Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 93, 2015, стор. 67–74

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 93, 2015, pp. 67–74

УТОЧНЕННЯ УМОВ ЗБІЖНОСТІ МАЙЖЕ НАПЕВНО РЯДІВ БАГАТОВИМІРНИХ РЕГРЕСІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

УДК 519.21

М. К. ІЛЬЄНКО

Анотація. В цій роботі встановлюється загальний критерій збіжності майже напевно рядів елементів багатовимірних авторегресійних послідовностей з довільними, в тому числі виродженими матричними коефіцієнтами. Це доповнює попередні результати В. В. Булдигіна та М. К. Руновської, в яких розглядалися необхідні і достатні умови збіжності майже напевно рядів багатовимірних гауссівських марковських послідовностей з невиродженими матричними коефіцієнтами.

Abstract. In this paper we obtain a general criterion for the almost sure convergence of a series whose terms are elements of multi-dimensional autoregressive sequences with arbitrary, in particular degenerate matrix coefficients. This result supplements previous results by V. V. Buldygin and M. K. Runovska, where there were studied the necessary and sufficient conditions for the almost sure convergence of series whose terms are multi-dimensional Gaussian Markov sequences with nondegenerate matrix coefficients.

Аннотация. В работе устанавливается общий критерий сходимости почти наверное рядов элементов многомерных авторегресионных последовательностей с произвольными, в том числе вырожденными матричными коэффициентами. Этот результат дополняет предыдущие результаты В. В. Булдыгина и М. К. Руновской, в которых рассматривались необходимые и достаточные условия сходимости почти наверное рядов многомерных гауссовских марковских последовательностей с невырожденными матричными коэффициентами.

1. Вступ

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — скінченновимірний евклідів простір зі скалярним добутком (X, Y) та нормою $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$, $X, Y \in \mathbb{R}^d$. У просторі $\mathbb{R}^d$ розглянемо багатовимірну послідовність випадкових векторів $(X_k) = (X_k, k \geq 1)$, яка задається рекурентними співвідношеннями першого порядку:

$$X_1 = V_1, \qquad X_k = C_k X_{k-1} + V_k, \quad k \geq 2, \tag{1}$$

де (C_k) — невипадкова послідовність $d \times d$-матриць, (V_k) — послідовність незалежних у сукупності симетрично розподілених випадкових векторів з простору $\mathbb{R}^d$. Надалі будемо називати введену послідовність регресійною. Для послідовності (X_k) будемо розглядати випадковий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k. \tag{2}$$

В серії робіт В. В. Булдигіна та М. К. Руновської (див. [3, 4, 7, 8, 5, 6]) досліджувалися необхідні і достатні умови збіжності майже напевно (м.н.) рядів вигляду (2)

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G50, 65B10, 60G15; Secondary 40A05.

Ключові слова і фрази. Багатовимірні авторегресійні послідовності, m-регресійні послідовності випадкових величин, збіжність майже напевно випадкових рядів.

Дослідження автора виконані за сприяння Swiss National Science Foundation, грант № IZ73Z0_152292.

Статтю підготовлено за матеріалами доповіді на міжнародній конференції “Probability, Reliability and Stochastic Optimization (PRESTO-2015)”, 7–10 квітня 2015, Київ, Україна.

в одновимірному та багатовимірному випадках. Найбільш повно напрацювання авторів в цьому напрямку зібрано у монографії [6]. В одновимірній ситуації, тобто при $d = 1$, було знайдено загальний критерій збіжності м.н. рядів, складених з елементів регресійних послідовностей з довільними коефіцієнтами (C_k) (див. [7, 6]). Для багатовимірного випадку, тобто при $d > 1$, аналогічний критерій вдалося встановити лише для регресійних послідовностей з невиродженими матрицями (C_k), див. [8, 5, 6]. Насамперед це пов'язано з тим, що застосований для одновимірного випадку метод збурення нульових коефіцієнтів є надзвичайно громіздким і технічно складним для матриць. Зрозуміло, що випадок невироджених матричних коефіцієнтів значно обмежує загальну ситуацію. Крім того, при розв'язанні деяких споріднених задач можливість розглядати вироджені матриці (C_k) у регресійній схемі (1) є важливою. Це надихнуло автора на пошук іншого шляху доведення загального результату — без використання методу збурення коефіцієнтів послідовності, як це зроблено у роботах [7, 6]. Отже, основною метою цієї роботи є встановлення загального критерію збіжності м.н. ряду (2) для послідовності (1) з довільними, в тому числі виродженими матричними коефіцієнтами (C_k).

