Теорія ймовір. та матем. статист.
Вип. 94, 2016, стор. 93–115

Teor. Ĭmovir. ta Matem. Statyst.
No. 94, 2016, pp. 93–115

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛЕННЯ МАЛЛЯВЕНА ДО ТОЧНОГО І НАБЛИЖЕНОГО ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ НА АКЦІЇ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ ВОЛАТИЛЬНІСТЮ

УДК 519.21

С. В. КУЧУК-ЯЦЕНКО, Ю. С. МІШУРА І Є. Ю. МУНЧАК

Анотація. Статтю присвячено моделям фінансових ринків зі стохастичною волатильністю, яка задається функціоналом від процесу Орнштейна–Уленбека або від процесу Кокса–Інгерсолла–Росса. Досліджується питання точного обчислення ціни Європейського опціона купівлі. Із застосуванням методів числення Маллявена встановлено вигляд функції щільності випадкової величини, яка виражає середнє значення волатильності протягом часу до виконання опціона. Отриманий результат дозволяє обчислити ціну опціона за мінімальною мартингальною мірою у випадку, коли вінерівський процес, що породжує еволюцію ціни активу, та вінерівський процес, який задає волатильність, є незалежними.

Abstract. The article is devoted to models of financial markets with stochastic volatility, which is defined by a functional of Ornstein-Uhlenbeck process or Cox-Ingersoll-Ross process. We study the question of exact price of European option. The form of the density function of the random variable, which expresses the average of the volatility over time to maturity is established using Malliavin calculus. The result allows us to calculate the price of the option with respect to minimum martingale measure when the Wiener process driving the evolution of asset price and the Wiener process, which defines volatility, are uncorrelated.

Аннотация. Статья посвящена моделям финансовых рынков со стохастической волатильностью, которая задается функционалом от процесса Орнштейна–Уленбека или от процесса Кокса–Ингерсолла–Росса. Исследуется вопрос точного вычисления цены Европейского опциона покупки. С применением методов исчисления Маллявена установлен вид функции плотности случайной величины, которая выражает среднее значение волатильности в течение времени до выполнения опциона. Полученный результат позволяет вычислить цену опциона по минимальной мартингальной мере в случае, когда винеровский процесс, порождающий эволюцию цены актива, и винеровский процесс, который задает волатильность, являются независимыми.

1. Вступ

Точне і наближене обчислення цін опціонів на акції у моделях зі стохастичною волатильністю є предметом постійних досліджень протягом останніх десятиліть. Мотивацією цих пошуків є ряд факторів, найвагомішими з яких є бажання вдосконалити класичну модель Блека-Шоулса, а також зростання обчислювальних можливостей. З числа фундаментальних робіт у цьому напрямку можна виділити [9], [10], [30], [31]. Автори перерахованих досліджень розглядали ціну опціону як розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних за двома змінними, ціною активу та волатильністю, отриманого у роботі [7]. Автори [10] отримали наближення ціни опціону шляхом розкладу у степеневий ряд з урахуванням умовного розподілу ціни активу відносно середнього значення волатильності. У роботах [9] та [30] отримано аналітичні формули із застосуванням оберненого перетворення Фур'є у випадку відсутності кореляції між ціновим процесом та процесом, що описує волатильність. На

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 91B25, 91G20; Secondary 60H07.

Ключові слова і фрази. Модель Блека–Шоулса, стохастична волатильність, оцінювання опціонів, числення Маллявена.

противагу цим підходам у [31] для розв'язання згаданого диференціального рівняння застовується метод скінченних різниць, що дозволяє дослідити задачу у найбільш загальній постановці.

Результати, отримані у згаданих вище роботах, відкрили шляхи для нових досліджень. Зокрема, обернене перетворення Фур'є у різних варіаціях досі залишається популярним інструментом при виведенні аналітичних формул для цін опціонів у різноманітних моделях. Серед більш пізніх робіт, у яких розглядаються питання відшукання точних або наближених значень цін опціонів, можна виділити [19], де аналітичний вираз для ціни опціону знайдено для класу негаусових моделей зі стохастичною волатильністю, яка задається процесом Орнштейна-Уленбека (див. також [2]). Згадаємо також результати зі статей [6], [8], [13], [25], де автори встановлювали вигляд наближених та точних формул цін опціонів у різних моделях. Зокрема, у [6] досліджуються моделі дифузії зі стрибками, для яких застосуванням перетворення Фур'є отримано аналітичні вирази для ціни опціона. У [25] для моделі, у якій ціна активу еволюціонує відповідно до геометричного броунівського руху, а волатильність задається експонентою від процесу Орнштейна- Уленбека, застосовано поліноми Ерміта для отримання шуканого наближення. Схожа модель розглядається і у [13]: волатильність вважається деякою функцією від процесу Орнштейна-Уленбека. У припущенні, що ціновий процес і процес волатильності некорельовані, із застосуванням перетворення Фур'є виведено аналітичну формулу для ціни опціону Європейського типу. У [14] для аналогічної моделі запропоновано підхід для отримання наближеної оцінки для ціни опціона із застосуванням дискретизації методом Ейлера-Маруями, визначено швидкість збіжності оцінки до точного значення при зменшенні довжини інтервалу. У [16] досліджується швидкість збіжності цін опціонів купівлі та продажу при слабкій збіжності цін ризикових активів в моделі з дискретним часом до моделі Блека-Шоулса. В роботі [17] розглядається дискретна апроксимаційна схема цін акцій, змодельованих геометричним процесом Орнштейна-Уленбека, оцінюється швидкість збіжності об'єктивних та справедливих цін опціонів. Автор [8] застосовує методи симетрії Лі для розв'язання згаданих вище диференціальних рівнянь у частинних похідних у моделі "3/2", тобто у моделі, у якій волатильність є розв'язком стохастичного диференціального рівняння $dY_t = Y_t(y - \alpha Y_t)dt + kY_t^{3/2}dW_t$. Зацікавлений читач може знайти більше оглядової інформації про дослідження моделей фінансових ринків зі стохастичною волатильністю, наприклад, у [27].

Перешкодою при точному обчисленні є те, що ціна опціону на акцію зі стохастичною волатильністю залежить від інтегрального функціонала, який, в свою чергу, залежить від всієї траєкторії процесу, що описує волатильність. Розподіл цього інтегрального функціоналу апріорі невідомий. Але за допомогою числення Маллявена щільність розподілу функціонала від стохастичної волатильності можна знайти, що і зроблено в даній статті.

