Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 50–66

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 50–66

# АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ ІБРАГІМОВА ПАРАМЕТРА СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

УДК 519.21

О. В. ІВАНОВ І В. В. ПРИХОДЬКО

Анотація. Розглядається нелінійна модель регресії з неперервним часом. Отримано властивості консистентності та асимптотичної нормальності оцінки Ібрагімова параметра спектральної щільності гауссівського стаціонарного шуму.

Abstract. A nonlinear regression model with continuous time is considered. Consistency and asymptotic normality of Ibragimov estimator of the spectral density parameter of Gaussian stationary noise are obtained.

Аннотация. Рассматривается нелинейная модель регрессии с непрерывным временем. Получены свойства состоятельности и асимптотической нормальности оценки Ибрагимова параметра спектральной плотности гауссовского стационарного шума.

## Вступ

У класичній моделі регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень, крім оцінювання параметрів функції регресії методом найменших квадратів, велика увага приділяється оцінюванню невідомої дисперсії похибки спостережень за допомогою залишкової суми квадратів [1].

У моделях регресії з корельованими спостереженнями природним узагальненням задачі оцінювання невідомої дисперсії похибки спостережень у випадку стаціонарного шуму є оцінювання в часовій області коваріаційної функції шуму з використанням залишкової корелограми [2, 3] або у частотній області — оцінювання параметрів спектральної щільності (с. щ.) з використанням залишкової періодограми [4, 5].

Важливість розв'язання цих задач не підлягає сумніву, так як знання саме цих характеристик випадкового шуму і може бути метою статистичної обробки даних у моделі "сигнал+шум" [6].

Для того, щоб оцінити невідомий параметр функції регресії доцільно використовувати, як і в класичному випадку, оцінку найменших квадратів (о. н. к.).

У роботі [4] вивчались асимптотичні властивості оцінок Уітла параметрів с. щ. сильно залежного випадкового шуму в лінійній моделі регресії з дискретним часом. У статті [5] було доведено слабку консистентність та асимптотичну нормальність оцінок Уітла параметрів с. щ. гауссівського стаціонарного шуму в нелінійній моделі регресії з неперервним часом з використанням залишкової періодограми. Наведений

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50, 65B10, 60G15; Secondary 40A05.

*Ключові слова і фрази.* Нелінійна модель регресії з неперервним часом, гауссівський стаціонарний шум, залишкова періодограма, оцінка Ібрагімова спектральної щільності, консистентність, асимптотична нормальність.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції "Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)", 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

у цій роботі приклад показує, що отримані результати охоплюють с. щ. з сингулярностями, що відповідають випадковим процесам з сильною залежністю таким, як дробовий рух Рісса-Бесселя (див., наприклад, [7, 8]).

У даній роботі в аналогічній [5] постановці вивчаються асимптотичні властивості оцінок Ібрагімова [7, 9, 10] параметрів с. щ., побудованих за залишковою періодограмою.

## 1. Модель та умови консистентності оцінки мінімального контрасту

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t, \alpha_0) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1.1}$$

де $g\colon (-\Delta, \infty) \times A_\gamma \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\alpha_0 \in A$, $A \subset \mathbb{R}^q$ — обмежена відкрита опукла множина, $A_\gamma = \bigcup_{\|e\| \le 1}(A + \gamma e)$, $\gamma$ та $\Delta$ — деякі додатні числа.

Припустимо також, що

**A.** $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — дійсний вимірний стаціонарний гауссівський процес з нульовим середнім і с. щ. $f(\lambda, \theta_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\theta_0 \in \Theta$, де $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена відкрита опукла множина, а функція $f(\lambda, \theta) > 0$ означена на множині $\mathbb{R} \times \Theta_\tau$, $\Theta_\tau = \bigcup_{\|e\| \le 1}(\Theta + \tau e)$, $\tau > 0$ —деяке число.

**Означення 1.1.** О. н. к. параметра $\alpha_0 \in A$, отриманою за спостереженнями процесу $\{X(t), t \in [0, T]\}$, називається будь-який випадковий вектор $\hat{\alpha}_T = (\hat{\alpha}_{1T}, \ldots, \hat{\alpha}_{qT}) \in A^c$, ($A^c$ — замикання A), для якого

$$L_T(\hat{\alpha}_T) = \min_{\alpha \in A^c} L_T(\alpha), \qquad L_T(\alpha) = \int_0^T (X(t) - g(t, \alpha))^2 \, dt.$$

Розглянемо зображення с. щ.

$$f(\lambda, \theta) = \sigma^2(\theta) \psi(\lambda, \theta), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \theta \in \Theta, \tag{1.2}$$

де

$$\sigma^2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta) w(\lambda) \, d\lambda, \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda, \theta) w(\lambda) \, d\lambda = 1, \tag{1.4}$$

а $w(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, — деяка парна додатна обмежена інтегровна за Лебегом вагова функція. Введемо періодограму залишків

$$I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T (X(t) - g(t, \hat{\alpha}_T)) e^{-i\lambda t} \, dt \right|^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

і розглянемо поле контрасту

$$U_T(\theta, \hat{\alpha}_T) = -\int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda, \hat{\alpha}_T) w(\lambda) \ln \psi(\lambda, \theta) \, d\lambda, \qquad \theta \in \Theta^c. \tag{1.5}$$

Існування інтеграла (1.5) випливає з умови **C4**, яку наведено нижче.

Введемо також функції

$$U(\theta) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) w(\lambda) \ln \psi(\lambda, \theta) \, d\lambda,$$

і

$$K(\theta_0, \theta) = U(\theta) - U(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0) w(\lambda) \ln \frac{\psi(\lambda, \theta_0)}{\psi(\lambda, \theta)} \, d\lambda.$$

За нерівністю (1e.6.6), стор. 63 книги [11] і рівностей (1.2)-(1.4) маємо

$$K(\theta_0,\theta) = \sigma^2(\theta_0)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\ln\frac{\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta)}\,d\lambda \geq 0.$$

Більш того, $K(\theta_0,\theta) > 0$, якщо $\psi(\lambda,\theta_0) \not\equiv \psi(\lambda,\theta)$ для $\theta_0 \neq \theta$ на множині додатної міри Лебега.

**Означення 1.2.** Оцінкою мінімального контрасту (о. м. к.) невідомого параметра $\theta_0 \in \Theta$ називається будь-який випадковий вектор $\hat\theta_T = (\hat\theta_{1T},\dots,\hat\theta_{mT})$, для якого

$$U_T(\hat\theta_T,\hat\alpha_T) = \min_{\theta\in\Theta^c} U_T(\theta,\hat\alpha_T).$$

Мінімум в Означенні 1.2 досягається завдяки неперервності інтеграла (1.5) за $\theta \in \Theta^c$, яка є наслідком умови **C4**.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

**C1.** О. н. к. $\hat\alpha_T$ є слабко консистентною оцінкою $\alpha_0$, тобто

$$\hat\alpha_T \xrightarrow{\mathsf{P}} \alpha_0 \quad \text{при } T \to \infty.$$

Позначимо $\Phi_T(\alpha_1,\alpha_2) = \int_0^T (g(t,\alpha_1) - g(t,\alpha_2))^2\,dt$, $\alpha_1,\alpha_2 \in A^c$.

**C2.** Для деякої константи $c_0 < \infty$

$$T^{-1}\Phi_T(\alpha_1,\alpha_2) \leq c_0^2\|\alpha_1-\alpha_2\|^2, \qquad \alpha_1,\alpha_2 \in A^c.$$

У монографії [12] доведено теореми про консистентність о. н. к. $\hat\alpha_T$ в моделі (1.1), для вірності яких, крім деяких умов на функцію регресії, достатньо, щоб с. щ. $f \in L_2(\mathbb{R})$. Така вимога міститься в наступній умові **C3**. Усі класичні приклади обмежених та неперервних с. щ. $f$, очевидно, задовольняють цій умові. З іншого боку, умова **C2** не вступає в протиріччя з умовами щодо функції регресії в цих теоремах.

Умови на с. щ. $f(\lambda,\theta)$ ми, в більшій частині випадків, формулюємо в термінах функції $\psi(\lambda,\theta)$, тому що це зручніше з точки зору доведення подальших тверджень. Потім ми у розділі 5 переформулюємо основні результати роботи в термінах с. щ. $f(\lambda,\theta)$.

**C3.** $f(\cdot,\theta) \in L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta^c$, причому $\psi(\lambda,\theta_1) \neq \psi(\lambda,\theta_2)$ на множині додатної міри Лебега при $\theta_1 \neq \theta_2$.