Стаття побудована наступним чином: у розділі 2 наведено позначення та попередній результат про умови збіжності м.н. рядів регресійних послідовностей з невиродженими матричними коефіцієнтами. Розділ 3 містить критерій збіжності м.н. ряду (2) для послідовності (1) з довільними, в тому числі виродженими матричними коефіцієнтами (C_k). Зауважимо, що пошук альтернативного шляху доведення достатніх умов збіжності м.н. ряду (2) призвів до уточнення основного результату. У розділі 4 за допомогою результату з розділу 3 покращено умови збіжності м.н. рядів m-регресійних послідовностей.

2. Позначеня та попередні відомості

З метою більш прозорого викладення наведемо необхідні і достатні умови збіжності м.н. ряду (2) для регресійних послідовностей з невиродженими матричними коефіцієнтами, отримані у роботах [5, 6]. Для цього введемо позначення, які будемо використовувати і в основній частині статті. Нехай для $n \geq 1$

$$Q(n,k) = \begin{cases} I + \sum_{l=1}^{n-k} \left(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \right), & 1 \leq k \leq n-1, \\ I, & k = n, \\ \mathcal{O}, & k > n, \end{cases} \tag{3}$$

де $\mathcal{O}$ — нульова $d \times d$-матриця, I — одинична $d \times d$-матриця, і

$$\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j = C_{k+l} C_{k+l-1} \dots C_{k+1}, \qquad l \geq 1.$$

Для $k \geq 1$ розглянемо випадковий ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \right) V_k, \tag{4}$$

та покладемо

$$V(\infty, k) = V_k + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=k+l}^{k+1} C_j \right) V_k,$$

якщо відповідний ряд є збіжним м.н. у нормі простору $\mathbb{R}^d$. Через $\mathfrak{N}^{\infty}$ позначимо клас всіх монотонних послідовностей натуральних чисел, що прямують до нескінченності.

Твердження 2.1. *Для того, щоб випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ збігався м.н., необхідно, а якщо матриці C_k, $k \geq 1$, невироджені, то і достатньо, щоб виконувалися наступні три умови:*

1) *для будь-якого $k \geq 1$ випадковий ряд* (4) *є збіжним м.н.*;
2) *випадковий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} V(\infty, k)$ є збіжним м.н.*;
3) *для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$*

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1}, k) V_k \right\| = 0 \quad \textit{м.н.}$$

3. Критерій збіжності м.н. рядів багатовимірних регресійних послідовностей

Наступна теорема узагальнює твердження 2.1 на випадок довільних матричних коефіцієнтів (C_k). При цьому, доведення достатньої частини теореми 3.1 порівняно з доведенням твердження 2.1 використовує дещо інший підхід, який дав можливість зрозуміти, що насправді умова 2) твердження 2.1 є наслідком умови 3) цього твердження.

Теорема 3.1. *Для того, щоб випадковий ряд* (2) *був збіжним м.н., необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні дві умови*:

I) *для кожного $k \geq 1$ ряд* (4) *є збіжним м.н.*;
II) *для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$*

$$\lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1}, k) V_k \right\| = 0 \qquad \textit{м.н.}$$

Доведення теореми 3.1 цілком ґрунтується на принципі стискання у схемі серій у просторі збіжних послідовностей. Тому перш ніж перейти до доведення наведемо цей принцип.