Дослідження задач фінансової математики методами числення Маллявена набуло поширення після представлення застосування формули Кларка-Окона до задачі формування оптимальних порфтелів цінних паперів у [24]. У роботі [12] за допомогою числення Маллявена отримано формули для обчислення так званих "греків" – величин, що виражають чутливість цін деривативів, здебільшого опціонів, до змін параметрів моделі. Таке застосування залишається чи не найбільш поширеним і до сьогодні. Розвиток отримали і інші застосування числення Маллявена (див. [20], [26], [22] та посилання у цих джерелах).

Статтю побудовано наступним чином. У розділі 2 представлено деякі властивості моделей Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна-Уленбека або процесу Кокса–Інгерсолла–Росса. Наводяться відомості щодо відсутності арбітражу у моделях, а також зображення ціни Європейського опціону. Базові поняття числення Маллявена та деякі попередні результати наводяться у розділі 3 перед основним результатом роботи – теоремою про вигляд щільності розподілу середньої волатильності. Після цього записано ціну опціону через знайдену щільність. Розділ 4 містить допоміжні факти та доведення допоміжних результатів, зокрема, стохастичні похідні від функціоналів, пов'язаних зі стохастичною волатильністю.

2. Властивості моделі Блека-Шоулса зі стохастичною волатильністю, що задається функцією від процесу Орнштейна-Уленбека або від процесу Кокса-Інгерсолла-Росса. Допоміжний підрахунок ціни опціону

2.1. **Деякі властивості моделі фінансового ринку зі стохастичною волатильністю, яка описується процесом Орнштейна-Уленбека.** Нехай задано повний імовірнісний простір $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^{(W,\widetilde{W})}, t \geq 0\}, \mathbb{P}\}$ з фільтрацією, породженою двома вінерівськими процесами $\{W_t, \widetilde{W}_t, 0 \leq t \leq T\}$. Розглянемо модель ринку з одним безризиковим і одним ризиковим активом, причому ціна безризикового активу задається невипадковою експонентою $B_t = \mathrm{e}^{rt}$, де $r > 0$, а ціна ризикового активу задається геометричним броунівським рухом $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ зі стохастичною волатильністю, яка в свою чергу є вимірною функцією від іншого стохастичного процесу. В роботі припускаємо, що другий процес може бути процесом Орнштейна–Уленбека або процесом Кокса–Інгерсолла–Росса. В даному підрозділі розглядається перший випадок. Більш точно, ринок описується парою стохастичних диференціальних рівнянь, з яких перше є лінійним відносно ціни акції, а друге – рівнянням Ланжевена:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dW_t, \tag{1}$$

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + k d\widetilde{W}_t. \tag{2}$$

Позначимо S_0 і Y_0 невипадкові початкові значення процесів, визначених рівняннями (1)–(2), відповідно. Позначимо також

$$\overline{X}_t = (1, X_t) = (1, e^{-rt} S_t)$$

вектор дисконтованих цін активів.

З метою технічного спрощення припустимо, що коефіцієнти ринкової моделі задовольняють наступні умови.

(A1) вінерівські процеси W і $\widetilde{W}$ є некорельованими, а отже, незалежними;
(A2) функція волатильності $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ вимірна, віддалена від нуля і має не більш ніж поліноміальне зростання, тобто $c \leq \sigma(x) \leq q(1 + |x|^l)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ та деяких додатних сталих c, q і деякого $l \in \mathbb{N}$.
(A3) коефіцієнти α і k є додатними.

Розв'язок рівняння (1) має вид

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(Y_s) ds + \int_0^t \sigma(Y_s) dW_s\right).$$

Відповідний дисконтований актив має вигляд

$$X_t = S_0 \exp\left((\mu - r)t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(Y_s) ds + \int_0^t \sigma(Y_s) dW_s\right)$$

і задовольняє рівняння

$$dX_t = (\mu - r)dt + \sigma(Y_s) X_s dW_s. \tag{3}$$

На основі рівняння (3) ми можемо подати дисконтований ціновий процес як $X_t = S_0 + M_t + A_t$, де $M_t = \int_0^t \sigma(Y_s)X_s dW_s$ – неперервний локальний мартингал, $A_t = (\mu - \sigma)t$ – неперервний процес обмеженої варіації. Процес Орнштейна–Уленбека (ОУ), що задається рівнянням (2), є зручним інструментом для моделювання волатильності на фінансових ринках, в силу своєї властивості mean-reversion – повернення до середнього. Цей процес є гаусовим з наступними характеристиками:

$$\mathbb{E}[Y_t] = Y_0 \,\mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \mathrm{Var}[Y_t] = \frac{k^2}{2\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t}).$$

Крім того, процес ОУ є марківським і може бути представлений у явному вигляді:

$$Y_t = Y_0 \,\mathrm{e}^{-\alpha t} + k \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)} \, d\widetilde{W}_s.$$

2.2. **Опис та деякі властивості моделі зі стохастичною волатильністю, що описується процесом Кокса–Інгерсолла–Росса.** Тепер розглянемо фінансовий ринок з одним безризиковим і одним ризиковим активом, причому ціна безризикового активу як і раніше задається функцією $B_t = \mathrm{e}^{rt}$, де $r > 0$, а ціна ризикового активу задається наступними стохастичними диференціальними рівняннями

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{Z_t} S_t dW_t, \tag{4}$$

$$dZ_t = (b - Z_t)dt + k\sqrt{Z_t} d\widetilde{W}_t. \tag{5}$$

Позначимо $Z_0 > 0$ невипадкове початкове значення процесу, визначеного рівнянням (5). Нехай виконуються умови $(A1)$ і

(A3') коефіцієнти b і k є додатними і $k^2 < 2b$.

Розв'язок рівняння (4) має вид

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s ds + \int_0^t \sqrt{Z_s} dW_s\right).$$

Процес Кокса–Інгерсолла–Росса (КІР), що задається рівнянням (5), має наступні характеристики

$$\mathbb{E}[Z_t] = Z_0 \,\mathrm{e}^{-t} + b(1 - \mathrm{e}^{-t}),$$

$$\mathrm{Var}[Z_t] = Z_0 k^2(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) + \frac{bk^2}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^2.$$

Згідно зі статтею [3], умова $k^2 < 2b$ є необхідною і достатньою для того, щоб процес Z приймав додатні значення і не заходив у нуль. Модель (4)–(5) називається моделлю Хестона.

