbf{D}\,\psi'\big(G(\xi(0))\big)\cdot T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds.$$

З іншого боку, для $\alpha = \min_{j=0,\dots,r}\alpha_j$

$$T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds \le T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T \frac{dt\,ds}{|t-s|^\alpha} = T^{-\alpha}\int_0^1\!\!\int_0^1\frac{dt'\,ds'}{|t'-s'|^\alpha} = O(T^{-\alpha}), \tag{13}$$

тобто виконується (11). І тому $I_2(u)\xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $T\to\infty$ поточково для $u\in v^c(\mathbb{R})$.

Для $u_1,u_2\in v^c(\mathbb{R})$ запишемо

$$\begin{aligned}I_2(u_1)-I_2(u_2) &= \gamma\int_0^T H(t;0,u_1)\frac{H_i(t;u_1,u_2)}{d_{iT}(\theta)}\zeta(t)\,dt\\ &\quad-\gamma\int_0^T H(t;u_1,u_2)\frac{h_i(t;u_2)}{d_{iT}(\theta)}\zeta(t)\,dt = I_3(u_1,u_2)+I_4(u_1,u_2).\end{aligned}$$

Для довільних $h>0$, $r>0$ розглянемо ймовірність

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_3(u_1,u_2)|>r\right\} &\le r^{-1}\,\mathsf{E}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_3(u_1,u_2)| \\ &\le 2r^{-1}\gamma\,\mathsf{E}\big|\psi'\big(G(\xi(0))\big)\big|T\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}\sup_{t\in[0,T]}|H(t;0,u)| \\ &\quad\times\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\sup_{t\in[0,T]}\frac{|H_i(t;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)};\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\sup_{t\in[0,T]}\frac{|H_i(t;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)} \\ &\quad\le h\sup_{t\in[0,T]}\sum_{l=1}^{q}\left(\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}\frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{il,T}(\theta)}\right)\frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\le\sum_{l=1}^{q}k^{il}\tilde{k}^{il}hT^{-1},\end{aligned}\tag{15}$$

завдяки умовам **B1**(ii), (iii).

Застосуємо (10) та (15) до (14), і в результаті отримаємо

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_3(u_1,u_2)|>r\right\}\le k_1r^{-1}T^{-1/2}h,\tag{16}$$

$k_1=2\gamma\,\mathsf{E}\big|\psi'\big(G(\xi(0))\big)\big|R\|k\|\big(\sum_{i,l=1}^{q}k^{il}\tilde{k}^{il}\big)$.

Аналогічним чином, з урахуванням **B1**(i),

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_4(u_1,u_2)|>r\right\}&\le r^{-1}\,\mathsf{E}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_4(u_1,u_2)| \\ \le 2r^{-1}\gamma\,\mathsf{E}\big|\psi'\big(G(\xi(0))\big)\big|T&\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}\sup_{t\in[0,T]}\frac{|h_i(t,u)|}{d_{iT}(\theta)}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\sup_{t\in[0,T]}|H(t;u_1,u_2)| \\ \le k_2r^{-1}h,&\end{aligned}\tag{17}$$

$k_2=2\gamma\,\mathsf{E}\big|\psi'\big(G(\xi(0))\big)\big|k^i\|k\|$.

З (16) та (17) випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_2(u_1)-I_2(u_2)|>r\right\}\le 2r^{-1}h\left(k_1T^{-1/2}+k_2\right)\le k_3r^{-1}h.\tag{18}$$

Позначимо N_h скінченну h-сітку кулі $v^c(\mathbb{R})$. Тоді

$$\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}|I_2(u)|\le\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_2(u_1)-I_2(u_2)|+\max_{u\in N_h}|I_2(u)|.\tag{19}$$

З (18) та (19) для будь-якого $r>0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}|I_2(u)|>r\right\}\le 2k_3r^{-1}h+\mathsf{P}\left\{\max_{u\in N_h}|I_2(u)|>r/2\right\}.$$

Для $\varepsilon>0$ задамо $h=\varepsilon r/(4k_3)$. Тоді для $T>T_0$, завдяки поточковій збіжності $I_2(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{u\in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_3}}}|I_2(u)|>\frac{r}{2}\right\}\le\frac{\varepsilon}{2},$$

і таким чином,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{u\in v^c(\mathbb{R})}|I_2(u)|>r\right\}\le\varepsilon.$$