Нехай $(\mathbb{R}^d)^\infty$ — простір послідовностей елементів простору $\mathbb{R}^d$, а $c(\mathbb{R}^d)$ — простір всіх збіжних послідовностей елементів простору $\mathbb{R}^d$. Нагадаємо, що простір $c(\mathbb{R}^d)$ є сепарабельним банаховим простором з нормою $\|(x_k)\|_\infty = \sup_{k\geq 1} \|x_k\|$, де $(x_k) \in c(\mathbb{R}^d)$. Справедливий наступний принцип стискання у схемі серій для простору $c(\mathbb{R}^d)$ (див. [1, 2]).

Твердження 3.1. *Нехай $(Y_{n,k}; n, k \geq 1)$ — двоіндексовий масив d-вимірних випадкових векторів, який задовольняє наступним умовам*:

а) *для кожного $n \geq 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Y_{n,k}$ є збіжним м.н. у нормі простору $\mathbb{R}^d$;*
б) *послідовності $W_k = (Y_{n,k}, n \geq 1)$, $k \geq 1$, є незалежними і симетричними як випадкові елементи простору $(\mathbb{R}^d)^\infty$.*

Нехай також $Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{n,k}$, $n \geq 1$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

А) $(Z_n, n \geq 1) \in c(\mathbb{R}^d)$ *м.н.*;
Б) $W_k \in c(\mathbb{R}^d)$ *м.н. для будь-якого $k \geq 1$, і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} W_k$ є збіжним м.н. у нормі простору $c(\mathbb{R}^d)$;*
В) $W_k \in c(\mathbb{R}^d)$ *м.н. для будь-якого $k \geq 1$, і* $\lim_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \sup_{n\geq 1} \|\sum_{k=m}^{M} Y_{n,k}\| = 0$ *м.н.*

Доведення теореми 3.1. Спочатку розглянемо послідовність (S_n) часткових сум ряду (2):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad n \geq 1.$$

З рекурентних співвідношень (1) випливає, що послідовність (S_n) може бути зображена наступним чином

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(1,1) \\ Q(2,1) \\ \vdots \\ Q(n,1) \\ \vdots \end{pmatrix} V_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ Q(2,2) \\ \vdots \\ Q(n,2) \\ \vdots \end{pmatrix} V_2 + \dots + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ Q(n,n) \\ \vdots \end{pmatrix} V_n + \dots, \tag{5}$$

тобто

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Q(n,k) V_k, \qquad n \ge 1.$$

Ряд (5) зручно подати у наступній формі

$$\overrightarrow{S} = \sum_{k=1}^{\infty} \overrightarrow{Q}_k V_k, \tag{6}$$

де

$$\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(k,k) \\ Q(k+1,k) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad k \ge 1.$$

Підкреслимо, що ряд (6) збігається покоординатно. Таким чином, послідовність часткових сум (S_n) зображено у вигляді ряду (6) з незалежними симетричними доданками у просторі $(\mathbb{R}^d)^\infty$.

Надалі будемо користуватися твердженням 3.1, в якому згідно з нашими позначеннями

$$(Y_{n,k}; n,k \ge 1) = (Q(n,k)V_k; n,k \ge 1), \qquad W_k = \overrightarrow{Q}_k V_k, \qquad k \ge 1.$$

Зауважимо також, що масив $(Y_{n,k}; n,k \ge 1)$ задовольняє умови а) і б) твердження 3.1. Крім того,

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} Y_{n,k}, \qquad n \ge 1,$$

тобто в твердженні 3.1 $Z_n = S_n$, $n \ge 1$.

Доведемо необхідність. Припустимо, що послідовність часткових сум (S_n) є збіжною м.н., тобто $(S_n) \in c(\mathbb{R}^d)$ м.н. Це означає, що виконується припущення А) твердження 3.1. Тому виконуються умови В) цього твердження, згідно з якими для всіх $k \ge 1$, $\overrightarrow{Q}_k V_k \in c(\mathbb{R}^d)$, м.н. і

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{M \ge m} \sup_{n \ge 1} \left\| \sum_{k=m}^{M} Y_{n,k} \right\| = 0 \quad \text{м.н.}$$

Звідси безпосередньо випливає, що по-перше для всіх $k \ge 1$ ряд (4) є збіжним м.н. у нормі простору $\mathbb{R}^d$, тобто виконується умова I) теореми 3.1, а по-друге для будь-якої послідовності (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$

$$\left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} Q(m_{j+1},k) V_k \right\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{м.н.},$$

тобто виконується умова II) теореми 3.1. Отже, необхідність умов I), II) теореми 3.1 доведено.