2.3. **Безарбітражність, неповнота та еквівалентні мартингальні міри у моделі зі стохастичною волатильністю, що описується процесом Орнштейна–Уленбека.** Питання безарбітражності моделі (1)–(2) є ключовим при оцінюванні опціонів. Воно було детально досліджено в статті [13], зараз ми наведемо лише основні твердження. Відомо, що існує декілька означень безарбітражності для семімартингальних моделей з неперервним часом. Вони докладно описані в книгах [4] та [28] та розрізняються, зокрема, класами допустимих торгівельних стратегій. Ми розглянемо поняття безарбітражності у сенсі $\overline{NA_g}$ ([4, 28]), тобто у випадку, коли клас допустимих стратегій складається з таких самофінансованих стратегій, для яких максимальний збиток або борг за портфелем у будь-який момент часу $t \in [0, T]$ обмежений знизу скалярним добутком $(\overline{g}, \overline{X}_t)$, де $\overline{g}$ – деякий вектор з додатними компонентами, а $\overline{X}_t$ – вектор дисконтованих цін активів, представлених на ринку. Природним чином, відсутність арбітражу пов'язана з наявністю мартингальних мір.

Означення 2.1. Імовірнісна міра $\mathbb{Q}$, еквівалентна до об'єктивної міри $\mathbb{P}$, називається еквівалентною мартингальною мірою, якщо дисконтований ціновий процес є мартингалом за мірою $\mathbb{Q}$.

Згідно з теоремою 2, [28, ст. 653], з існування мартингальної міри випливає безарбітражність нашої моделі в сенсі $\overline{NA_g}$.

Далі, в силу стандартної теореми Гірсанова, "кандидатами" на роль мартингальних є всі ймовірнісні міри $\mathbb{Q}$, звуження похідної Радона–Нікодима яких на $\mathcal{F}_t$ має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(&\int_0^t (r-\mu)/\sigma(Y_s)dW_s + \int_0^t \nu_s d\widetilde{W}_s \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t ((r-\mu)^2/\sigma^2(Y_s) + \nu_s^2)ds\Big),\end{aligned} \tag{6}$$

де $\nu = (\nu_t)_{0\le t\le T}$ –прогресивно вимірний процес, для якого $\int_0^T \nu_s^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}$-м.н.. Очевидно також, що за умови (A2) відокремленості волатильності від нуля, а також у припущенні, що процес ν є обмеженим, всі функції множин $\mathbb{Q}$, похідна Радона–Нікодима яких задається рівністю (6), задають мартингальні міри. Оскільки еквівалентна мартингальна міра не єдина, ринок є неповним. Відносно еквівалентної мартингальної міри $\mathbb{Q}$ з похідною Радона–Нікодима (6) пара процесів (S_t, Y_t) має наступне зображення:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(Y_t)S_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ dY_t &= (-\alpha Y_t - k\nu(t))\,dt + kd\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

де, за двовимірною версією теореми Гірсанова (див., наприклад, теорему 5.4.1, [29]), процеси

$$\begin{aligned} W_t^{\mathbb{Q}} &= W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(Y_s)}ds, \\ \widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} &= \widetilde{W}_t + \int_0^t \nu(s)ds, \end{aligned}$$

є незалежними вінерівськими процесами відносно $\mathbb{Q}$.

Очевидно, серед усіх мір, що задаються рівністю (6), найпростіший вигляд має та, для якої $\nu(s) \equiv 0$. Одночасно, згідно з теоремою 5.1 з [13], ця міра є мінімальною мартингальною мірою, у розумінні наступного означення.

Означення 2.2. Нехай ціна дисконтованого активу на фінансовому ринку – це $\mathbb{P}$-семімартингал X, який має зображення $X = X_0 + M + A$, де M – локальний $\mathbb{P}$-мартингал, A – адаптований процес обмеженої варіації. Мартингальна міра $\mathbb{Q}$, еквівалентна до об'єктивної міри $\mathbb{P}$, називається мінімальною мартингальною мірою (МММ), якщо $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ на $\mathcal{F}_0$, і будь-який квадратично інтегровний $\mathbb{P}$-мартингал, строго ортогональний до процесу M, є локальним $\mathbb{Q}$-мартингалом.

Зауважимо, що, згідно з попереднім, в нашій моделі компоненти розкладу дорівнюють $X_0 = S_0$, $M_t = \int_0^t \sigma(Y_s)X_s dW_s$, $A_t = (\mu - r)t$. Далі підрахунок цін опціонів будемо робити відносно мінімальної мартингальної міри. Відносно цієї міри, позначимо її $\mathbb{Q}$, рівняння (1)–(2) набувають вигляду (див. Розділ 5, [13]):

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma(Y_t)S_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ dY_t &= -\alpha Y_t dt + kd\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned} \tag{7}$$

де випадкові процеси

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(Y_s)} ds,$$
$$\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} = \widetilde{W}_t,$$

є незалежними вінерівськими процесами відносно міри $\mathbb{Q}$.

2.4. **Безарбітражність у моделі Хестона зі стохастичною волатильністю, що описується процесом Кокса–Інгерсолла–Росса.** В цій моделі "кандидатами" на роль мартингальних є всі ймовірнісні міри $\mathbb{Q}$, звуження похідної Радона–Нікодима яких на $\mathcal{F}_t$ має вигляд

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{\int_0^t \frac{r-\mu}{\sqrt{Z_s}} dW_s + \int_0^t \nu_{1,s} d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{(r-\mu)^2}{Z_s} + \nu_{1,s}^2\right) ds\right\}, \qquad (8)$$

де $\nu_1 = (\nu_{1,t})_{0\le t\le T}$ – прогресивно вимірний процес, для якого $\int_0^T \nu_{1,s}^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}$-м.н. Для доведення безарбітражності ринку покладемо $\nu_{1,s} = 0$. Тоді (8) прийме вигляд

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = L_{1,t} := \exp\left\{\int_0^t \frac{r-\mu}{\sqrt{Z_s}} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{(r-\mu)^2}{Z_s}\right) ds\right\}, \qquad (9)$$

причому, згідно з теоремою 3.6 та наслідком 3.3 зі статті [32], дійсно, $\mathbb{E}[L_{1,t}] = 1$ і ціна дисконтованої акції

$$X_t = \exp\left\{\int_0^t \sqrt{Z_s} d\widetilde{W}_s^{\mathbb{Q}} - \frac{1}{2}\int_0^t Z_s ds\right\}$$

є $\mathbb{Q}$-мартингалом, тобто ринок безарбітражний. Отже, $\mathbb{Q}$ є еквівалентною мартингальною мірою, а звідси випливає безарбітражність в сенсі $\overline{NA}_g$. Відносно еквівалентної мартингальної міри $\mathbb{Q}$ з похідною Радона–Нікодима (9) пара процесів (S_t, Z_t) має наступне зображення:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{Z_t} S_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ dZ_t &= (b - Z_t)\, dt + k\sqrt{Z_t} d\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}}, \end{aligned} \qquad (10)$$

де, за теоремою Гірсанова, процеси

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{Z_s}} ds,$$
$$\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} = \widetilde{W}_t,$$

є незалежними вінерівськими процесами відносно $\mathbb{Q}$. Аналогічно до попереднього пункту, ця міра є мінімальною мартингальною мірою.