З іншого боку, при фіксованих $t \in [0, T]$, $u \in v^c(R)$ м.н. існує таке $\delta \in (0, 1)$, що

$$\begin{aligned}
&\bigl|\psi(G(\xi(t)) + H(t; 0, u)) - \psi\bigl(G(\xi(t))\bigr) - \psi'\bigl(G(\xi(t))\bigr) H(t; 0, u)\bigr| \\
&\quad = \bigl|\psi'(G(\xi(t)) + \delta H(t; 0, u)) - \psi'\bigl(G(\xi(t))\bigr)\bigr| \cdot |H(t; 0, u)| \\
&\quad \le L \cdot |H(t; 0, u)|^2 \le L\|k\|^2 R^2 T^{-1}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Завдяки **B1**(i) і (20),

$$\sup_{u \in v^c(\mathbb{R})} |I_1(u)| \le L\gamma k^i \|k\|^2 R^2 T^{-1/2} \quad \text{м.н.},$$

і лему 2.1 доведено. □

Введемо випадковий вектор

$$L_T(u) = (L_T^i(u))_{i=1}^q = \left(\int_0^T \left(\eta(t) - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t, \theta)}{d_{lT}(\theta)} u_l\right) \cdot \frac{g_i(t, \theta)}{d_{iT}(\theta)}\, dt\right)_{i=1}^q, \tag{21}$$

що відповідає віртуальній лінійній моделі регресії

$$Z(t) = \sum_{i=1}^q g_i(t, \theta)\beta_i + \eta(t), \qquad t \in [0, T].$$

Система нормальних рівнянь

$$L_T(u) = 0 \tag{22}$$

задає нормовану лінійну оцінку найменших квадратів $\tilde\beta_T$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$, а саме, оцінку

$$\tilde u_T = \tilde u_T(\theta) = d_T(\theta)(\tilde\beta_T - \beta). \tag{23}$$

Лема 2.2. *В умовах леми 2.1 для довільних $R > 0$, $r > 0$*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u \in v^c(\mathbb{R})} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r\right\} \to 0, \qquad T \to \infty. \tag{24}$$

Доведення. Очевидно,

$$\begin{aligned}
\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) &= \int_0^T \eta(t) \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta)}\, dt + \int_0^T H(t; 0, u) \frac{h_i(t, u)}{d_{iT}(\theta)}\, dt \\
&\quad - \int_0^T \eta(t) \frac{h_i(t, 0)}{d_{iT}(\theta)}\, dt + \int_0^T \frac{h_i(t, 0)}{d_{iT}(\theta)} \sum_{l=1}^q \frac{h_l(t, 0)}{d_{lT}(\theta)} u_l\, dt \\
&= \int_0^T \eta(t) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta)}\, dt + \int_0^T H(t; 0, u) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta)}\, dt \\
&\quad + \int_0^T \frac{h_i(t, 0)}{d_{iT}(\theta)} \left[H(t; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{h_l(t, 0)}{d_{lT}(\theta)} u_l\right] dt \\
&= I_5(u) + I_6(u) + I_7(u).
\end{aligned}$$

Для фіксованого $u \in v^c(\mathbb{R})$ за допомогою нерівності (15) отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, I_5^2(u) &= \int_0^T\!\!\int_0^T \operatorname{cov}(\eta(t), \eta(s)) \frac{H_i(t; u, 0)}{d_{iT}(\theta)} \frac{H_i(s; u, 0)}{d_{iT}(\theta)}\, dt\, ds \\
&\le \left(\sum_{l=1}^q k^{il} \tilde k^{il}\right)^2 R^2 \cdot T^{-2} \int_0^T\!\!\int_0^T |\operatorname{cov}(\eta(t), \eta(s))|\, dt\, ds.
\end{aligned}$$

Покажемо, що

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T \operatorname{cov}(\eta(t),\eta(s))\,dt\,ds\to 0,\qquad T\to\infty. \tag{25}$$

Аналогічно до (12)

$$\left|\operatorname{cov}\bigl(\psi\bigl(G(\xi(t))\bigr),\psi\bigl(G(\xi(s))\bigr)\bigr)\right|\le \mathsf{E}\,\psi^2\bigl(G(\xi(0))\bigr)|B(t-s)|. \tag{26}$$

Використовуючи (13) та (26), маємо

$$\begin{aligned}T^{-2}&\int_0^T\int_0^T|\operatorname{cov}(\eta(t),\eta(s))|\,dt\,ds\\&\le\gamma^2\,\mathsf{E}\,\psi^2\bigl(G(\xi(0))\bigr)\cdot T^{-2}\int_0^T\int_0^T|B(t-s)|\,dt\,ds=O(T^{-\alpha}),\end{aligned}$$

і (25) виконується, тобто $I_5(u)\xrightarrow{\mathsf{P}}0$ при $T\to\infty$ поточково для $u\in v^c(\mathbb{R})$.

З іншого боку, завдяки (15),

$$\mathsf{E}\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_5(u_1)-I_5(u_2)|\le|\gamma|\mathsf{E}\left|\psi\bigl(G(\xi(0))\bigr)\right|\left(\sum_{l=1}^q k^{il}\tilde{k}^{il}\right)h,$$

і аналогічно до $I_2(u)$ у доведенні леми 2.1 можна показати рівномірну за $u\in v^c(\mathbb{R})$ збіжність $I_5(u)$ до нуля за ймовірністю.