Доведемо достатність. Нехай виконуються умови I), II) теореми 3.1. Покажемо, що випадковий ряд (2) є збіжним м.н. Для цього перевіримо умови B) твердження 3.1.

З умови I) теореми 3.1 випливає, що $\overrightarrow{Q}_k V_k \in c(\mathbb{R}^d)$ м.н. для всіх $k \geq 1$.

Покажемо, що

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \sup_{n\geq 1} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{7}$$

Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що із додатною ймовірністю

$$\delta = \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \sup_{n\geq 1} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| > 0.$$

Зауважимо, що за законом "0 та 1" величина δ є невипадковою, оскільки відповідна верхня границя вимірна відносно залишкової σ-алгебри послідовності незалежних векторів (V_k).

Згідно з (3) для всіх $m \geq 1$

$$\sup_{n\geq 1} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| = \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\|.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
\delta &= \varlimsup m\to\infty \sup_{M\geq m} \sup_{n\geq 1} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| = \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| \\
&\leq \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \left(\sup_{m\leq n\leq M} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| + \sup_{n\geq M+1} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| \right) \\
&= \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \left(\sup_{m\leq n\leq M} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sup_{n\geq M+1} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k - \sum_{k=M+1}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| \right) \\
&\leq \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \left(\sup_{m\leq n\leq M} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sup_{n\geq M+1} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| + \sup_{n\geq M+1} \Big\| \sum_{k=M+1}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| \right) \\
&\leq \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \left(\sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{M} Q(n,k)V_k \Big\| \right. \\
&\left. + \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| + \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=M+1}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| \right) \\
&= \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{M\geq m} \left(3 \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| \right) = 3 \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k \Big\|,
\end{aligned}$$

то із додатною ймовірністю

$$\delta_1 = \varlimsup_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| \geq \frac{\delta}{3}.$$

Зауважимо, що величина δ_1 також є невипадковою, оскільки відповідна верхня границя вимірна відносно залишкової σ-алгебри послідовності незалежних векторів (V_k), тобто

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \Big\| \sum_{k=m}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| \geq \frac{\delta}{3} \quad \text{м.н.}$$

Звідси випливає, що існує $\varepsilon \in (0,\delta_1)$ і монотонна підпослідовність (m_j^*) послідовності натуральних чисел така, що

$$\sup_{n\geq m_j^*} \Big\| \sum_{k=m_j^*}^{n} Q(n,k)V_k \Big\| > \varepsilon.$$

Тоді для кожного фіксованого m_j^* послідовності (m_j^*) існує таке $n_j^* \geq m_j^*$, що

$$\Big\| \sum_{k=m_j^*}^{n_j^*} Q(n_j^*,k)V_k \Big\| > \varepsilon. \tag{8}$$

Розглянемо нову послідовність (l_j), яка складена почергово з елементів послідовностей (m_j^*-1) та (n_j^*) таким чином, що послідовність (l_j) є монотонною. Не обмежуючи загальності можна вважати, що послідовність (l_j) вже має наступний вигляд

$$m_1^*-1, \quad n_1^*, \quad m_2^*-1, \quad n_2^*, \quad m_3^*-1, \quad n_3^*, \quad \ldots,$$

інакше з послідовності (l_j) можна вибрати підпослідовність такого вигляду. Зрозуміло, що послідовність (l_j) належить класу $\mathfrak{R}^\infty$. Тоді зі співвідношення (8) отримаємо, що для всіх $j \geq 1$

$$\Big\| \sum_{k=l_{2j-1}+1}^{l_{2j}} Q(l_{2j},k)V_k \Big\| > \varepsilon.$$

Проте умова II) теореми 3.1 стверджує, що для довільної послідовності (m_i) з класу $\mathfrak{R}^\infty$

$$\Big\| \sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}} Q(m_{i+1},k)V_k \Big\| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{м.н.}$$

Звідси випливає, що для побудованої послідовності (l_j) ми отримали протиріччя з умовою II) теореми 3.1.