2.5. **Ціна опціону в моделі зі стохастичною волатильністю як функціонал від волатильності.** Позначимо V_C ціну у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \ge 0$ в моделі (7). Вказана ціна задається виразом

$$V_C = \mathrm{e}^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+\} = \mathrm{e}^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \le s \le T\}\}. \qquad (11)$$

Внутрішнє математичне сподівання є умовним за траєкторією $\{Y_s, 0 \le s \le T\}$, і тому є ціною Блека-Шоулса для моделі з невипадковою волатильністю, залежною від часу. Згідно з лемою 2.1 з [18], внутрішнє умовне математичне сподівання у (11), позначимо його $E(\bar\sigma)$, має наступне зображення:

$$\begin{aligned} E(\bar\sigma) &:= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\{(S_T^{\mathbb{Q}} - K)^+ | Y_s, 0 \le s \le T\} \\ &= S_0\, \mathrm{e}^{rT}\, \Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r + \frac{1}{2}\bar\sigma^2)T - \ln K}{\bar\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad -K\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\bar\sigma^2)T - \ln K}{\bar\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \tag{12}$$

де $\bar\sigma := \left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(Y_s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$, $\Phi(\cdot)$ – функція стандартного нормального розподілу. Функцію $\bar\sigma$ можна трактувати як усереднену волатильність за період часу від початкового моменту до моменту виконання опціону. Формула (12) показує, що ціна опціону на модель Блека–Шоулса зі стохастичною волатильністю повністю визначається розподілом випадкової величини $\bar\sigma$.

Ціну європейського опціону купівлі в моделі (10) можна знайти аналогічно, якщо замість $\bar\sigma$ підставити випадкову величину $\widetilde{\sigma} := \left(\frac{1}{T}\int_0^T Z_s ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Стохастична похідна і ціна опціону

Тепер застосуємо числення Маллявена, зокрема, поняття стохастичної похідної, за допомогою якої запишемо щільності розподілів випадкових величин $\bar\sigma$ та $\widetilde{\sigma}$.

3.1. **Елементи числення Маллявена. Щільність як функціонал від стохастичної похідної.** Спочатку дамо необхідні означення і сформулюємо твердження щодо щільності розподілу як функціонала від стохастичної похідної. Більш детально основи та застосування числення Маллявена викладено у [20].

Нехай $W = \{W(t), t \in [0,T]\}$, – вінерівський процес на імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^W, t \in [0,T], \mathbb{P}\}$, де $\Omega = C([0,T], \mathbb{R})$.

Позначимо $\widehat{C}^\infty(R)$ множину всіх нескінченно диференційовних функцій із похідними не вище поліноміального зростання на нескінченності.

Означення 3.1. Назвемо гладкими випадкові величини F вигляду

$$F = f(W(t_1), \dots, W(t_n)),$$

$f = f(x^1, \dots, x^n) \in \widehat{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $t_1, \dots t_n \in [0,T]$. Клас гладких величин позначимо через $\mathcal{S}$.

Означення 3.2. Нехай $F \in \mathcal{S}$. Стохастичною похідною випадкової величини F в точці t назвемо випадкову величину

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(W(t_1), \dots, W(t_n)) 1_{[0,t_i]}(t), \quad t \in [0,T].$$

Областю визначення оператора похідної $D : L^2(\Omega) \to L^2([0,T], \mathbb{R})$ є гільбертів простір випадкових величин $\mathbb{D}^{1,2}$, на якому скалярний добуток задається наступним чином:

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = \mathbb{E}(FG) + \mathbb{E}(\langle DF, DG\rangle_H), \quad H = L^2[0,T].$$

Простір $\mathbb{D}^{1,2}$ є щільною підмножиною $L^2(\Omega)$ і замиканням класу гладких випадкових процесів $\mathcal{S}$ відносно норми

$$||F||_{1,2} = [\mathbb{E}(|F|^2) + \mathbb{E}(||DF||_H^2)]^{1/2}.$$

Отже, оператор похідної D є замкненим, необмеженим і визначеним на щільній підмножині простору $L^2(\Omega)$ (див. [20]).

Означення 3.3. Позначимо через δ спряжений до D оператор, який є необмеженим оператором в $L^2([0,T],\mathbb{R})$ зі значеннями в $L^2(\Omega)$, таким що:

(i) область визначення δ є множиною квадратично інтегровних випадкових величин $u \in L^2([0,T],\mathbb{R})$, для яких

$$|\mathbb{E}\left(\langle DF, u\rangle_H\right)| \leq C(\mathbb{E}(F^2))^{1/2},$$

для всіх $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, де C деяка стала, що залежить від u;

(ii) якщо u належить до області визначення δ, то $\delta(u)$ є елементом $L^2(\Omega)$ і

$$\mathbb{E}\left(F\delta(u)\right) = \mathbb{E}\left(\langle DF, u\rangle_H\right)$$

для всіх $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Оператор δ є замкненим як спряжений до необмеженого і щільно визначеного оператора. Позначимо його область визначення $\operatorname{Dom}\delta$.

Розглянемо простір $L^{1,2} = L^2([0,T],\mathbb{D}^{1,2})$ з нормою $||\cdot||_{L^{1,2}}$, де

$$||u||^2_{L^{1,2}} = \mathbb{E}\left(\int_0^T u_t^2 dt + \int_0^T\int_0^T (D_s u_t)^2\, dtds\right).$$

Зауваження 3.1. Якщо $u \in L^{1,2}$, то інтеграл $\delta(u)$ коректно означено, і має місце оцінка

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_t dW_t\right)^2 \leq ||u||^2_{L^{1,2}}$$

(див. [21], [23]). У цьому випадку оператор $\delta(u)$ називається інтегралом Скорохода процесу u, і позначається через

$$\delta(u) = \int_0^T u_t dW_t.$$

Наступне твердження є фундаментальним для доведення основного результату цієї роботи.

Лема 3.1. ***(твердження 2.1.1 з*** [20]***)*** *Нехай F – випадкова величина з простору $\mathbb{D}^{1,2}$. Припустимо, що $\frac{DF}{\|DF\|_H^2}$ належить області визначення оператора δ. Тоді щільність випадкової величини F є неперервною, обмеженою і має вигляд*

$$p(x) = \mathbb{E}\left[1_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_H^2}\right)\right].$$

Також далі застосовуватиметься наступний аналог теореми Фубіні для інтегралу Скорохода.