Беручи до уваги нерівності (10) та (15), отримуємо

$$\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}|I_6(u)|\le\|k\|\left(\sum_{l=1}^q k^{il}\tilde{k}^{il}\right)R^2T^{-1/2}\to 0,\qquad T\to\infty.$$

Зауважимо, що $I_7(u)$ можна записати у вигляді

$$I_7(u)=-\frac12\sum_{j,l=1}^q\left(\int_0^T\frac{h_{jl}(t,u_T^*)}{d_{jT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\frac{h_i(t,0)}{d_{iT}(\theta)}\,dt\right)u_ju_l$$

для деякого $u_T^*\in v(R)$. Тоді за **B1**

$$|I_7(u)|\le\frac{k^i}{2}\sum_{j,l=1}^q\Bigl(k^{jl}\tilde{k}^{jl}|u_j|\cdot|u_l|\Bigr)T^{-1/2}\le\frac{qk^i}{2}\max_{j,l=1,\dots,q}\Bigl[k^{jl}\tilde{k}^{jl}\Bigr]\|u\|^2T^{-1/2},$$

і $\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}|I_7(u)|\to 0$, $T\to\infty$. Лему 2.2 доведено. □

З (8) та (24) випливає

Наслідок 2.1. *В умовах леми 2.1 для довільних $R>0$, $r>0$*

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u\in v^c(\mathbb{R})}\|M_T(u)-L_T(u)\|>r\right\}\to 0,\qquad T\to\infty.$$

При виконанні умови **B2** із (21) та (22) знаходимо (див. (23))

$$\tilde{u}_T=\Lambda_T(\theta)d_T^{-1}(\theta)\int_0^T\eta(t)\nabla g(t,\theta)\,dt. \tag{27}$$

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність зваженого інтеграла від нелінійного перетворення гауссівського стаціонарного випадкового процесу з сингулярним спектром [23].

Теорема 2.2. *Нехай виконано умови* **A1**, **A2**, **B1(i)**, **B2**, **B3** *та одна з наступних умов для функції $K\in L_2(\mathbb{R},\varphi(x)\,dx)$:*

(i) $\operatorname{Hrank}(K)=1$ *та с.щ. f випадкового процеса ξ є μ-припустимою;*

(ii) $\mathrm{Hrank}(K) = m$, *та* $\alpha m > 1$, *де* $\alpha = \min\limits_{j=0,\dots,r} \alpha_j$.

Тоді випадковий вектор

$$\zeta_T = d_T^{-1}(\theta) \int_0^T K(\xi(t)) \nabla g(t,\theta)\, dt$$

асимптотично при $T \to \infty$ *нормальний* $N(0, \bar{\sigma})$, *де*

$$\bar{\sigma} = 2\pi \sum_{j=m}^{\infty} \frac{C_j^2(K)}{j!} \int_{\mathbb{R}} f^{(*j)}(\lambda)\, \mu(d\lambda, \theta).$$

Сформулюємо теоремою Брауера про нерухому точку (див., наприклад, [24]).

Теорема 2.3. *Нехай* $F\colon v^c(R) \to v^c(R)$*– неперервне відображення. Тоді існує* $x_0 \in v^c(R)$ *таке, що* $F(x_0) = x_0$.

Для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ — σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$ нехай

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^q \colon \inf_{y \in A} \|x - y\| < \varepsilon \right\}, \qquad A_{-\varepsilon} = \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A)_\varepsilon.$$

Наступну теорему доведено в §3 книги [32].

Теорема 2.4. *Нехай* ν *— невід'ємна диференційовна функція на* $[0, +\infty)$ *така, що*

$$b = \int_0^\infty |\nu'(\lambda)| \lambda^{q-1}\, d\lambda < +\infty, \qquad \lim_{\lambda \to \infty} \nu(\lambda) = 0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ *та для довільних* $\varepsilon, \delta > 0$ *має місце нерівність*

$$\int_{C_\varepsilon \setminus C_{-\delta}} \nu(\|\lambda\|)\, d\lambda \le b \left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \right) (\varepsilon + \delta).$$

2.3. **Доведення теореми 2.1.** Треба довести, що функція розподілу $F_T(y, \theta)$ випадкового вектора $\hat{u}_T(\theta) = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$ збігається поточково при $T \to \infty$ до гаусівської функції розподілу $\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)$.