**C4.** Функція $w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta)$ неперервна за $\theta \in \Theta^c$ для майже всіх $\lambda \in \mathbb{R}$, причому

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\theta\in\Theta^c} w(\lambda)|\ln\psi(\lambda,\theta)| < \infty.$$

**C5.** Існує парна додатна вимірна за Лебегом функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що

(i) $v(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta)$рівномірно неперервна в$\mathbb{R}\times\Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\frac{w(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$.

## 2. Консистентність оцінки мінімального контрасту

Позначимо

$$g_T(\lambda,\alpha) = \int_0^T e^{-i\lambda t}g(t,\alpha)\,dt, \qquad s_T(\lambda,\alpha) = g_T(\lambda,\alpha_0) - g_T(\lambda,\alpha),$$

$$\varepsilon_T(\lambda) = \int_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\,dt, \qquad I_T^\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\pi T}|\varepsilon_T(\lambda)|^2,$$

і перепишемо періодограму залишків наступним чином:

$$I_T(\lambda,\hat\alpha_T) = I_T^\varepsilon(\lambda) + \frac{1}{\pi T}\operatorname{Re}\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\} + \frac{1}{2\pi T}|s_T(\lambda,\hat\alpha_T)|^2.$$

Нехай $\varphi = \varphi(\lambda, \theta)$, $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R} \times \Theta^c$, — деяка вимірна за Лебегом за змінною $\lambda$ при кожному фіксованому $\theta$ вагова функція. Маємо

$$\begin{aligned} J_T(\varphi, \hat\alpha_T) &= \int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda, \hat\alpha_T)\varphi(\lambda, \theta)\, d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}(\lambda)\varphi(\lambda, \theta)\, d\lambda + \frac{1}{\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\,\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda, \hat\alpha_T)}\}\varphi(\lambda, \theta)\, d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat\alpha_T)|^2\varphi(\lambda, \theta)\, d\lambda \\ &= J_T^{\varepsilon}(\varphi) + J_T^{(1)}(\varphi) + J_T^{(2)}(\varphi). \end{aligned}$$

Припустимо, що

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}, \theta\in\Theta^c} |\varphi(\lambda, \theta)| = c(\varphi) < \infty.$$

Тоді за тотожністю Планшереля та умови **C2**

$$\begin{aligned} \left|J_T^{(1)}(\varphi)\right| &\le 2c(\varphi)\left(\frac{1}{2\pi T}\int_0^T |\varepsilon_T(\lambda)|^2\, d\lambda\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat\alpha_T)|^2\, d\lambda\right)^{1/2} \\ &= 2c(\varphi)\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt\right)^{1/2}\left(T^{-1}\Phi_T(\alpha_0, \hat\alpha_T)\right)^{1/2} \\ &\le 2c_0 c(\varphi)\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt\right)^{1/2}\|\hat\alpha_T - \alpha_0\|. \end{aligned}$$

Враховуючи умови **A**, **C1**, **C3**, бачимо, що

$$\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|J_T^{(1)}(\varphi)\right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty. \tag{2.1}$$

З іншого боку,

$$J_T^{(2)}(\varphi) \le c(\varphi)T^{-1}\Phi_T(\alpha_0, \hat\alpha_T) \le c_0^2 c(\varphi)\|\hat\alpha_T - \alpha_0\|^2,$$

і знов, завдяки **C1**, **C2**,

$$\sup_{\theta\in\Theta^c} J_T^{(2)}(\varphi) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty. \tag{2.2}$$

**Лема 2.1.** *Якщо виконано* **A**, *а парна вагова функція* $\varphi(\lambda, \theta)$ *така, що*

$$f(\cdot, \theta_0)\varphi(\cdot, \theta) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \qquad \theta \in \Theta^c,$$

*то при* $T \to \infty$

$$J_T^{\varepsilon}(\varphi) \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0)\varphi(\lambda, \theta)\, d\lambda, \qquad \theta \in \Theta^c.$$

*Доведення.* Доведення цього твердження можна знайти, наприклад, в [7]. □

**Наслідок 2.1.** *Якщо* $\varphi(\lambda, \theta) = w(\lambda)\ln\psi(\lambda, \theta)$, *то за умов* **C1**–**C4**

$$U_T(\theta, \hat\alpha_T) \xrightarrow{\mathsf{P}} U(\theta) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \theta_0)w(\lambda)\ln\psi(\lambda, \theta)\, d\lambda, \qquad \theta \in \Theta^c.$$

**Лема 2.2.** *Якщо виконано умови* **C1**–**C5**, *то*

$$\sup_{\theta\in\Theta^c} |U_T(\theta, \hat\alpha_T) - U(\theta)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty.$$

*Доведення.* Нехай $\{\theta_j, j = 1, \ldots, N_\delta\}$ — $\delta$-сітка множини $\Theta^c$. Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{\theta\in\Theta^c} |U_T(\theta, \hat\alpha_T) - U(\theta)| \le &\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} |U_T(\theta_1, \hat\alpha_T) - U(\theta_1) - (U_T(\theta_2, \hat\alpha_T) - U(\theta_2))| \\ &+ \max_{1\le j\le N_\delta} |U_T(\theta_j, \hat\alpha_T) - U(\theta_j)|, \end{aligned}$$

і для будь-якого $\rho \geq 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\theta\in\Theta^c} |U_T(\theta,\hat{\alpha}_T) - U(\theta)| \geq \rho\right\} \leq \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2,$$

причому при $T \to \infty$

$$\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}\left\{\max_{1\leq j\leq N_\delta} |U_T(\theta_j,\hat{\alpha}_T) - U(\theta_j)| \geq \frac{\rho}{2}\right\} \to 0$$

за Наслідком 2.1. З іншого боку,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_1 \leq \mathsf{P}\Bigg\{ &\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta} \left|\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}(\lambda)\big(w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_1) - w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_2)\big)\,d\lambda\right| \\ &+ \sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\theta_0)\big((w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_1) - w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_2)\big)\,d\lambda\right| \\ &+ 2\sup_{\theta\in\Theta^c} |J^{(1)}(w\cdot\ln\psi)| + 2\sup_{\theta\in\Theta^c} |J^{(2)}(w\cdot\ln\psi)| \geq \frac{\rho}{2}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

За умови **C5(i)**

$$\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta} \left|\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}(\lambda)\big((w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_1) - w(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_2)\big)\,d\lambda\right| \leq \eta(\delta)\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}(\lambda)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda,$$

де

$$\eta(\delta) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R},\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta} \big|(v(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_1) - v(\lambda)\ln\psi(\lambda,\theta_2)\big| \to 0, \qquad \delta\to 0.$$

Оскільки за Лемою 2.1 і **C5**(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}(\lambda)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\theta_0)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda, \qquad T\to\infty,$$

а 2-й доданок під знаком імовірності в (2.3) можна зробити як завгодно малим вибором $\delta$, то $\mathsf{P}_1 \to 0$, $T\to\infty$, беручи до уваги, що 3-й і 4-й доданки збігаються до нуля за ймовірністю, завдяки (2.1) і (2.2). □

**Теорема 2.1.** *За умов* **A**, **C1–C5** *о.м.к.* $\hat{\theta}_T$ *є слабко консистентною оцінкою параметра* $\theta_0$.

*Доведення.* Для будь-якого $\rho > 0$ за Означенням 1.2

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left\{\|\hat{\theta}_T - \theta_0\| \geq \rho\right\} &= \mathsf{P}\left\{\|\hat{\theta}_T - \theta_0\| \geq \rho; U_T(\hat{\theta}_T,\hat{\alpha}_T) \leq U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)\right\} \\ &\leq \mathsf{P}\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} (U_T(\theta,\hat{\alpha}_T) - U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T)) \leq 0\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} (U_T(\theta,\hat{\alpha}_T) - U(\theta) - (U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T) - U(\theta_0)) + K(\theta_0,\theta)) \leq 0\right\} \\ &\leq \mathsf{P}\Bigg\{\inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} \big(U_T(\theta,\hat{\alpha}_T) - U(\theta) - (U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T) - U(\theta_0))\big) \\ &\qquad\qquad + \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} K(\theta_0,\theta) \leq 0\Bigg\} \\ &\leq \mathsf{P}\left\{\sup_{\theta\in\Theta^c} \big|U_T(\theta,\hat{\alpha}_T) - U(\theta)\big| + \big|U_T(\theta_0,\hat{\alpha}_T) - U(\theta_0)\big| \geq \inf_{\|\theta-\theta_0\|\geq\rho} K(\theta_0,\theta)\right\} \to 0,\end{aligned}$$

завдяки Наслідку 2.1, Лемі 2.2 та неперервності функції контрасту $K(\theta_0,\theta)$ за $\theta$, яка випливає з умови **C4**. □

## 3. Умови асимптотичної нормальності оцінки мінімального контрасту

Перші три умови стосуються властивостей о.н.к. $\hat{\alpha}_T$ і функції регресії $g(t,\alpha)$.