Таким чином, виконується співвідношення (7), а отже виконуються умови B) твердження 3.1, згідно з яким існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ м.н., тобто ряд (2) є збіжним м.н. Теорему 3.1 доведено повністю. $\square$

Зауваження 3.1. Порівнюючи умови теореми 3.1 з умовами твердження 2.1 бачимо, що в твердженні 2.1 присутня умова 2), яка вимагає збіжність м.н. ряду $\sum_{k=1}^{\infty} V(\infty,k)$. При доведенні достатньої частини теореми 3.1 вона не використовувалася. Дійсно, повторюючи міркування аналогічні тим, що наведені у доведенні теореми 3.1, можна показати, що умова 2) твердження 2.1 випливає з умови 3) твердження 2.1. Ключовим моментом при цьому є те, що масив $(Y_{n,k}; n,k\geq 1)$ в нашому випадку має трикутний вигляд, оскільки $Q(n,k) = \mathcal{O}$ при $k > n$.

Зауваження 3.2. Оскільки умова 3) твердження 2.1 є більш складною для перевірки ніж умова 2) цього твердження, природньо поставити питання, в яких випадках умову 3) твердження 2.1 можна замінити на умову 2) цього твердження.

Виявляється, що в деяких випадках умови 2) і 3) твердження 2.1 дійсно еквівалентні (див. [3, 4, 6]). Наприклад, якщо одновимірна регресійна послідовність, тобто при $d = 1$, має всі невід'ємні коефіцієнти (C_k), то для збіжності ряду (2) необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови 1) і 2) твердження 2.1. Проте, в загальному випадку припущення 3) твердження 2.1 є більш сильним. Відповідний приклад послідовності, для якої виконується умова 2) твердження 2.1 і не виконується умова 3) цього твердження, наведено у праці [6].

4. Ряди m-регресійних послідовностей

Важливою особливістю дослідження збіжності м.н. рядів багатовимірних регресійних послідовностей є те, що до них зводиться задача про умови збіжності м.н. m-регресійних послідовностей випадкових величин.

Розглянемо послідовність випадкових величин (ξ_k), задану системою рекурентних співвідношень порядку m:

$$\begin{gathered}\xi_{1-m} = \dots = \xi_{-1} = \xi_0 = 0,\\ \xi_k = b_1^{(k)}\xi_{k-1} + b_2^{(k)}\xi_{k-2} + \dots + b_m^{(k)}\xi_{k-m} + \theta_k, \qquad k \ge 1,\end{gathered} \tag{9}$$

де (θ_k) — послідовність незалежних симетрично розподілених випадкових величин таких, що $\mathsf{P}\{\theta_k = 0\} < 1$, $k \ge 1$, а $(b_j^{(k)}; 1 \le j \le m, k \ge 1)$ — невипадковий масив дійсних чисел.

Від m-регресійної послідовності (ξ_k) за допомогою матриць Фробеніуса (див. [2]) можна перейти до багатовимірної регресійної послідовності у просторі $\mathbb{R}^m$:

$$X_1 = V_1, \qquad X_k = C_k X_{k-1} + V_k, \quad k \ge 2, \tag{10}$$

якщо покласти

$$X_k = \begin{pmatrix}\xi_k\\ \xi_{k-1}\\ \dots\\ \xi_{k-m+1}\end{pmatrix}, \qquad V_k = \begin{pmatrix}\theta_k\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}, \qquad C_k = \begin{pmatrix} b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & \dots & b_{m-1}^{(k)} & b_m^{(k)}\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix},$$
$$k \ge 2.$$

При цьому випадковий ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum_{k=1}^\infty X_k$ є збіжним м.н. у просторі $\mathbb{R}^m$. Таким чином, наступна теорема є наслідком теореми 3.1.