Покажемо, що для довільного $r > 0$

$$\Delta_T(r) = \mathsf{P}\{\|\hat{u}_T - \tilde{u}_T\| > r\} \to 0, \qquad T \to \infty. \tag{28}$$

Розлянемо подію $A_T = \{\|\tilde{u}_T\| \in v^c(R - r)\}$, де R таке, що для $T > T_0$, завдяки асимптотичній нормальності $\tilde{u}_T$, виконується $\mathsf{P}(\bar{A}_T) \le \varepsilon/3$, $\varepsilon > 0$ — фіксоване як завгодно мале число.

Введемо також подію $B_T = \{\sup_{u \in v^c(\mathbb{R})} \|\Lambda_T(\theta)(M_T(u) - L_T(u))\| \le r\}$. З умови **B2** та наслідку 2.1 випливає, що для $T > T_0$

$$\mathsf{P}(\bar{B}_T) \le \mathsf{P}\left\{ \sup_{u \in v^c(\mathbb{R})} \|M_T(u) - L_T(u)\| > \lambda_* r \right\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Беручи до уваги умову **D1**, розглянемо також подію C_T, яка полягає в тому, що M-оцінка $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (6), причому, для $T > T_0$ $\mathsf{P}(\bar{C}_T) \le \varepsilon/3$. Отже, для $T > T_0$

$$\mathsf{P}(A_T \cap B_T \cap C_T) \ge 1 - \varepsilon. \tag{29}$$

З формул (21) та (27) отримуємо $\Lambda_T(\theta) L_T(u) = \tilde{u}_T - u$. Якщо подія $A_T \cap B_T \cap C_T$ сталася, то для $u \in v^c(\mathbb{R})$

$$\|u + \Lambda_T(\theta) M_T(\theta)\| \le \|\tilde{u}_T\| + \|\Lambda_T(\theta)(M_T(u) - L_T(u))\| \le (R - r) + r = R,$$

тобто $F_T(u) = u + \Lambda_T(\theta) M_T(u)$ — неперервне відображення $v^c(R)$ в $v^c(R)$.

Застосуємо теорему Брауера про нерухому точку (теорема 2.3) до $F_T(u)$. Отримуємо, що існує точка $u_T^0 \in v^c(\mathbb{R})$ така, що $F(u_T^0) = u_T^0$, або, завдяки тому, що $\Lambda_T(\theta)$ — невироджена, $M_T(u_T^0) = 0$. Завдяки виконанню події C_T, єдиним розв'язком системи рівнянь (6) в кулі $v^c(R)$ є нормована M-оцінка $\hat{u}_T$.

Таким чином, $A_T \cap B_T \cap C_T \subset \{\hat{u}_T \in v^c(\mathbb{R})\}$ і $\mathsf{P}\{\hat{u}_T \in v^c(\mathbb{R})\} \geq 1 - \varepsilon$.

Зауважимо, що з (29) для $T > T_0$ випливає нерівність

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \mathsf{P}\left\{\{\hat{u}_T \in v^c(R)\} \cap B_T\right\} \\ &\leq \mathsf{P}\{\|\Lambda_T(\theta)(M_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))\| \leq r\} = \mathsf{P}\{\|\tilde{u}_T - \hat{u}_T\| \leq r\}, \end{aligned} \tag{30}$$

тобто (28) виконує ться.

Позначимо $\Pi(-\infty; y \pm \vec{\varepsilon}) = (-\infty; y_1 \pm \varepsilon) \times \cdots \times (-\infty; y_q \pm \varepsilon), \varepsilon \geq 0$. Беручи до уваги (28), отримуємо для функції розподілу $F_T(y,\theta) = \mathsf{P}\{\hat{u}_T \in \Pi(-\infty, y)\}$ для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(-\infty; y - \vec{\varepsilon})\} - \Delta_T(\varepsilon) \leq F_T(y,\theta) \leq \mathsf{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\} + \Delta_T(\varepsilon). \tag{31}$$

З теореми 2.2 випливає, що випадковий вектор $\tilde{u}_T$ є асимптотично при $T \to \infty$ нормальним $N(0, \sigma(\theta))$, де $\sigma(\theta)$ визначена (4). Таким чином,

$$\left|\mathsf{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(-\infty; y + \vec{\varepsilon})\} - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y \pm \vec{\varepsilon})\right| \to 0, \qquad T \to \infty. \tag{32}$$

Нехай $\varphi(y,\theta)$ — гауссівська щільність, що відповідає $\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)$.

Оскільки $\lambda_{\min}(\sigma(\theta)) = \underline{\lambda} > 0$, $\lambda_{\max}(\sigma(\theta)) = \overline{\lambda} < +\infty$, то

$$\varphi(y,\theta) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \exp\{-\|y\|^2/2\overline{\lambda}\} = \nu(\|y\|).$$

Якщо $A = \Pi(-\infty, y)$, то $A_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y - \vec{\varepsilon}]$, $(\Pi(-\infty, y + \vec{\varepsilon}])_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y] = A^c$.