**N1.** Нормована о.н.к. $T^{1/2}(\hat{\alpha}_T - \alpha_0)$ асимптотично нормальна при $T \to \infty$.

Очевидно, з умови **N1** випливає виконання умови **C1**.

Позначимо $g'(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} g(t,\alpha)$, $\Phi'_T(\alpha_1,\alpha_2) = \int_0^T (g'(t,\alpha_1) - g'(t,\alpha_2))^2\,dt$.

**N2.** Функція $g(t,\alpha)$ неперервно диференційовна за $t \ge 0$ для будь-якого $\alpha \in A^c$ і

$$T^{-1}\Phi'_T(\alpha_1,\alpha_2) \le (c'_0)^2 \|\alpha_1 - \alpha_2\|^2, \qquad \alpha_1,\alpha_2 \in A^c.$$

Нехай $g_i(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(t,\alpha)$, $g_{ij}(t,\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j} g(t,\alpha)$.

**N3.** Функція $g(t,\alpha)$ двічі неперервно диференційовна за $\alpha \in A^c$ для будь-якого $t \ge 0$, причому

(i) $\sup_{t\ge 0, \alpha \in A^c} |g(t,\alpha)| \le \bar{c} < \infty$;

(ii) $T^{-1}\int_0^T g_i^2(t,\alpha)\,dt \le \bar{c}_i(\alpha) < \infty$, $i = 1,\ldots,q$, $\alpha \in A$;

(iii) $\sup_{\alpha \in A^c} T^{-1} \int_0^T g_{ij}^2(t,\alpha)\,dt \le \bar{c}_{ij} < \infty$, $i,j = 1,\ldots,q$.

У теоремах про асимптотичну нормальність о. н. к. $\hat{\alpha}_T$ [12] у випадку додатної, обмеженої та неперервної с. щ. $f$, від неї більше нічого не вимагається. Якщо $f$ має сингулярності, то треба вимагати, щоб сукупність точок сингулярності та сукупність атомів спектральної міри функції регресії не перетинались [13]. У роботі [14] доведено загальну теорему про асимптотичну нормальність о. н. к., яка разом із результатом роботи [13] дає достатньо громіздкий комплекс умов на функцію регресії $g$, що забезпечує асимптотичну нормальність о. н. к. $\hat{\alpha}_T$ для сингулярної с. щ. $f$ гауссівського стаціонарного шуму. Стандартна умова **N3** не вступає у протиріччя з умовами асимптотичної нормальності о. н. к. $\hat{\alpha}_T$ [12]–[14]. У свою чергу, технічну умову **N2** введено суто для доведення асимптотичної нормальності о. м. к. Ібрагімова.

Будемо вважати, що функція $\psi(\lambda,\theta)$ двічі диференційована за $\theta \in \Theta^c$ при кожному $\lambda \in \mathbb{R}$ за вийнятком, можливо, скінченного числа точок $\Lambda = \{\pm\lambda_1,\ldots,\pm\lambda_r\}$.

Позначимо $\psi_i(\lambda,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\psi(\lambda,\theta)$, $\psi_{ij}(\lambda,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\psi(\lambda,\theta)$. Припустимо далі, що в наступних умовах функції $\psi_i w$, $\psi_i\psi_j w$, $\psi_i\psi_j v$, $\psi_{ij} w$, $\psi_{ij} v$, $i,j = 1,\ldots,m$, при кожному фіксованому $\theta \in \Theta^c$ можуть бути продовжені за неперервністю до функцій, означених на $\mathbb{R}$. Для останніх залишимо ті ж самі позначення.

**N4.** (i) $\frac{\psi_i(\lambda,\theta)}{\psi(\lambda,\theta)} w(\lambda)$, $i = 1,\ldots,m$, — рівномірно неперервні за $\lambda \in \mathbb{R}$ при кожному $\theta \in \Theta$ і обмежені за сукупністю змінних $(\lambda,\theta) \in \mathbb{R} \times \Theta^c$;

(ii) $\frac{\psi_i(\lambda,\theta)\psi_j(\lambda,\theta)}{\psi^2(\lambda,\theta)} w(\lambda)$, $\frac{\psi_{ij}(\lambda,\theta)}{\psi(\lambda,\theta)} w(\lambda)$, $i,j = 1,\ldots,m$, — обмежені за сукупністю змінних $(\lambda,\theta) \in \mathbb{R} \times \Theta^c$ функції.

**N5.** Існує парна додатна вимірна за Лебегом функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що

(i) $\frac{\psi_i(\lambda,\theta)\psi_j(\lambda,\theta)}{\psi^2(\lambda,\theta)} v(\lambda)$, $\frac{\psi_{ij}(\lambda,\theta)}{\psi(\lambda,\theta)} v(\lambda)$, $i,j = 1,\ldots,m$, — рівномірно неперервні в $\mathbb{R} \times \Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\frac{w(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$;

(iii) $\frac{\psi_i(\cdot,\theta)\psi_j(\cdot,\theta)}{\psi(\cdot,\theta)} w(\cdot)$, $\psi_{ij}(\cdot,\theta) w(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta \in \Theta$.

**N6.** $\frac{\psi_i(\lambda,\theta)}{\psi(\lambda,\theta)} w(\lambda)$, $i = 1,\ldots,m$, — функції обмеженої варіації за $\lambda \in \mathbb{R}$ і належать $L_1(\mathbb{R})$ для кожного $\theta \in \Theta$. Крім цього, $|\psi_i(\lambda,\theta)| w(\lambda) \le Z_1(\lambda)$, $\theta \in \Theta^c$, та $Z_1(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

**N7.** $\psi_i(\cdot,\theta) w(\cdot) \in L_k(\mathbb{R})$ для всіх натуральних $k, i = 1,\ldots,m$, $\theta \in \Theta$.

Введемо дві матриці, що фігурують в формулюванні Теореми 4.1 наступного розділу.

$$S_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\nabla_\theta \nabla'_\theta \ln \psi(\lambda,\theta)\big) f(\lambda,\theta) w(\lambda)\,d\lambda, \tag{3.1}$$

$$S_2(\theta) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\theta \ln \psi(\lambda, \theta) \nabla'_\theta \ln \psi(\lambda, \theta) f^2(\lambda, \theta) w^2(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.2}$$

**N8.** Матриця $S_1(\theta)$ невироджена, а матриця $S_2(\theta)$ додатно визначена для $\theta \in \Theta$.

Для відображення

$$-U(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \psi(\lambda, \theta) f(\lambda, \theta_0) w(\lambda)\, d\lambda$$

точка $\theta_0$ є точкою максимуму, і, таким чином, за умови **N4** значення матриці Гессе $S_1(\theta_0) = \nabla_\theta \nabla'_\theta(-U(\theta_0))$ має бути від'ємно напіввизначеною матрицею. Оскільки за умови **N8** матриця $S_1(\theta_0)$ невироджена, то вона є від'ємно визначеною. Відповідно, матриця $-S_1(\theta_0) = \nabla_\theta \nabla'_\theta U(\theta_0)$ є додатно визначеною.

## 4. Асимптотична нормальність оцінки мінімального контрасту

Розділ містить доведення наступного факту.

**Теорема 4.1.** *За умов* **A, C2–C5** *та* **N1–N8** *нормована о.м.к.* $T^{1/2}(\hat{\theta}_T - \theta_0)$ *асимптотично при* $T \to \infty$ *нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею* $S(\theta) = S_1^{-1}(\theta_0) S_2(\theta_0) S_1^{-1}(\theta_0)$.

Доведенню основного результату статті передує декілька лем. Позначимо

$$\Delta_T(\varphi) = T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)} \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

**Лема 4.1.** *Якщо виконано умови* **A, C2, C3, N1–N3**, *а* $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *— рівномірно неперервна обмежена функція, то* $\Delta_T(\varphi) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$.

*Доведення.* Нехай $B_\sigma$ сукупність усіх цілих функцій $b(\lambda)$ експоненціального типу $0 \le \sigma < \infty$, для яких $c(b) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |b(\lambda)| < \infty$. Нехай $\delta > 0$ — довільне мале число.