Лема 3.2. ***(лема 2.10 з*** [15]***)*** *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *Функція $u(t,h,\omega) \in L^2\left([0,T]^2\times\Omega\right)$, і майже для всіх $t \in [0,T]$ випадковий процес $u(t,\cdot) \in \operatorname{Dom}\delta$;*
2) $\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta(u(t,\cdot))|^2 dt\right] < \infty$.

Тоді $\{\int_0^T u(t,h)dt,\ h \in [0,T]\} \in \operatorname{Dom}\delta$, і

$$\int_0^T\int_0^T u(t,h)dtdW_h = \int_0^T\int_0^T u(t,h)dW_h dt.$$

Перед тим як сформулювати і довести основний результат цієї роботи, нагадаємо, що, як відмічалося вище у розділі 2.5, випадкові величини $\bar{\sigma} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(Y_s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$ і $\widetilde{\sigma} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T Z_s ds\right)^{\frac{1}{2}}$ повністю визначають ціну опціона у моделях (7) і (10) відповідно.

Введемо позначення $\nu(x) = \sigma(x)\sigma'(x)$.

Теорема 3.1. 1) *Нехай функція σ задовольняє припущення (A2), є двічі неперервно диференційовною, похідна σ' є строго додатною та має не більше, ніж поліноміальне зростання на нескінченності. Тоді для процесу ОУ Y, визначеного стохастичним диференціальним рівнянням* (2)*, випадкова величина $\overline{\sigma}^2$ має неперервну обмежену щільність розподілу виду*

$$p_{\overline{\sigma}^2}(x) = \mathbb{E}\left[1_{\{\overline{\sigma}>\sqrt{x}\}}\left(\int_0^T \eta_t \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\, dW_s\, dt - \int_0^T \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha h}\, D_h\eta_t\, dh\, dt\right)\right], \qquad (13)$$

де

$$\eta_t = \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\nu(Y_t)\left[\int_0^T\int_0^T \left[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1 dt_2\right]^{-1}, \qquad (14)$$

значення стохастичної похідної $D_h\eta_t$ наведено у лемі 4.2, і всі величини у правих частинах рівностей (13) *і* (14) *коректно означені.*

2) *Нехай $6k^2 < b$. Для процесу КІР Z, визначеного стохастичним диференціальним рівнянням* (5)*, випадкова величина $\widetilde{\sigma}^2$ має неперервну обмежену функцію щільності вигляду:*

$$p_{\widetilde{\sigma}^2}(x) = \mathbb{E}\left[1_{\{\widetilde{\sigma}>\sqrt{x}\}}\left(\frac{T}{k}\int_0^T \sqrt{Z_t}\int_0^t \Psi_{h,t} dW_h\, dt - \frac{T}{2}\int_0^T\int_0^t \Psi_{h,t}\psi_{h,t} dh\, dt\right)\right], \qquad (15)$$

де

$$\psi_{h,t} := \exp\left\{-\frac{t-h}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{k^2}{8}\right)\int_h^t \frac{ds}{Z_s}\right\},$$

$$\Psi_{h,t} = \psi_{h,t}\left[\int_0^T\int_0^T \sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\int_0^{t_1\wedge t_2} \psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2} dh\, dt_1 dt_2\right]^{-1}.$$

Доведення. 1) Стохастична похідна від процесу ОУ має вид

$$D_h Y_t = \left(-\alpha\int_h^t D_h Y_s\, ds + k\right) 1_{\{h<t\}}.$$

Розв'язуючи дане рівняння відносно t при фіксованому h, отримаємо

$$D_h Y_t = k\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\, 1_{\{h<t\}}.$$

Тоді для обмеженої неперервно диференціовної функції σ, такої що σ' має не більше, ніж поліноміальне зростання на нескінченності, стохастична похідна обчислюється за ланцюговим правилом:

$$D_h\sigma^2(Y_t) = 2\sigma(Y_t)\sigma'(Y_t)D_h Y_t = 2k\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\,\nu(Y_t)1_{\{h<t\}},$$

і стохастична похідна інтегрального функціоналу

$$I_T(\sigma^2) = \int_0^T \sigma^2(Y_t)\, dt$$

дорівнює

$$D_h I_T(\sigma^2) = \int_0^T D_h\sigma^2(Y_t)\,dt = 2k\int_h^T \mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\,\nu(Y_t)\,dt, \quad h \le T. \tag{16}$$

Тепер потрібно визначити, чи існує інтеграл Скорохода

$$\overline{\delta} := \delta\left(\frac{D\overline{\sigma}^2}{\|D\overline{\sigma}^2\|_H^2}\right),$$

де $\overline{\sigma}^2 = \frac{I_T(\sigma^2)}{T}$.

Для цього спочатку подамо підінтегральний процес у явному вигляді. Згідно з (16),

$$D_h\overline{\sigma}^2 = \frac{2k}{T}\int_h^T \mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\,\nu(Y_t)\,dt,$$

тому

$$\begin{aligned}\|D\overline{\sigma}^2\|_H^2 &= \int_0^T (D_h\overline{\sigma}^2)^2\,dh = \frac{4k^2}{T^2}\int_0^T\left(\int_h^T \mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\,\nu(Y_t)\,dt\right)^2 dh\\ &= \frac{4k^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2} \mathrm{e}^{-\alpha(t_1-h)}\,\nu(Y_{t_1})\,\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-h)}\,\nu(Y_{t_2})\,dhdt_1dt_2\\ &= \frac{2k^2}{\alpha T^2}\int_0^T\int_0^T\left[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2.\end{aligned}$$

Таким чином, випадковий процес

$$\overline{\zeta}_h := \frac{D_h\overline{\sigma}^2}{\|D\overline{\sigma}^2\|^2}$$

дорівнює

$$\overline{\zeta}_h = \mathrm{e}^{\alpha h}\int_h^T \eta_t\,dt = \int_0^T u(t,h)dt, \quad u(t,h) := \eta_t\,\mathrm{e}^{\alpha h}\,1_{\{h<t\}}.$$

Згідно з лемою 4.4, $\overline{\zeta}_h \in L^{1,2}$, отже, процес $\overline{\zeta}_h$ інтегровний за Скороходом, або, що те саме, інтеграл $\overline{\delta}$ існує. Перевіримо виконання умов леми 3.2 для $u(t,h)$. Спочатку використаємо нерівності (21) та (22) з леми 4.3 і одержимо, що