Застосуємо теорему 2.4 до $\nu(\|y\|)$. Тоді для будь-якого $\omega \neq 0$

$$\left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y + \vec{\omega})\right| = \int_\Pi \varphi(y,\theta)\, dy \leq b\left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(\frac{q}{2})}\right) \cdot |\omega|,$$

де

$$\Pi = \begin{cases} \Pi(-\infty, y + \overrightarrow{\omega}) \setminus A^c, & \text{якщо } \omega > 0, \\ A \setminus A_\omega, & \text{якщо } \omega < 0. \end{cases}$$

Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} F_T(y,\theta) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) \leq \Delta_T(\varepsilon) &+ \left|\mathsf{P}\{\widetilde{u}_T \in \Pi(-\infty, y + \overrightarrow{\varepsilon})\} - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y + \overrightarrow{\varepsilon})\right| \\ &+ \left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y + \overrightarrow{\varepsilon}) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)\right|; \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - F_T(y,\theta) \leq \Delta_T(\varepsilon) &+ \left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y - \overrightarrow{\varepsilon}) - \mathsf{P}\{\widetilde{u}_T \in \Pi(-\infty, y - \overrightarrow{\varepsilon})\}\right| \\ &+ \left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y - \overrightarrow{\varepsilon})\right|. \end{aligned} \tag{34}$$

Зі співвідношень (28)–(34) отримуємо, що $|F_T(y,\theta) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)| \to 0$ при $T \to \infty$, і теорему 2.1 доведено.

3. Асимптотична єдиність M-оцінок

Знайдемо достатні умови виконання умови **D1**, тобто асимптотичної єдиності за ймовірністю M-оцінок параметрів моделі (1). Якщо функція регресії та функція втрат диференційовні, то M-оцінка $\hat{\theta}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\nabla Q_T(\tau) = 0. \tag{35}$$

Деякі подальші умови є модифікаціями припущень, зроблених у підрозділі 2.1.

Запишемо

$$\widetilde{J}_T(\theta) = (\widetilde{J}_{il,T}(\theta))_{i.l=1}^q,$$
$$\widetilde{J}_{il,T}(\theta) = T^{-1}\int_0^T g_i(t,\theta)g_l(t,\theta)\,dt, \qquad i,l = 1,\dots,q.$$

B2′. Для деякого $\widetilde{\lambda}_* > 0$ та $T > T_0$ виконується $\lambda_{\min}(\widetilde{J}_T(\theta)) \geq \widetilde{\lambda}_*$.

B4.(i)$\sup_{t\geq 0} \sup\limits_{\tau\in\Theta^c} |g_i(t,\tau)| \leq k(i) < \infty$;

(ii) $\sup_{t\geq 0} \sup\limits_{\tau\in\Theta^c} |g_{il}(t,\tau)| \leq k(i,l) < \infty$;

(iii) $T^{-1}\Phi_T^{il}(\tau_1,\tau_2) = T^{-1}\int_0^T (g_{il}(t,\tau_1) - g_{il}(t,\tau_2))^2\,dt \leq k_{il}\|\tau_1-\tau_2\|^2$, $T > T_0$, $i,l = 1,\dots,q$, $\tau_1,\tau_2 \in \Theta^c$.

Припустимо також, що

C3. $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi(x)| = k_\psi < \infty$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi'(x)| = k_{\psi'} < \infty$.

Відносно M-оцінки припустимо, що

D2. $\hat{\theta}_T$ є слабко консистентною оцінкою θ, тобто для довільного $r > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\|\hat{\theta}_T - \theta\| \geq r\right\} \to 0, \qquad T\to\infty.$$

Достатні умови консистентності M-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії містяться у роботах [17, 15, 21, 19].

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови* **A1***,* **A2***,* **B2′***,* **B4***,* **C1***,* **C3** *та* **D2***. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $T_0 = T_0(\varepsilon)$, що для $T > T_0$ система рівнянь* (35) *має единий розв'язок з імовірністю не менше, ніж $1-\varepsilon$.*

Доведення. Позначимо

$$H(t;\tau,\theta) = g(t,\tau) - g(t,\theta), \qquad H_i(t;\tau,\theta) = g_i(t,\tau) - g_i(t,\theta),$$
$$H_{il}(t;\tau,\theta) = g_{il}(t,\tau) - g_{il}(t,\theta), \qquad i,l = 1,\dots q,$$
$$G_T(\tau) = (G_T^{il}(\tau))_{i,l=1}^q = \left(\gamma\frac{\partial^2}{\partial\tau_i\partial\tau_l}Q_T(\tau)\right)_{i,l=1}^q.$$

Для доведення теореми необхідно показати, що матриця Гессе $G_T(\tau)$ функціонала $\gamma Q_T(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі істинного значення параметра θ з імовірністю, що прямує до одиниці при $T\to\infty$.