Існує функція $\varphi_\sigma \in B_\sigma$, $\sigma = \sigma(\delta)$ така, що [15]

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\varphi(\lambda) - \varphi_\sigma(\lambda)| < \delta.$$

Нехай

$$T_n(\varphi_\sigma; \lambda) = \sum_{j=-n}^{n} c_j^{(n)} \exp\left\{ij\frac{\sigma}{n}\lambda\right\}, \qquad n \ge 1,$$

— послідовність поліномів Левітана [15], що відповідає $\varphi_\sigma$, з коефіцієнтами

$$c_j^{(n)} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ijhu} \left(\frac{2\sin\frac{hu}{2}}{hu}\right)^2 \varphi_\sigma(u)\, du, \qquad h = \frac{\sigma}{n},\ j = -n, \dots, n.$$

Для будь-якого $\Lambda > 0$ існує $n_0 = n_0(\delta, \Lambda)$ таке, що для $n \ge n_0$

$$\sup_{\lambda \in [-\Lambda, \Lambda]} |\varphi_\sigma(\lambda) - T_n(\varphi_\sigma; \lambda)| \le \delta.$$

Запишемо

$$\Delta_T(\varphi) = \Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma) + \Delta_T(\varphi_\sigma - T_n) + \Delta_T(T_n),$$

$$\begin{aligned}
|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)| &\le \delta T^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}|\, d\lambda \\
&\le \delta T^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_T(\lambda)|^2\, d\lambda\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2\, d\lambda\right)^{1/2} \\
&= 2\pi\delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt\right)^{1/2} \Phi_T^{1/2}(\alpha_0, \alpha_T) \\
&\le 2\pi c_0 \delta \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt\right)^{1/2} T^{1/2} \|\hat{\alpha}_T - \alpha_0\|.
\end{aligned}$$

За умови **C2**, таким чином, для будь-якого $\rho > 0$ і $B(t) = \mathsf{E}\,\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{|\Delta_T(\varphi - \varphi_\sigma)| \ge \rho\} &\le \mathsf{P}\left\{T^{1/2}\|\hat\alpha_T - \alpha_0\| \ge \frac{\rho}{2\pi c_0 \delta (B(0)+1)^{1/2}}\right\}\\ &\quad + \mathsf{P}\left\{T^{-1}\int_0^T (\varepsilon^2(t) - B(0))\,dt > 1\right\}\\ &= \mathsf{P}_3 + \mathsf{P}_4\,.\end{aligned}$$

Імовірність $\mathsf{P}_4 \to 0$ при $T \to \infty$, а ймовірність $\mathsf{P}_3 \to 0$ за умови **N1** при достатньо великих $T$ ($T > T_0$) можна зробити меншою наперед заданого числа вибором $\delta > 0$ при фіксованому $\rho > 0$.

Оскільки функція $\varphi_\sigma \in B_\sigma$ і відповідна їй послідовність поліномів Левітана $T_n$ обмежені однією і тією ж самою константою [15], отримуємо

$$\begin{aligned}|\Delta(\varphi_\sigma - T_n)| &\le \delta T^{-1/2}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}|\,d\lambda\\ &\quad + 2c(\varphi_\sigma)T^{-1/2}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}|\,d\lambda\\ &= D_1 + D_2.\end{aligned}$$

Інтеграл в доданку $D_1$ мажоруємо інтегралом по вісі і оцінюємо цей доданок, як і раніше. Маємо далі

$$\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)} = \frac{1}{i\lambda}\left[e^{i\lambda T}(g(T,\alpha_0) - g(T,\hat\alpha_T)) - (g(0,\alpha_0) - g(0,\hat\alpha_T)) - \overline{s'_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\right],$$

де позначено $s'_T(\lambda,\hat\alpha_T) = \int_0^T e^{-i\lambda t}(g'(t,\alpha_0) - g'(t,\hat\alpha_T))\,dt$.

За умов леми

$$\begin{aligned}&T^{-1/2}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}|\,d\lambda\\ &\quad\le T^{-1/2}\left(\int_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]} |\varepsilon_T(\lambda)|^2\,d\lambda\right)^{1/2}\\ &\quad\times\Bigg(3\int_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]} \frac{1}{\lambda^2}\big(|g(T,\alpha_0) - g(T,\hat\alpha_T)|^2 + |g(0,\alpha_0) - g(0,\hat\alpha_T)|^2\\ &\qquad\qquad + |s'_T(\lambda,\hat\alpha_T)|^2\big)\,d\lambda\Bigg)^{1/2}\\ &\quad\le \left(\frac{2\pi}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2} 3^{1/2}\left(8\bar c^2\int_{\mathbb{R}\setminus[-\Lambda,\Lambda]}\frac{d\lambda}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\Lambda^2}\Phi'_T(\alpha_0,\hat\alpha_T)\right)^{1/2}\\ &\quad\le \left(4\sqrt{6\pi}\bar c\Lambda^{-1/2} + 2\sqrt{3}\pi c'_0\Lambda^{-1}T^{1/2}\|\hat\alpha_T - \alpha_0\|\right)\left(T^{-1}\int_0^T \varepsilon^2(t)\,dt\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Таким чином, для будь-якого фіксованого $\rho > 0$, аналогічно ймовірності $\mathsf{P}_3$, ймовірність $\mathsf{P}_5 = \mathsf{P}\{D_2 \ge \rho\}$ при $T > T_0$ можна зробити меншою наперед заданого числа вибором величини $\Lambda$.

Розглянемо

$$\Delta_T(T_n) = T^{-1/2}\sum_{j=-n}^{n} c_j^{(n)}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\exp\left\{ij\frac{\sigma}{n}\lambda\right\}\,d\lambda,$$

$$\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\exp\left\{ij\frac{\sigma}{n}\lambda\right\} = \int_{j\frac{\sigma}{n}}^{T+j\frac{\sigma}{n}}\exp\{i\lambda t\}\left(g\left(t - j\frac{\sigma}{n},\alpha_0\right) - g\left(t - j\frac{\sigma}{n},\hat\alpha_T\right)\right)\,dt,$$

$$j = -n,\ldots,n.$$

Це означає, що

$$\Delta_T(T_n) = 2\pi \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} T^{-1/2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \varepsilon(t) \left( g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) - g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T\right)\right) dt$$
$$+ 2\pi \sum_{j=-n}^{0} c_j^{(n)} T^{-1/2} \int_{0}^{T+\frac{j\sigma}{n}} \varepsilon(t) \left( g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) - g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T\right)\right) dt.$$

Для $j > 0$ розглянемо величину

$$T^{-1/2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \varepsilon(t) \left( g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \hat{\alpha}_T\right) - g\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right)\right) dt$$
$$= \sum_{i=1}^{q} T^{-1} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \varepsilon(t) g_i\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) dt T^{1/2}(\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0})$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{q} T^{-1/2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \varepsilon(t) g_{ik}\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_T^*\right) dt (\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0})(\hat{\alpha}_{kT} - \alpha_{k0})$$
$$= I_{1T} + I_{2T}.$$

Зауважимо, що $T^{1/2}(\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0})$ слабко збігається до гауссівської випадкової величини за умови **N1**. Крім цього,

$$\mathsf{E}\left(T^{-1} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \varepsilon(t) g_i\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) dt\right)^2$$
$$= T^{-2} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} B(t-s) g_i\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0\right) g_i(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_0)\, dt\, ds$$
$$\leq \left(T^{-2} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s)\, dt\, ds\right)^{1/2} T^{-1} \int_0^T g_i^2(t, \alpha_0)\, dt.$$

Оскільки, завдяки **C3**,

$$T^{-1} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s)\, dt\, ds \to \int_{-\infty}^{\infty} B^2(t)\, dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda; \theta_0)\, d\lambda < \infty,$$

то разом з умовою **N3(ii)** це означає, що сума $I_{1T} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $T \to \infty$.