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T u^2(t,h)dhdt\right] \le \frac{\mathrm{e}^{2\alpha T}-1}{2\alpha}\mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 dt\right] < \infty,$$

а значить $u(t,h,\omega) \in L^2\left([0,T]^2\times\Omega\right)$. Тепер при кожному $t \in [0,T]$, з урахуванням (21)–(24)

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^T u^2(t,h)dh + \int_0^T\int_0^T (D_s u(t,h))^2 dsdh\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^T (\eta_t\,\mathrm{e}^{\alpha h}\,1_{\{h<t\}})^2 dh + \int_0^T\int_0^T (\mathrm{e}^{\alpha h}\,1_{\{h<t\}}D_s\eta_t)^2 dsdh\right] \\ &\le \frac{\mathrm{e}^{2\alpha T}-1}{2\alpha}\left(\mathbb{E}\eta_t^2 + \int_0^T \mathbb{E}\left[(D_s\eta_t)^2\right]ds\right) \le C.\end{aligned} \tag{17}$$

Звідси випливає інтегровність за Скороходом $u(t,\cdot)$ при кожному $t \in [0,T]$. Отже, першу умову леми 3.2 виконано. Друга умова випливає з оцінок

$$\mathbb{E}[(\delta(u(t,\cdot)))^2] \le \mathbb{E}\left[\int_0^T u^2(t,h)dh + \int_0^T\int_0^T (D_s u(t,h))^2 dsdh\right] \le C,$$

а тому $\mathbb{E}\left[\int_0^T (\delta(u(t,h)))^2 dt\right] < \infty$. Отже, застосуємо теорему Фубіні до інтегралу

$$\overline{\delta} = \int_0^T \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha h}\, \eta_t 1_{\{h<t\}}\, dt dW_h$$

і змінимо порядок інтегрування:

$$\overline{\delta} = \int_0^T \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha h}\, \eta_t 1_{\{h<t\}}\, dW_h dt.$$

З останньої рівності, а також з теореми 3.2 [21] випливає, що

$$\begin{aligned}\overline{\delta} &= \int_0^T \left(\eta_t \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha h}\, 1_{\{h<t\}}\, dW_h - \int_0^T \mathrm{e}^{\alpha h}\, D_h \eta_t 1_{\{h<t\}} dh \right) dt \\ &= \int_0^T \eta_t \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha h}\, dW_h \right) dt - \int_0^T \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha h}\, D_h \eta_t\, dh dt.\end{aligned}$$

2) Аналогічним чином знайдемо щільність для випадкової величини $\widetilde{\sigma}^2$. За наслідком 4.2 з [1] стохастична похідна процесу (5) має вигляд

$$\begin{aligned} D_h Z_t &= k \exp\left\{ \int_h^t \left[-\frac{1}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{k^2}{8} \right) \frac{1}{Z_s} \right] ds \right\} \sqrt{Z_t} \\ &= k \exp\left\{ -\frac{t-h}{2} - \left(\frac{b}{2} - \frac{k^2}{8} \right) \int_h^t \frac{ds}{Z_s} \right\} \sqrt{Z_t} = k \psi_{h,t} \sqrt{Z_t}. \end{aligned}$$

Тоді для

$$I_T(Z_t) = \int_0^T Z_t\, dt$$

відповідна стохастична похідна дорівнює

$$D_h I_T(Z_t) = \int_0^T D_h Z_t\, dt = k \int_h^T \psi_{h,t} \sqrt{Z_t}\, dt, \quad h \le T.$$

Тепер потрібно визначити, чи існує інтеграл Скорохода

$$\widetilde{\delta} := \delta\left(\frac{D\widetilde{\sigma}^2}{\|D\widetilde{\sigma}^2\|^2} \right).$$

Зауважимо, що

$$D_h \widetilde{\sigma}^2 = \frac{k}{T} \int_h^T \psi_{h,t} \sqrt{Z_t}\, dt,$$

а відповідна норма дорівнює

$$\begin{aligned} \|D\widetilde{\sigma}^2\|^2 &= \int_0^T (D_h \widetilde{\sigma})^2\, dh = \frac{k^2}{T^2} \int_0^T \left(\int_h^T \psi_{h,t} \sqrt{Z_t}\, dt \right)^2 dh \\ &= \frac{k^2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \sqrt{Z_{t_1}} \sqrt{Z_{t_2}} \int_0^{t_1 \wedge t_2} \psi_{h,t_1} \psi_{h,t_2} dh dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Таким чином, випадковий процес

$$\widetilde{\zeta}_h := \frac{D_h \widetilde{\sigma}^2}{\|D\widetilde{\sigma}^2\|^2}$$

дорівнює

$$\widetilde{\zeta}_h = \frac{T}{k} \int_h^T \sqrt{Z_t} \Psi_{h,t} dt = \frac{T}{k} \int_h^T \widetilde{u}(t,h) dt, \quad \widetilde{u}(t,h) := \sqrt{Z_t} \Psi_{h,t}.$$

Згідно з лемою 4.5 процес $\widetilde{\zeta}_h$ є інтегровним за Скороходом. Отже, інтеграл $\widetilde{\delta}$ існує. Перевіримо тепер виконання умов леми 3.2. Згідно з лемою 4.5,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T \widetilde{u}^2(t,h)dtdh\right] = \int_0^T\int_0^T \mathbb{E}(Z_t\Psi_{h,t}^2)dhdt < \infty$$

тому $\widetilde{u}(t,h,\omega) \in L^2\left([0,T]^2\times\Omega\right)$. Той факт, що що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ $\widetilde{u}(t,h) \in \operatorname{Dom}\delta$, з урахуванням нерівностей (27), (29) доводиться повністю аналогічно до (17). Отже, перша умова леми 3.2 виконується. Очевидно, друга умова також має місце, оскільки

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\delta(\widetilde{u}(t,h))\right)^2 dt\right]\\ =\int_0^T \mathbb{E}&\left[\int_0^T \widetilde{u}^2(t,h)dt + \int_0^T\int_0^T D_s\widetilde{u}(t,h)D_t\widetilde{u}(s,h)dsdt\right] < \infty,\end{aligned}$$

враховуючи, що підінтегральний вираз скінченний за лемою 4.5.