Для довільних $i,l = 1,\dots,q$

$$\begin{aligned} G_T^{il}(\tau) &= \gamma T^{-1}\int_0^T \psi'(X(t) - g(t,\tau))g_i(t,\tau)g_l(t,\tau)\,dt \\ &\quad - \gamma T^{-1}\int_0^T \psi(X(t)-g(t,\tau))g_{il}(t,\tau)\,dt \\ &= G_1^{il}(\tau) + G_2^{il}(\tau). \end{aligned} \tag{36}$$

Розглянемо другий доданок у (36)

$$\begin{aligned} G_2^{il}(\tau) &= -\gamma T^{-1}\int_0^T \left[\psi(G(\xi(t)) - H(t;\tau,\theta)) - \psi\big(G(\xi(t))\big)\right] g_{il}(t,\tau)\,dt \\ &\quad - \gamma T^{-1}\int_0^T \psi\big(G(\xi(t))\big)H_{il}(t;\tau,\theta)\,dt - \gamma T^{-1}\int_0^T \psi\big(G(\xi(t))\big)g_{il}(t,\theta)\,dt \\ &= G_3^{il}(\tau) + G_4^{il}(\tau) + G_5^{il}. \end{aligned}$$

Завдяки умові **B4(i)**,

$$|H(t;\tau,\theta)| = \left|\sum_{i=1}^{q} g_i(t,\tau_t^*)(\tau_i-\theta_i)\right| \le \|\overline{k}\|\cdot\|\tau-\theta\|, \tag{37}$$

де $\tau_t^* = \theta+\eta(\tau-\theta)$, $\eta=\eta_t\in(0,1)$, $\overline{k}=(k(1),\dots,k(q))$. Крім того, для деякого $\delta_t\in(0,1)$

$$\psi(G(\xi(t))-H(t;\tau,\theta)) - \psi\big(G(\xi(t))\big) = \psi'(G(\xi(t))-\delta_t H(t;\tau,\theta))H(t;\tau,\theta). \tag{38}$$

Тоді із врахуванням умов **C3**, **B4**(ii) і формул (37), (38), отримуємо

$$|G_3^{il}(\tau)| \le k_{\psi'}k(i,l)\gamma\|\overline{k}\|\cdot\|\tau-\theta\|. \tag{39}$$

За умови **B4**(iii)

$$|G_4^{il}(\tau)| \le \gamma\left(T^{-1}\int_0^T \psi^2\big(G(\xi(t))\big)\,dt\right)^{1/2}\cdot\big(T^{-1}\Phi_T^{il}(\tau,\theta)\big)^{1/2} \le \gamma k_\psi k_{il}^{1/2}\|\tau-\theta\|. \tag{40}$$

З (13) та (26) випливає, що

$$\mathsf{E}\left(G_5^{il}\right)^2 \le \gamma^2k^2(i,l)\,\mathsf{E}\,\psi^2\big(G(\xi(0))\big)\cdot T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds = O(T^{-\alpha}),$$

а тому

$$\left|G_5^{il}\right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T\to\infty. \tag{41}$$

Нерівності (39)–(41) показують, що

$$\left|G_2^{il}(\tau)\right| \le \gamma(k_{\psi'}k(i,l)\|\overline{k}\| + k_\psi k^{1/2}(i,l))\|\tau-\theta\| + \left|G_5^{il}\right| = K_{il}^{(2)}\|\tau-\theta\| + \left|G_5^{il}\right|. \tag{42}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} G_1^{il}(\tau) &= \gamma T^{-1}\int_0^T \left[\psi'(G(\xi(t))-H(t;\tau,\theta)) - \psi'\big(G(\xi(t))\big)\right] g_i(t,\tau)g_l(t,\tau)\,dt \\ &\quad + \gamma T^{-1}\int_0^T \psi'\big(G(\xi(t))\big)\cdot\left[g_i(t,\tau)H_l(t;\tau,\theta)+g_l(t,\theta)H_i(t;\tau,\theta)\right]\,dt \\ &\quad + \gamma T^{-1}\int_0^T \left[\psi'\big(G(\xi(t))\big) - \mathsf{E}\,\psi'\big(G(\xi(t))\big)\right] g_i(t,\theta)g_l(t,\theta)\,dt + \widetilde{J}_T^{il}(\theta) \\ &= G_6^{il}(\tau)+G_7^{il}(\tau)+G_8^{il}+\widetilde{J}_T^{il}(\theta). \end{aligned}$$

За умови **C1**(iii) та (37)

$$|G_6^{il}(\tau)| \le Lk(i)k(l)\gamma\|\overline{k}\|\|\tau-\theta\|. \tag{43}$$

Крім того, аналогічно (40)

$$|G_7^{il}(\tau)| \le \gamma k_{\psi'}(k(i)\|\overline{k}_l\| + k(l)\|\overline{k}_i\|\cdot\|\tau-\theta\|, \tag{44}$$

де $\overline{k}_i=(k(i,1),\dots,k(i,q))$, $i=1,\dots,q$.