Для загального члена суми $I_{2T}$ маємо

$$T^{-1/2} \left| \int_{\frac{j\sigma}{n}}^{T} \varepsilon(t) g_{ik}\left(t - j\frac{\sigma}{n}, \alpha_T^*\right) dt \right| |\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0}| \cdot |\hat{\alpha}_{kT} - \alpha_{k0}|$$
$$\leq \bar{c}_{ik}^{1/2} \left(T^{-1} \int_0^T \varepsilon^2(t)\, dt\right)^{1/2} \left| T^{1/2} \left(\hat{\alpha}_{iT} - \alpha_{i0}\right)\right| \cdot |\hat{\alpha}_{kT} - \alpha_{k0}| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$$

за умов теореми, тобто $I_{2T} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $T \to \infty$. Для $j \leq 0$ міркування аналогічні, і

$$\Delta_T(T_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty.$$ □

**Лема 4.2.** *Якщо виконано умови* **A**, **C1**, **C2** *і* $\sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta^c} |\varphi(\lambda, \theta)| = c(\varphi) < \infty$, *то*

$$T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) \varepsilon_T(\lambda) \overline{s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)}\, d\lambda \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty;$$
$$T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \theta_T^*) |s_T(\lambda, \hat{\alpha}_T)|^2\, d\lambda \xrightarrow{\mathsf{P}} 0, \qquad T \to \infty.$$

*Доведення.* Ці факти аналогічні співвідношенням (2.1) і (2.2), і доводяться так само. □

**Лема 4.3.** *Нехай існує парна додатна функція $v(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, така, що*

(i) $\varphi(\lambda,\theta)v(\lambda)$ *рівномірно неперервна в* $\mathbb{R}\times\Theta^c$*;*

(ii) $f(\cdot,\theta)\frac{w(\cdot)}{v(\cdot)} \in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$*;*

*і, крім цього,*

(iii) $\varphi(\cdot,\theta)f(\cdot,\theta)w(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$.

*Тоді якщо* $\theta_T^* \xrightarrow{\mathsf{P}} \theta_0$, *і виконано умову* **A**, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda,\theta_T^*)I_T^{\varepsilon}(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda,\theta_0)f(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\,d\lambda, \qquad T\to\infty.$$

*Доведення.* Запишемо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda,\theta_T^*)I_T^{\varepsilon}(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(\lambda,\theta_T^*)-\varphi(\lambda,\theta_0))v(\lambda)I_T^{\varepsilon}(\lambda)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda,\theta_0)I_T^{\varepsilon}(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda = I_1+I_2.$$

За Лемою 2.1 і умовою (iii)

$$I_2 \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda,\theta_0)f(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\,d\lambda, \qquad T\to\infty. \tag{4.1}$$

З іншого боку, для будь-якого $r>0$ за умови $(i)$ існує таке $\delta=\delta(r)$, що для $\|\theta_T^*-\theta_0\|<\delta$

$$|I_1| \le r\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda, \tag{4.2}$$

а за умови $(ii)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_T^{\varepsilon}\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda,\theta_0)\frac{w(\lambda)}{v(\lambda)}\,d\lambda. \tag{4.3}$$

Співвідношення (4.1)–(4.3) доводять лему. □

Тепер ми можемо довести Теорему 4.1.

*Доведення.* За означенням о.м.к. $\hat\theta_T$, формально використовуючи формулу Тейлора, отримуємо

$$0 = \nabla_\theta U_T(\hat\theta_T,\hat\alpha_T) = \nabla_\theta U_T(\theta_0,\hat\alpha_T) + \nabla_\theta\nabla'_\theta U_T(\theta_T^*,\hat\alpha_T)(\hat\theta_T-\theta_0), \tag{4.4}$$

де $\nabla_\theta$ — стовбчик вектор-градієнт, $\nabla'_\theta$ — рядок вектор-градієнт. Оскільки векторної формули Тейлора не існує, рівність (4.4) треба розуміти покоординатно, тобто кожний рядок векторної рівності (4.4) залежить від свого випадкового вектора $\theta_T^*$ такого, що $\|\theta_T^*-\theta_0\| \le \|\hat\theta_T-\theta_0\|$.

З (4.4), в свою чергу, формально маємо

$$T^{1/2}(\hat\theta_T-\theta_0) = -(\nabla_\theta\nabla'_\theta U_T(\theta_T^*,\hat\alpha_T))^{-1}\left(T^{1/2}\nabla_\theta U_T(\theta_0,\hat\alpha_T)\right). \tag{4.5}$$

Оскільки з умови **N4** випливає можливість диференціювання під знаком інтегралів в формулі (4.4), то

$$
\begin{aligned}
T^{1/2}\nabla_\theta U_T(\theta_0,\hat\alpha_T) &= T^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda,\hat\alpha_T)w(\lambda)\nabla_\theta\ln\psi(\lambda,\theta)\,d\lambda\\
&= T^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}I_T(\lambda,\hat\alpha_T)w(\lambda)\,d\lambda\\
&= T^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}I_T^{\varepsilon}(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda\\
&\quad+(2\pi)^{-1}T^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\,\mathrm{Re}\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\}+|s_T(\lambda,\hat\alpha_T|^2\right)\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}w(\lambda)\,d\lambda\\
&= A_T^{(1)}+A_T^{(2)}+A_T^{(3)}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Аналогічно

$$
\begin{aligned}
\nabla_\theta\nabla_\theta' U_T(\theta_T^*,\hat\alpha_T) &= -\int_{-\infty}^{\infty} I_T(\lambda,\hat\alpha_T)w(\lambda)\nabla_\theta\nabla_\theta'\ln\psi(\lambda,\theta_T^*)\,d\lambda\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\nabla_\theta\nabla_\theta'\psi(\lambda,\theta_T^*)}{\psi(\lambda,\theta_T^*)}-\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_T^*)\nabla_\theta'\psi(\lambda,\theta_T^*)}{\psi^2(\lambda,\theta_T^*)}\right)\\
&\quad\times\Big(I_T^{\varepsilon}(\lambda)+(\pi T)^{-1}\,\mathrm{Re}\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\}\\
&\qquad+(2\pi T)^{-1}\left|s_T(\lambda,\hat\alpha_T)\right|^2 w(\lambda)\Big)\,d\lambda\\
&= B_T^{(1)}+B_T^{(2)}+B_T^{(3)},
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

де доданки $B_T^{(2)}$ і $B_T^{(3)}$ містять у собі величини $Re\{\varepsilon_T(\lambda)\overline{s_T(\lambda,\hat\alpha_T)}\}$ і $|s_T(\lambda,\hat\alpha_T|^2$ відповідно.

Беручи до уваги першу частину умови **N4(i)**, візьмемо в Лемі 4.1 функції $\varphi(\lambda)=\varphi_i(\lambda)=\frac{\psi_i(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}w(\lambda)$, $i=1,\dots,m$. Тоді в формулі (4.6) $A_T^{(2)}\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $T\to\infty$.

Розглянемо в сумі (4.6) доданок $A_T^{(3)}=(a_{iT}^{(3)})_{i=1}^m$,

$$
a_{iT}^{(3)}=(2\pi)^{-1}T^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}|s_T(\lambda,\hat\alpha_T)|^2\varphi_i(\lambda)\,d\lambda,
$$

де $\varphi_i(\lambda)$ такі, як раніше.

За умов **C2**, **N1**, **N4**(i) $A_T^{(3)}\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $T\to\infty$, тому що

$$
\left|a_{iT}^{(3)}\right|\le c(\varphi_i)T^{-1/2}\Phi_T(\alpha_0,\hat\alpha_T)\le c(\varphi_i)c_0^2\left\|T^{1/2}(\hat\alpha_T-\alpha_0)\right\|\cdot\|\hat\alpha_T-\alpha_0\|\xrightarrow{\mathsf{P}}0,\qquad T\to\infty.
$$

Розглянемо поведінку доданків $B_T^{(1)}-B_T^{(3)}$ в формулі (4.7).

Якщо виконано умови Леми 4.2 і **N4**(ii), то $B_T^{(2)}\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $B_T^{(3)}\xrightarrow{\mathsf{P}}0$, $T\to\infty$.