Тепер, застосовуючи послідовно теорему Фубіні та теорему 3.2 з [21], отримуємо

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta} &= \frac{T}{k}\int_0^T\int_0^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}1_{\{h<t\}}dtdW_h\\ &= \frac{T}{k}\int_0^T\int_0^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}1_{\{h<t\}}dW_h dt\\ &= \frac{T}{k}\int_0^T\left(\sqrt{Z_t}\int_0^T \Psi_{h,t}1_{\{h<t\}}dW_h - \int_0^T \Psi_{h,t}D_h\sqrt{Z_t}1_{\{h<t\}}dh\right)dt\\ &= \frac{T}{k}\int_0^T\sqrt{Z_t}\int_0^t \Psi_{h,t}dW_h dt - \int_0^T\int_0^t \Psi_{h,t}\frac{D_hZ_t}{2\sqrt{Z_t}}dhdt\\ &= \frac{T}{k}\int_0^T\sqrt{Z_t}\int_0^t \Psi_{h,t}dW_h dt - \frac{T}{2}\int_0^T\int_0^t \Psi_{h,t}\psi_{h,t}dhdt.\end{aligned}$$

□

Наслідок 3.1. *Нехай виконуються умови теореми 3.1. Тоді ціна у початковий момент часу Європейського опціону купівлі $C = (S_T - K)^+$ зі страйковою ціною $K \geq 0$ задається виразом*

$$\begin{aligned}V_C = \int_0^\infty &\left(S_0\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r+\frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)\right.\\ &\left.-K\,\mathrm{e}^{-rT}\,\Phi\left(\frac{\ln S_0 + (r-\frac{1}{2}x)T - \ln K}{\sqrt{xT}}\right)\right)p(x)dx,\end{aligned}$$

де

$$p(x) = \begin{cases} p_{\overline{\sigma}^2}(x), & \textit{для моделі } (7),\ p_{\overline{\sigma}^2}(x) \textit{визначено у } (13);\\ p_{\widetilde{\sigma}^2}(x), & \textit{для моделі } (10),\ p_{\widetilde{\sigma}^2}(x) \textit{визначено у } (15).\end{cases}$$

4. Допоміжні результати

Першим доведемо результат стосовно обмеженості моментів від'ємного порядку для випадкових моментів виходу процесів Орнштейна–Уленбека Y та Кокса–Інгерсолла–Росса Z з деякого інтервалу. Для будь-якого фіксованого $Y_0 \in \mathbb{R}$ розглянемо довільний інтервал такий, що для кожного $x \in [Y_0 - a, Y_0 + a]$ має місце нерівність $|\sigma'(x) - \sigma'(Y_0)| \le \frac{\sigma'(Y_0)}{2}$. Позначимо $\tau = \inf\{t > 0 : |Y_t - Y_0| \ge a\}$, $\tau_1 = \tau \wedge T$. Для процесу Кокса-Інгерсолла–Росса, що стартує з точки $Z_0 > 0$ позначимо $\widetilde{\tau} = \inf\{t > 0 : |Z_t - Z_0| \ge \frac{Z_0}{2}\}$ та $\widetilde{\tau}_1 = \widetilde{\tau} \wedge T$.

Лема 4.1. *Будь-які від'ємні моменти вказаних моментів виходу скінченні, а саме, $\mathbb{E}(\tau_1)^{-p} < \infty$ та $\mathbb{E}(\widetilde{\tau}_1)^{-p} < \infty$ для всіх $p > 0$.*

Доведення. Згідно з лемою 10.5 [11], якщо $K > 0$ і $X = \{X_t, t \ge 0\}$ – одновимірний неперервний напівмартингал вигляду

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

де $\langle M \rangle_t = \int_0^t \alpha(s)ds$ і $A_t = \int_0^t \beta(s)ds$, причому $|\alpha(s)| \le K$ і $|\beta(s)| \le K$, то для будь-якого $a > 0$, для моменту τ_a виходу цього напівмартингалу з інтервалу $[X_0 - a, X_0 + a]$ і для всіх $\lambda \in (0, \frac{a}{2K}]$

$$\mathbb{P}\{\tau_a < \lambda\} \le \frac{4}{\sqrt{\pi a}} \exp\left\{-\frac{a^2}{8K\lambda}\right\}.$$

Розглянемо процес Орнштейна–Уленбека $Y_t = Y_0 - \alpha \int_0^t Y_s ds + kW_t$ з вінерівським процесом W, виберемо будь-яке $N > a + |Y_0|$ і позначимо $\tau^N = \inf\{t > 0 : |Y_t| \ge N\}$. Тоді $\tau_N > \tau_a$. Далі,

$$\widehat{Y}_t := Y_{t \wedge \tau_N} = Y_0 - \alpha \int_0^t Y_{s \wedge \tau_N} 1_{s \le \tau_N} ds + k \int_0^t 1_{s \le \tau_N} dW_s,$$

і напівмартингал $\widehat{Y}_t$ задовольняє умови леми 10.5 [11] при $K = N \cdot (\alpha \vee k)$. Крім того, якщо позначити $\tau_a^N = \inf\{t > 0 : |\widetilde{Y}_t - Y_0| \ge a\}$, то $\tau_a^N = \tau_a$. Тому в околі нуля розподіл моменту виходу τ допускає експоненційну оцінку: існують такі сталі C_1, C_2, C_3, що

$$\mathbb{P}\{\tau_a < \lambda\} \le C_1 \exp\left\{-\frac{C_2}{\lambda}\right\}, 0 < \lambda < C_3,$$

і те саме вірне для τ_1. Звідси випливає твердження леми для процесу Орнштейна–Уленбека. Процес Кокса–Інгерсолла–Росса розглядається повністю аналогічно. Лему доведено. □

Тепер доведемо технічні результати стосовно вигляду і оцінок для стохастичних похідних.

Лема 4.2. *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 3.1. Тоді стохастична похідна $D_h \eta_t$ має вигляд*

$$
\begin{aligned}
D_h\eta_t = \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\Bigg(&\mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\,1_{\{h<t\}}\nu'(Y_t)\Big[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big] \\
&\times\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\Big]^{-1}-\nu(Y_t)\Big[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big] \\
&\times\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\Big]^{-2}\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big] \\
&\times\Big(\nu(Y_{t_1})\,\mathrm{e}^{-\alpha(t_2-h)}\,1_{\{h<t_2\}}\nu'(Y_{t_2})+\nu(Y_{t_2})\,\mathrm{e}^{-\alpha(t_1-h)}\,1_{\{h<t_1\}}\nu'(Y_{t_1})\Big)\,dt_1dt_2\Bigg).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Доведення. Відзначимо, що для коректного означення необхідно показати, що подвійний інтеграл у знаменнику η_t і стохастичної похідної від цієї функції м.н. додатний. Це буде зроблено у лемі 4.3, де буде доведено інтегровність стохастичної похідної, а у цій лемі ми обмежимося формальним визначенням її вигляду.