Нарешті, за (12)

$$\mathsf{E}\left(G_8^{il}\right)^2 \le \gamma^2k^2(i)k^2(l)D\psi'\big(G(\xi(0))\big)\cdot T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds = O(T^{-\alpha}), \tag{45}$$

звідки випливає, що

$$|G_8^{il}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T\to\infty. \tag{46}$$

З співвідношень (43)–(46) знаходимо

$$\begin{aligned} |G_1^{il}(\tau)-J_T^{il}(\theta)| &\le \gamma\left(Lk(i)k(l)\|\overline{k}\| + k_{\psi'}\left(k(i)\|\overline{k}_l\|+k(l)\|\overline{k}_i\|\right)\right)\|\tau-\theta\| + \left|G_8^{il}\right| \\ &= K_{il}^{(1)}\|\tau-\theta\| + \left|G_8^{il}\right|. \end{aligned} \tag{47}$$

Спираючись на властивість власних чисел суми двох симетричних матриць (див. [33, с. 101–103]), записуємо

$$\begin{aligned} \left|\lambda_{\min}(G(\tau)) - \lambda_{\min}(\widetilde{J}_T(\theta))\right| &\le q \max_{1\le i,l\le q} \left|G_T^{il}(\tau) - \widetilde{J}_T^{il}(\theta)\right| \\ &\le q\left(\max_{1\le i,l\le q}\left|G_1^{il}(\tau) - \widetilde{J}_T^{il}(\theta)\right| + \max_{1\le i,l\le q}\left|G_2^{il}(\tau)\right|\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Нехай $r = \widetilde{\lambda}_*/4q$, де $\widetilde{\lambda}_*$ — число з умови **B2′**. Якщо відбувається подія

$$\Omega_r = \left\{\max_{1\le i,l\le q}\left(\left|G_5^{il}\right| + \left|G_8^{il}\right|\right) < r; \|\hat{\theta}_T - \theta\| \le \frac{r}{R}\right\},$$

де $R = \max_{1\le i,l\le q}\bigl(K_{il}^{(1)} + K_{il}^{(2)}\bigr)$, $K_{il}^{(1)}$ та $K_{il}^{(2)}$ константи з формул (47) та (42), відповідно, то з (48) випливає, що

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\Omega_r) &\le \mathsf{P}\{|\lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_T)) - \lambda_{\min}(\widetilde{J}_T(\theta))| \le 2qr\} \\ &\le \mathsf{P}\left\{\lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_T)) - \lambda_{\min}(\widetilde{J}_T(\theta)) \ge -\frac{\lambda_*}{2}\right\} \le \mathsf{P}\left\{\lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_T)) \ge \frac{\lambda_*}{2}\right\} \end{aligned}$$

для $T > T_0$ згідно з умовою **B2′**. Для довільного $\varepsilon > 0$ та $T > T_0$ за (42), (47) та умови **D2** виконується $\mathsf{P}(\overline{\Omega}_r) < \varepsilon$. Таким чином, для $T > T_0$, $\mathsf{P}(\Omega_r) \ge 1 - \varepsilon$. Це означає, що $\hat{\theta}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (35), з імовірністю не менше, ніж $(1-\varepsilon)$, оскільки матриця Гессе $G_T(\tau)$ функціонала $\gamma Q_T(\tau)$ є додатно визначеною в деякому околі точки θ з імовірністю, що прямує до одиниці при $T \to \infty$. $\square$