Для того, щоб у цьому впевнитись, візьмемо у Лемі 4.2

$$
\varphi(\lambda,\theta)=\varphi_i(\lambda,\theta)=\frac{\psi_{ij}(\lambda,\theta)}{\psi(\lambda,\theta)}w(\lambda),\qquad\frac{\psi_i(\lambda,\theta)\psi_j(\lambda,\theta)}{\psi^2(\lambda,\theta)},\qquad i,j=1,\dots,m.
$$

За умов **N1** і **N5**

$$
B_T^{(1)}\xrightarrow{\mathsf{P}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\nabla_\theta\nabla_\theta'\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}-\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_0)\nabla_\theta'\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi^2(\lambda,\theta_0)}\right)f(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\,d\lambda,\tag{4.8}
$$

якщо взяти в Лемі 4.3 в умовах (i) і (iii)

$$
\varphi(\lambda,\theta)=\varphi_{ij}(\lambda,\theta)=\frac{\psi_{ij}(\lambda,\theta)}{\psi(\lambda,\theta)},\qquad\frac{\psi_i(\lambda,\theta)\psi_j(\lambda,\theta)}{\psi^2(\lambda,\theta)},\qquad i,j=1,\dots,m.
$$

Таким чином, якщо виконано умови **C1**, **C2**, **N4**(ii), **N5**, то

$$\begin{aligned}\nabla_\theta\nabla'_\theta U_T(\theta^*_T,\hat\alpha_T) &\xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\nabla_\theta\nabla'_\theta\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}-\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_0)\nabla'_\theta\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi^2(\lambda,\theta_0)}\right)f(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\big(\nabla_\theta\nabla'_\theta\ln\psi(\lambda,\theta_0)\big)f(\lambda,\theta_0)w(\lambda)\,d\lambda = S_1(\theta_0).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Із отриманих фактів випливає, що для доведення Теореми 4.1 треба вивчити асимптотичну поведінку вектора $A_T^{(1)}$ з зображення (4.6):

$$A_T^{(1)} = T^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\nabla_\theta\psi(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}I_T^\varepsilon(\lambda)w(\lambda)\,d\lambda.$$

Покладемо

$$\varphi_i(\lambda)=\frac{\psi_i(\lambda,\theta_0)}{\psi(\lambda,\theta_0)}w(\lambda),\qquad i=1,\dots,m,$$

$$\Psi(\lambda)=\sum_{i=1}^m u_i\varphi_i(\lambda),\qquad u=(u_1,\dots,u_m)\in\mathbb{R}^m,$$

$$Y_T=\int_{-\infty}^{\infty}I_T^\varepsilon(\lambda)\Psi(\lambda)\,d\lambda.$$

Зауважимо, що

$$Y=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda,\theta_0)\Psi(\lambda)\,d\lambda=0$$

за другою частиною умови **N6**.

Запишемо

$$\left\langle A_T^{(1)},u\right\rangle = T^{1/2}(Y_T-\mathsf{E}\,Y_T)+T^{1/2}\,\mathsf{E}\,Y_T.$$

Якщо виконано умову **N6**, то [16, 17]

$$T^{1/2}\,\mathsf{E}\,Y_T\to 0,\qquad T\to\infty.\tag{4.10}$$

З іншого боку, за умови **N7** $f(\cdot,\theta_0)\varphi_i(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})$, $i=1,\dots,m$, і тому [7]

$$\begin{aligned}D(T^{1/2}Y_T) &\xrightarrow[T\to\infty]{} 4\pi\sum_{i,j=1}^m\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\lambda)\varphi_j(\lambda)f^2(\lambda,\theta_0)\,d\lambda\right)u_iu_j\\ &= 4\pi\sum_{i,j=1}^m\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi_i(\lambda,\theta_0)\psi_j(\lambda,\theta_0)}{\psi^2(\lambda,\theta)}f^2(\lambda,\theta_0)w^2(\lambda)\,d\lambda\right)u_iu_j\\ &= \langle S_2(\theta_0)u,u\rangle.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Крім цього, за умови **N7**, як показано, наприклад, в [7], усі кумулянти порядку $k\geq 3$ випадкової величини $T^{1/2}Y_T$ збігаються до нуля. Останній факт, разом із співвідношеннями (4.9)–(4.11), доводять теорему. □

## 5. Формулювання основних результатів у термінах спектральної щільності

Сформулюємо спочатку в термінах с. щ. умови консистентності о. м. к. її параметра, за винятком умови **C3**, що містить умову контрасту як вимогу до функції $\psi$. Без цієї умови оцінка Ібрагімова, взагалі кажучи, втрачає сенс.

Для неперервності $\sigma^2(\theta)$, $\theta\in\Theta^c$, за умови обмеженості $w(\lambda)$ достатньо, щоб функція $f(\lambda,\theta)w(\lambda)$ була неперервною за $\theta\in\Theta^c$ для майже всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ і існувала інтегровна мажоранта:

$$f(\lambda,\theta)w(\lambda)\leq G_0(\lambda),\qquad \theta\in\Theta^c,\ G_0(\cdot)\in L_1(\mathbb{R}).\tag{5.1}$$

Тоді за умов додатності $f(\lambda,\theta)$ та $w(\lambda)$, $\min_{\theta\in\Theta^c}\sigma^2(\theta)>0$, а $\ln\sigma^2(\theta)$, $\theta\in\Theta^c$, є неперервною функцією, і $\max_{\theta\in\Theta^c}|\ln\sigma^2(\theta)|<\infty$. Таким чином, наступна умова, є достатньою для **C4**:

**C4′**. Функції $w(\lambda)f(\lambda,\theta)$, $w(\lambda)\ln f(\lambda,\theta)$ неперервні за $\theta\in\Theta^c$ для майже всіх $\lambda\in\mathbb{R}$, виконано (5.1) та

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\theta\in\Theta^c} w(\lambda)|\ln f(\lambda,\theta)|<\infty. \tag{5.2}$$

Аналогічно, достатньою для **C5** умовою є

**C5′**. Існує парна додатна рівномірно неперервна функція $v(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, така, що

(i) $v(\lambda)\ln f(\lambda,\theta)$ рівномірно неперервна в $\mathbb{R}\times\Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\frac{w(\cdot)}{v(\cdot)}\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$.

Таким чином, є вірною

**Теорема 5.1.** *За умов* **A**, **C1**–**C3**, **C4′**, **C5′** *о.м.к.* $\hat\theta_T$ *є слабко консистентною оцінкою параметра* $\theta$.

Будемо вважати, що с.щ. $f(\lambda,\theta)$ двічі диференційовна за $\theta\in\Theta^c$ при кожному $\lambda\in\mathbb{R}$ за винятком, можливо, скінченного числа точок $\Lambda=\{\pm\lambda_1,\dots,\pm\lambda_r\}$. Позначимо $f_i(\lambda,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(\lambda,\theta)$, $f_{ij}(\lambda,\theta)=\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}f(\lambda,\theta)$, $\lambda\notin\Lambda$.

Умовами диференційовності $\sigma^2(\theta)$ є співвідношення $(i,j=1,\dots,m)$

$$|f_i(\lambda,\theta)|w(\lambda)\le G_i(\lambda),\qquad \theta\in\Theta^c,\ G_i(\cdot)\in L_1(\mathbb{R}), \tag{5.3}$$

$$|f_{ij}(\lambda,\theta)|w(\lambda)\le G_{ij}(\lambda),\qquad \theta\in\Theta^c,\ G_{ij}(\cdot)\in L_1(\mathbb{R}). \tag{5.4}$$

Позначимо

$$\sigma_i^2(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}f_i(\lambda,\theta)w(\lambda)\,d\lambda,\qquad \sigma_{ij}^2(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{ij}(\lambda,\theta)w(\lambda)\,d\lambda.$$

Функції $\sigma_i^2(\theta)$, $\sigma_{ij}^2(\theta)$, $\theta\in\Theta^c$, існують і неперервні, якщо виконано (5.3), (5.4), а також для майже всіх $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f_i(\lambda,\theta)w(\lambda),\qquad f_{ij}(\lambda,\theta)w(\lambda)\in C(\Theta^c),\qquad i,j=1,\dots,m. \tag{5.5}$$

Зауважимо, що для $i,j=1,\dots,m$

$$\psi_i=\left(\frac{f}{\sigma^2}\right)_i'=\frac{f_i}{\sigma^2}-f\frac{\sigma_i^2}{\sigma^4}; \tag{5.6}$$

$$\psi_{ij}=\frac{f_{ij}}{\sigma^2}-f_i\frac{\sigma_j^2}{\sigma^4}-f_j\frac{\sigma_i^2}{\sigma^4}+2f\frac{\sigma_i^2\sigma_j^2}{\sigma^6}. \tag{5.7}$$

Таким чином, для того, щоб можна було при кожному $\theta\in\Theta^c$ продовжити за неперервністю на $\mathbb{R}$ функції $\psi_iw$, $\psi_i\psi_jw$, $\psi_i\psi_jv$, $\psi_{ij}w$, $\psi_{ij}v$, достатньо припустити, що це можна зробити з функціями

$$fw,\quad f^2w,\quad f_iw,\quad f_ifw,\quad f_if_jw,\quad f^2v,\quad f_iv,\quad f_ifv,\quad f_if_jv,\quad f_{ij}w,\quad f_{ij}v, \tag{5.8}$$

де $v$ — функція з подальшої умови **N5′**. Вважаємо, що в подальших умовах функції (5.8) саме такі.