Теорема 4.1. *Випадковий ряд $\sum_{k=1}^\infty \xi_k$ є збіжним м.н. тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови*:

i) *для кожного $k \ge 1$ є збіжним невипадковий ряд $\sum_{l=0}^\infty u_{k+l}^{(k+1)}$, де $(u_n^{(j)}, n \ge j)$ — невипадкова рекурентна послідовність, задана співвідношеннями*

$$\begin{gathered}u_{k-m+1}^{(k+1)} = u_{k-m+2}^{(k+1)} = \dots = u_{k-1}^{(k+1)} = 0, \qquad u_k^{(k+1)} = 1,\\ u_n^{(k+1)} = b_1^{(n)} u_{n-1}^{(k+1)} + b_2^{(n)} u_{n-2}^{(k+1)} + \dots + b_m^{(n)} u_{n-m}^{(k+1)}, \qquad n \ge k+1;\end{gathered}$$

ii) *для всіх послідовностей (m_j) з класу $\mathfrak{R}^\infty$*

$$\left\| \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}} \left(\sum_{l=0}^{m_{j+1}-k} u_{k+l}^{(k+1)} \right) \theta_k \right\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{м.н.}$$

Зауваження 4.1. Порівняно з відповідними результатами з робіт [8, 5, 6], в яких m-регресійні послідовності розглядалися за припущення, що $b_m^{(k)} \neq 0$, $k \geq 1$, теорема 4.1 доповнює і уточнює достатні умови збіжності м.н. рядів m-регресійних послідовностей на випадок довільних коефіцієнтів $(b_j^{(k)}; 1 \leq j \leq m, k \geq 1)$.

5. Висновки

У статті отримано уточнення необхідних і достатніх умов збіжності м.н. рядів багатовимірних регресійних послідовностей на випадкок довільних матричних коефіцієнтів. Це дозволило сформулювати необхідні і достатні умови збіжності м.н. рядів елементів m-регресійних послідовностей випадкових величин з довільними коефіцієнтами. Отримані результати планується застосувати до дослідження посиленого закону великих чисел у формі Марцинкевича-Зігмунда для сум елементів регресійних послідовностей.

Література

1. В. В. Булдыгин, С. А. Солнцев, *Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин*, Київ, "Наукова думка", 1989.
2. V. V. Buldygin and S. A. Solntsev, *Asymptotic Behavior of Linearly Transformed Sums of Random Variables*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
3. V. V. Buldygin and M. K. Runovska, *On the convergence of series of autoregressive sequences*, Theory of Stochastic Processes **15(31)** (2010), no. 1, pp. 7–14.
4. V. V. Buldygin and M. K. Runovska, *On the convergence of series of autoregressive sequences in Banach spaces*, Theory of Stochastic Processes **16(32)** (2010), no. 1, pp. 29–38.
5. V. V. Buldygin and M. K. Runovska, *Almost sure convergence of the series of Gaussian Markov sequences*, Communication in Statistics. Theory and Methods **40** (2011), no. 19–20, pp. 3407–3424.
6. V. V. Buldygin and M. K. Runovska, *Sums Whose Terms Are Elements of Linear Random Regression Sequences*, Lambert Academic Publishing, 2014.
7. М. К. Руновська, *Збіжність рядів, складених з елементів гауссівських марковських послідовностей*, Теор. ймовір. та матем. статист. **83** (2010), 125–137.
8. М. К. Руновська, *Збіжність рядів, складених з елементів багатовимірних гауссівських марковських послідовностей*, Теор. ймовір. та матем. статист. **84** (2011), 131–141.

Кафедра математичного аналізу і теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "КПІ", просп. Перемоги, 37, Київ 03056, Україна

Адреса електронної пошти: matan@kpi.ua

Надійшла 14/06/2015