Література

1. P. J. Huber, *Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo*, Ann. Statist. **1** (1973), no. 5, 799–821.
2. П. Хьюбер, *Робастность в статистике*, “Мир”, Москва, 1984.
3. F. R. Hampel, E. M. Ronchetti, P. J. Rousseeuw, and W. A. Stahel, *Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions*, Wiley, New York, 1986.
4. H. L. Koul, *M-estimators in linear models with long range dependent errors*, Statistics and Probability Letters **14** (1992), 153–164.
5. H. L. Koul, *Asymptotics of M-estimations in non-linear regression with long-range dependence errors*, Proc. Athens Conf. Appl. Probabl. and Time Ser. Analysis (P. M. Robinson and M. Rosenblatt, eds.), Springer Verlag Lecture Notes in Statistics vol. II, 1996, pp. 272–291.
6. H. L. Koul and K. Mukherjee, *Regression quantiles and related processes under long range dependent errors*, J. Multiv. Anal. **51** (1994), 318–337.
7. L. Giraitis, H. L. Koul, and D. Surgailis, *Asymptotic normality of regression estimators with long memory errors*, Statistics and Probability Letters **29** (1996), 317–335.
8. H. L. Koul and D. Surgailis, *Asymptotic expansion of M-estimators with long memory errors*, Ann. Statist. **25** (1997), 818–850.
9. H. L. Koul and D. Surgailis, *Second order behavior of M-estimators in linear regression with long-memory errors*, J. Statist. Planning and Inference **91** (2000), 399–412.
10. H. L. Koul and D. Surgailisб *Robust estimators in regression models with long memory errors*, Theory and Application of Long-Range Dependence (P. Doukhan, G. Oppenheimб and M. S. Taqqu, edsю), Birkhäuser, Boston, 2003, pp. 339–353.
11. L. Giraitis and H. L. Koul, *Estimation of the dependence parameter in linear regression with long-range dependent errors*, Statistics and Probability Letters **29** (1996), 317–335.
12. R. T. Baillie, H. L. Koul, and D. Surgailis, *Regression model fitting with a long memory covariance process*, Economic Theory **20** (2004), 485–512.
13. A. V. Ivanov and N. N. Leonenko, *Asymptotic behavior of M-estimators in continuous-time non-linear regression with long-range dependent errors*, Random Oper. and Stoch. Equ. **10** (2002), no. 3, 201–222.
14. A. V. Ivanov and N. N. Leonenko, *Robust estimators in nonlinear regression models with long-range dependence*, Optimal Design and Related Areas in Optimization and Statistics (L. Pronzato and A. Zhigljavsky, eds.), Springer, Berlin, 2009, pp. 193–221.

15. A. V. Ivanov, *Asymptotic properties of L_p-estimators*, Theory of Stochastic Processes **14(30)** (2008), no. 1, 60–68.
16. A. V. Ivanov and I. V. Orlovsky, *L_p-estimates in nonlinear regression with long-range dependence*, Theory of Stochastic Processes **7(23)** (2002), no. 3–4, 38–49.
17. О. В. Іванов, І. В. Орловський, *Консистентність M-оцінок у нелінійних моделях регресії з неперервним часом*, Наукові вісті НТУУ "КПІ" **4(42)** (2005), 140–147.
18. О. В. Іванов, І. В. Орловський, *Про единість M–оцінок параметрів нелінійних моделей регресії*, Наукові вісті НТУУ "КПІ' **4(66)** (2009), 135–141.
19. І. М. Савич, *Консистентність квантильних оцінок у моделях регресії з сильно залежним шумом*, Теор. ймовір. та матем. статист. **82** (2010), 128–136.
20. I. V. Orlovsky, *M-estimates in nonlinear regression with weak dependence*, Theory of Stochastic Processes **9(25)** (2003), no. 1–2, 108–122.
21. A. V. Ivanov and I. V. Orlovsky, *Consistency of M-estimates in general nonlinear model*, Theory of Stochastic Processes **13(29)** (2007), no. 1–2, 86–97.
22. І. В. Орловський, *Асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійних моделей регресії*, Дис. ... кандидата физ.-мат. наук, Київський Національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2007.
23. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz–Medina, I. N. Savych, *Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian processes with singular spectra*, Ann. Probab **41** (2013), no. 2, 1088–1114.
24. Ю. В. Гончаренко, С. И. Ляшкоб *Теорема Брауэра*, "КИЙ", Киев, 2000.
25. V. V. Anh, V. P. Knopova, and N. N. Leonenko, *Continuous-time stochastic processes with cyclical long-range dependence*, Aust. NZ J. Stat. **46** (2004), 275–296.
26. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky, *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, **49** (2015), no. 1, 156–186.
27. U. Grenander, *On the Estimation of Regression Coefficients in the Case of an Autocorrelated Disturbance*, Ann. Statist **25** (1954), no. 2, 252–272.
28. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские случайные процессы*, "Наука", Москва, 1970.
29. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, "Наука", Москва, 1977.
30. О. В. Іванов, І. М. Савич, *μ-припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму в нелінійних моделях регресії*, Наукові вісті НТУУ "КПІ" **1** (2009), 143–148.
31. Н. Н. Леоненко, А. В. Иванов, *Статистический анализ случайных полей*, "Вища Школа", Киев, 1986.
32. Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао, *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*, "Наука", Москва, 1982.
33. J. H. Wilkinson, *The algebraic eigen value problem*, Clarendon Press, Oxford, 1962.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", проспект Перемоги, 37, Київ-56, 03056, Україна

Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", проспект Перемоги, 37, Київ-56, 03056, Україна

Адреса електронної пошти: i.v.orlovsky@gmail.com

Надійшла 05/08/2015