Враховуючи попередні співвідношення, умову **N4** можна замінити достатньою умовою

**N4′**. (i) Функції $\frac{f_i(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $i=1,\dots,m$, рівномірно неперервні за $\lambda\in\mathbb{R}$ при кожному $\theta\in\Theta$ і обмежені за сукупністю змінних $(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}\times\Theta^c$. Крім цього, функція $w(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, рівномірно неперервна.

(ii) Функції $\frac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f^2(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $\frac{f_{ij}(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $i,j=1,\dots,m$, обмежені за сукупністю змінних $(\lambda,\theta)\in\mathbb{R}\times\Theta^c$.

Аналогічно, замість **N5**, можна записати достатню умову

**N5′**. Існує парна додатна рівномірно неперервна функція $v(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, така, що

(i) $\frac{f_i(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}v(\lambda)$, $\frac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f^2(\lambda,\theta)}v(\lambda)$, $\frac{f_{ij}(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}v(\lambda)$, $i,j=1,\dots,m$, рівномірно неперервні в $\mathbb{R}\times\Theta^c$;

(ii) $f(\cdot,\theta)\frac{w(\cdot)}{v(\cdot)}\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$, $\theta\in\Theta$;

(iii) Функції $f_i(\lambda,\theta)w(\lambda)$, $\frac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $f_{ij}(\lambda,\theta)w(\lambda)$, $i,j=1,\dots,m$, неперервні за $\theta\in\Theta^c$ при кожному $\lambda\in\mathbb{R}$ і мають мажоранти з $L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})$.

Зауважимо, що **N5′**(iii) поглинає умови (5.3)–(5.5).

Умови, що забезпечують виконання **N6**, **N7** можна записати наступним чином.

**N6′**. $\frac{f_i(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}w(\lambda)$, $\theta\in\Theta$, $i=1,\dots,m$, $w(\lambda)$ — функції обмеженої варіації за $\lambda\in\mathbb{R}$ і належать $L_1(\mathbb{R})$.

**N7′**. Функції $f(\cdot,\theta)w(\cdot)$, $f_i(\cdot,\theta)w(\cdot)\in L_k(\mathbb{R})$ для всіх натуральних $k, i=1,\dots,m$, $\theta\in\Theta$, причому

$$f(\lambda,\theta)w(\lambda)\le G_0(\lambda),\qquad \theta\in\Theta^c,\qquad G_0(\cdot)\in L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R}).$$

Останнє припущення посилює вимогу (5.1).

Перепишемо в термінах с. щ. $f(\lambda,\theta)$, $\sigma^2(\theta)$ та їх похідних матриці $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$ (пор. з [18])

$$(\ln\psi(\theta))_{ij}=(\ln f)_{ij}-(\ln\sigma^2)_{ij}=\frac{f_{ij}}{f}-\frac{f_if_j}{f^2}-\left(\frac{\sigma^2_{ij}}{\sigma^2}-\frac{\sigma^2_i\sigma^2_j}{\sigma^4}\right),$$

і, таким чином,

$$\begin{aligned}S_1(\theta)&=\left(s_1^{ij}(\theta)\right)_{i,j=1}^m\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_{ij}(\lambda,\theta)-\frac{f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)}{f(\lambda,\theta)}\right)w(\lambda)\,d\lambda\right.\\&\qquad\left.-\left(\sigma^2_{ij}(\theta)-\frac{\sigma^2_i(\theta)\sigma^2_j(\theta)}{\sigma^2(\theta)}\right)\right)_{i,j=1}^m.\end{aligned}\tag{5.9}$$

З іншого боку,

$$(\ln\psi)_i(\ln\psi)_j=\frac{f_if_j}{f^2}-\frac{\sigma^2_i}{\sigma^2}\cdot\frac{f_j}{f}-\frac{f_i}{f}\cdot\frac{\sigma^2_j}{\sigma^2}+\frac{\sigma^2_i\sigma^2_j}{\sigma^4},$$

тобто

$$\begin{aligned}S_2(\theta)&=\left(s_2^{ij}(\theta)\right)_{i,j=1}^m\\&=4\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_i(\lambda,\theta)f_j(\lambda,\theta)w^2(\lambda)\,d\lambda-\frac{\sigma^2_i(\theta)}{\sigma^2(\theta)}\int_{-\infty}^{\infty}f_j(\lambda,\theta)f(\lambda,\theta)w^2(\lambda)\,d\lambda\right.\\&\qquad-\frac{\sigma^2_j(\theta)}{\sigma^2(\theta)}\int_{-\infty}^{\infty}f_i(\lambda,\theta)f(\lambda,\theta)w^2(\lambda)\,d\lambda\\&\qquad\left.+\frac{\sigma^2_i(\theta)\sigma^2_j(\theta)}{\sigma^4(\theta)}\int_{-\infty}^{\infty}f^2(\lambda,\theta)w^2(\lambda)\,d\lambda\right)_{i,j=1}^m.\end{aligned}\tag{5.10}$$

**Теорема 5.2.** *За умов* **C2**–**C5**, **N1**–**N3**, **N4′**–**N7′**, **N8** *нормована о.м.к.* $T^{1/2}(\hat\theta_T-\theta_0)$ *асимптотично при* $T\to\infty$ *нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею* $S(\theta_0)=S_1^{-1}(\theta_0)S_2(\theta_0)S_1^{-1}(\theta_0)$, *де матриці* $S_1(\theta)$ *та* $S_2(\theta)$ *задано рівностями* (3.1), (3.2), *або* (5.9), (5.10).

## 6. Приклад

Нехай $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — дробовий рух Рісса–Бесселя [19, 20, 7], тобто гауссівський стаціонарний процес зі с. щ.

$$f(\lambda, \theta_0) = \frac{1}{\lambda^{2\beta_0}(1+\lambda^2)^{\alpha_0}}, \qquad \theta_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \Theta, \tag{6.1}$$

$\Theta$ — обмежена відкрита множина, $\Theta^c$ — компактна підмножина множини $\left(\frac{1}{2}, \infty\right) \times \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Розглянемо вагову функцію [7] $w(\lambda) = \frac{\lambda^{2b}}{(1+\lambda^2)^a}$, $a > b > 0$, і перевіримо виконання умов роботи. За формулою 8.380.3 [21]

$$\sigma^2(\theta) = \sigma^2(\alpha, \beta) = B\left(\frac{1}{2} - \beta + b, a - b + \alpha + \beta - \frac{1}{2}\right). \tag{6.2}$$

Оскільки за умови **C3** $f \in L_2(\mathbb{R})$, то має бути $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Якщо припустити, що при $\theta_1 \neq \theta_2 \psi(\lambda, \theta_1) = \psi(\lambda, \theta_2)$ м.с., то $\frac{f(\lambda,\theta_1)}{f(\lambda,\theta_2)} = \frac{\sigma^2(\theta_1)}{\sigma^2(\theta_2)}$ м. с., чого не може бути. Таким чином, умову **C3** виконано. Коли $\beta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, то нерівність $b > \frac{1}{4}$, яку ми будемо вважати виконаною до кінця розділу, забезпечує вірність **C4$'$**.

Оберемо в умові **C5$'$** рівномірно неперервну функцію [7]

$$v(\lambda) = \frac{\lambda^{2b'}}{(1+\lambda^2)^{a'}}, \qquad a' > b' > 0, \tag{6.3}$$

Функція $v(\lambda) \ln f(\lambda, \theta)$ рівномірно неперервна в $\mathbb{R} \times \Theta^c$. З іншого боку, умова **C5$'$(ii)** виконується, якщо

$$a - a' > b - b' > 0. \tag{6.4}$$

Очевидно, $f(\lambda, \theta)$ двічі диференційовна за $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta^c$ при кожному $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Для $\lambda \neq 0$ $f_\alpha(\lambda, \theta) = -f(\lambda, \theta)\ln(1+\lambda^2)$, $f_\beta(\lambda, \theta) = -f(\lambda, \theta) \ln \lambda^2$,

$$\begin{gathered} f_{\alpha\alpha}(\lambda, \theta) = f(\lambda, \theta)\ln^2(1+\lambda^2), \qquad f_{\alpha\beta}(\lambda, \theta) = f(\lambda, \theta)\ln(1+\lambda^2)\ln\lambda^2, \\ f_{\beta\beta}(\lambda, \theta) = f(\lambda, \theta)\ln^2\lambda^2. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Бачимо, що функції зі списку (5.7) можуть бути продовжені за неперервністю при кожному фіксованому $\theta \in \Theta^c$ до функцій, означених на $\mathbb{R}$.

Легко також побачити, що умова **N4$'$** виконується без додаткових обмежень.

Якщо в умові **N5$'$** ми візьмемо функцію $v$ вигляду (6.3), то умова (6.4) забезпечує її вірність. У свою чергу, умова **N6$'$** має місце, коли $a - b > \frac{1}{2}$. Виконання умови **N7$'$** не потребує нових обмежень.

Завдяки властивостям похідних (6.5), за формулою (5.9)

$$S_1(\theta) = \left(s_1^{ij}(\theta)\right)_{i,j=1}^2 = -\left(\sigma_{ij}^2(\theta) - \frac{\sigma_i^2(\theta)\sigma_j^2(\theta)}{\sigma^2(\theta)}\right)_{i,j=1}^2, \tag{6.6}$$

де індекси 1 та 2 відповідають диференціюванню за $\alpha$ та $\beta$. Таким чином,

$$s_1^{11}(\theta) = -\sigma^2(\theta)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2(1+\lambda^2)\psi(\lambda, \theta)w(\lambda)\,d\lambda - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1+\lambda^2)\psi(\lambda, \theta)w(\lambda)\,d\lambda\right)^2\right];$$

$$s_1^{22}(\theta) = -\sigma^2(\theta)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \ln^2\lambda^2\psi(\lambda, \theta)w(\lambda)\,d\lambda - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ln\lambda^2\psi(\lambda, \theta)w(\lambda)\,d\lambda\right)^2\right];$$

$$\begin{aligned}
s_1^{12}(\theta) &= s_1^{21}(\theta) \\
&= -\sigma^2(\theta)\Bigg[\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1+\lambda^2)\ln\lambda^2 \psi(\lambda,\theta) w(\lambda)\, d\lambda \\
&\qquad - \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1+\lambda^2)\psi(\lambda,\theta)w(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \ln\lambda^2\psi(\lambda,\theta)w(\lambda)\,d\lambda\Bigg].
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Розглянемо випадкові величини $\xi$, $\eta = \ln\xi^2$, $\zeta = \ln(1+\xi^2)$, де $\xi$ має щільність $\psi(\lambda,\theta)w(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Формули (6.7) показують, що

$$S_1(\theta) = -\sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{D}\,\eta & \operatorname{cov}(\eta,\zeta) \\ \operatorname{cov}(\zeta,\eta) & \mathbf{D}\,\zeta \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Оскільки коваріаційна матриця випадкового вектора $(\eta,\zeta)'$ додатно визначена, то матриця $S_1(\theta)$, $\theta \in \Theta$, від'ємно визначена (див. коментар після умови **N8**).

Діючи аналогічно, формули (5.10) для елементів матриці $S_2(\theta)$ можна переписати у наступному вигляді:

$$s_2^{11}(\theta) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big(\sigma^2(\theta)\ln(1+\lambda^2) - \sigma_1^2(\theta)\big)^2 \psi^2(\lambda,\theta) w^2(\lambda)\,d\lambda;$$

$$s_2^{22}(\theta) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big(\sigma^2(\theta)\ln\lambda^2 - \sigma_2^2(\theta)\big)^2 \psi^2(\lambda,\theta) w^2(\lambda)\,d\lambda;$$

$$\begin{aligned}
s_2^{12}(\theta) &= s_2^{21}(\theta) \\
&= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big(\sigma^2(\theta)\ln(1+\lambda^2) - \sigma_1^2(\theta)\big)\big(\sigma^2(\theta)\ln\lambda^2 - \sigma_2^2(\theta)\big)\psi^2(\lambda,\theta) w^2(\lambda)\,d\lambda.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Бачимо, що для довільного вектора $u = (u_1,u_2)' \neq 0$

$$\begin{aligned}
\langle S_2(\theta)u, u\rangle &= 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \big|(\sigma^2(\theta)\ln(1+\lambda^2) - \sigma_1^2(\theta))u_1 + (\sigma^2(\theta)\ln\lambda^2 - \sigma_2^2(\theta))u_2\big|^2 \\
&\qquad\qquad \times \psi^2(\lambda,\theta)w^2(\lambda)\,d\lambda \\
&> 0,
\end{aligned}$$

тобто умову **N8** виконано.

## 7. Оцінювання коваріаційної матриці оцінки мінімального контрасту

Розглянемо коротко питання про оцінювання асимптотичної коваріаційної матриці $S(\theta_0)$ в формулюванні Теореми 5.2. Зауважимо, що умова $\mathbf{N5'}$(iii) забезпечує неперервність елементів матриці $S_1(\theta)$, $\theta \in \Theta^c$. У свою чергу, $\mathbf{N5'}$(iii) та $\mathbf{N7'}$ дозволяє зробити такий же висновок відносно елементів матриці $S_2(\theta)$, $\theta \in \Theta^c$. Таким чином, з Теореми 5.2 випливає

**Наслідок 7.1.** *За умов Теореми 5.2*

$$S(\hat\theta_T) \xrightarrow{\mathsf{P}} S(\theta_0), \qquad T \to \infty,$$

*поелементно, тобто $S(\hat\theta_T)$ є слабко консистентною оцінкою матриці $S(\theta_0)$.*

## Література

1. A. V. Ivanov, *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*, Kluwer AP, Dordrecht–Boston–London, 1997.
2. О. В. Іванов, К. К. Москвичова, *Стохастичний асимптотичний розклад корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії*, Теорія ймов. та матем. статист. **90** (2014), 77–90.

3. О. В. Іванов, К. К. Москвичова, *Асимптотичний розклад моментів корелограмної оцінки коваріаційної функції випадкового шуму в нелінійній моделі регресії*, Укр. мат. журн. **66** (2014), №6, 787–805.
4. H. L. Koul and D. Surgailis, *Asymptotic normality of the Wittle estimator in linear regression models with long memory errors*, Statistical Inference for Stochastic Processes (2000), №3, 129–147.
5. О. В. Іванов, В. В. Приходько, *Про оцінку Уітла параметра спектральної щільності випадкового шуму в моделі нелінійної регресії*, Укр. мат. журн. **67** (2015), №8, 1050–1067.
6. A. V. Ivanov and N. N. Leonenko, *Semiparametric analysis of long-range dependence in nonlinear regression*, J. Statist. Planning and Inference (2008), №138, 1733–1753.
7. V. V. Anh, N. N. Leonenko, and L. M. Sakhno, *On a class of minimum contract estimators for fractional stochastic processes and fields*, J. Statist. Planning and Inference (2004), №123, 161–185.
8. N. N. Leonenko and L. M. Sakhno, *On the Whittle estimators for some classes of continuous-parameter random processes and fields*, Statistic & Probability Letters (2006), №76, 781–795.
9. I. A. Ibragimov, *On maximum likelihood estimation of parameters of the spectral density of stationary time series*, Theory Prob. Appl. **12** (1967), №1, 115–119.
10. N. N. Leonenko and E. M. Moldavs'ka, *Minimum contrast estimators of a parameter of the spectral density of continuous time random fields*, Theor. Probab. Math. Statist. (1999), №58, 101–112.
11. С. Р. Рао, *Линейные статистические методы и их применения*, "Наука", Москва, 1968.
12. A. V. Ivanov and N. N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields*, "Kluwer AP", Dordrecht–Boston–London, 1989.
13. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, and I. N. Savich, *Limit theorems for weighted nonlinear transformation of Gaussian stationary processes with singular spectra*, Ann. Probab. **41** (2013), №2, 1088–1114.
14. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina and B. M. Zhurakovsky, *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics **41** (2015), №1, 156–186.
15. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, "Наука", Москва, 1965.
16. И. А. Ибрагимов, *Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса*, Теория вероят. и ее примен. **4** (1963), №VIII, 391–430.
17. Р. Бенткус, *Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса*, Литовский мат. сборник **1** (1972), №XII, 55–71.
18. R. M. Espejo, N. N.Leonenko, A. Olenko, and M. D. Ruiz-Medina, *On a class of minimum contrast estimators for Gegenbauer random fields*, Test (2015), №23.
19. V. V. Anh, J. M. Angulo, and M. D. Ruiz-Medina, *Possible long-range dependence in fractional random field*, J. Statist. Plan. Inference **80** (1999), №1/2, 95–110.
20. V. V. Anh, N. N. Leonenko, and R. McVinish, *Models for fractional Riesz–Bessel motion and related processes*, Fractals **3** (2001), №9, 329–346.
21. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 4-е изд., "Наука", Москва, 1963.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", проспект Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна

*Адреса електронної пошти*: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", проспект Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна

*Адреса електронної пошти*: vikaprihodko@ukr.net

Надійшла 25/08/2015