Отже, за правилом ланцюга

$$
\begin{aligned}
D_h\eta_t &= \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \\
&\quad\times D_h\left(\nu(Y_t)\left[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right]^{-1}\right) \\
&= \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\Bigg\{D_h\nu(Y_t)\left[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right]^{-1} \\
&\quad+\nu(Y_t)D_h\left(\left[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right]^{-1}\right)\Bigg\} \\
&= \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\Bigg\{D_hY_t\nu'(Y_t)\left[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right]^{-1} \\
&\quad-\nu(Y_t)\left[\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right]^{-2}\int_0^T\int_0^T\Big[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|}- \\
&\quad\mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big]\Big[\big(\nu(Y_{t_1})D_hY_{t_2}\nu'(Y_{t_2})+\nu(Y_{t_2})D_hY_{t_1}\nu'(Y_{t_1})\big)\Big]\,dt_1dt_2\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $D_hY_t = \mathrm{e}^{-\alpha(t-h)}\,1_{\{h<t\}}$, то лему доведено. □

Лема 4.3. *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 3.1. Тоді* $\eta_t \in L^{1,2}$*, а значить і для будь-якого* $h\in[0,T]$*:* $\eta_t 1_{\{h<t\}}\in L^{1,2}$*.*

Доведення. Доведення леми зводиться до перевірки нерівності

$$||\eta_t||^2_{L^{1,2}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2dt + \int_0^T\int_0^T (D_h\eta_t)^2\,dtdh\right] < \infty.$$

Доведемо обмеженість першого доданку з правої частини попереднього виразу.

Введемо множину $A = \{x \in \mathbb{R} : |\sigma'(x) - \sigma'(Y_0)| \geq \sigma'(Y_0)/2\}$. Нагадаємо, що $\tau = \inf\{t : Y_t \in A\}$, $\tau_1 = \tau \wedge T$. Зауважимо, що оскільки вираз

$$\left[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})$$

за умов теореми є невід'ємним, і за припущенням (A2) $\sigma(x) \geq c > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ і деякої сталої $c > 0$, то $\nu(Y_t) \geq \frac{c}{2}\sigma'(Y_0)$ для $t \in (0, \tau)$. Тоді

$$\begin{aligned}
\eta_t &= \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\nu(Y_t) \\
&\times \left(\int_0^T\int_0^T \left(\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right)\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right)^{-1} \\
&\leq \frac{\alpha T}{k}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\nu(Y_t) \\
&\times \left[\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_1} \left[\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right]\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2\right]^{-1} \\
&\leq \frac{4\alpha T}{k(c\sigma'(Y_0))^2}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\nu(Y_t)\left[\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right)dt_1dt_2\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Далі позначимо C або C з індексами сталі, значення яких не є важливим. Розглянемо подвійний інтеграл, що знаходиться в знаменнику, та обчислимо його в будь-якій точці $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &:= \int_0^x\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right)dt_1dt_2 \\
&= \frac{\alpha}{2}\int_0^x\left(\int_h^x \mathrm{e}^{-\alpha(s-h)}\,ds\right)^2 dh \\
&= \frac{1}{2\alpha}\int_0^x\left(\mathrm{e}^{2\alpha(h-x)} - 2\,\mathrm{e}^{\alpha(h-x)} + 1\right)dh \\
&= \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-2\alpha x}+1}{2\alpha} + 2\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}-1}{\alpha} + x\right) \\
&= C(4\,\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-2\alpha x} + 2\alpha x - 3).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $\psi(0) = 0$, і функція $\psi(x) = C(4\,\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-2\alpha x} + 2\alpha x - 3)/(4\alpha^2)$ зростає на $\mathbb{R}$. Використаємо елементарну нерівність $1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} \geq \alpha x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, для того, щоб оцінити знизу похідну від функції ψ :

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\alpha}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^2 \geq Cx^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha x}.$$

Тоді

$$\psi(x) = \int_0^x \psi'(s)ds \geq C\int_0^x e^{-2\alpha s}s^2 ds > C_1x^3.$$

Отже, з імовірністю 1 має місце оцінка:

$$\int_0^T\int_0^T\left(\mathrm{e}^{-\alpha|t_1-t_2|} - \mathrm{e}^{-\alpha(t_1+t_2)}\right)\nu(Y_{t_1})\nu(Y_{t_2})\,dt_1dt_2 \geq C\tau_1^3 \tag{20}$$

Зауважимо також, що $\nu^2(x) \leq C(1 + |x|^m)$ для деяких $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$, оскільки $\sigma(x)$ і $\sigma'(x)$ мають не більш ніж поліноміальне зростання. Тому, а також з урахуванням (19), має місце оцінка

$$\eta_t \leq C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\nu(Y_t)\tau_1^{-3} \leq C(1 + |Y_t|^m)\tau_1^{-3}.$$

Далі, моменти будь-якого порядку процесу Орнштейна–Уленбека рівномірно обмежені на будь-якому інтервалі, тому з урахуванням леми 4.1

$$\sup_{t\in T}\mathbb{E}\eta_t^2 \le C\sup_{t\in T}(\mathbb{E}(1+|Y_t|^{2m})(\mathbb{E}\tau_1^{-6}))^{\frac{1}{2}} \le C. \tag{21}$$

Звідси з очевидністю

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 dt\right] < \infty. \tag{22}$$

Розглянемо тепер другий доданок норми. Спочатку, з урахуванням (18) та (20) оцінимо стохастичну похідну:

$$\begin{aligned} |\,(D_h\eta_t)\,| &\le C\left(\tau_1^{-3}\nu'(Y_t)+\tau_1^{-6}\nu'(Y_t)\int_0^T \nu(Y_s)ds\int_0^T \nu'(Y_u)du\right)\\ &\le C(1+|Y_t|^{m_1})(\tau_1^{-3}+\tau_1^{-6}) \end{aligned} \tag{23}$$

для деякого $m_1 \in \mathbb{N}$. Тепер, (23), цілком аналогічно до міркувань при доведенні (21), одержимо, що існує стала $C>0$, для якої

$$\sup_{t\in T}\mathbb{E}\,(D_h\eta_t)^2 \le C \ \text{ і } \ \int_0^T\int_0^T (D_h\eta_t)^2\,dtdh < \infty, \tag{24}$$

а тому за означенням $\eta_t \in L^{1,2}$, і лему доведено. □

Лема 4.4. *Нехай виконуються умови пункту 1) теореми 3.1. Тоді* $\overline{\zeta}_h \in L^{1,2}$.

Доведення. Необхідно показати, що

$$\begin{aligned} ||\overline{\zeta}_h||^2_{L^{1,2}} = \mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\mathrm{e}^{\alpha h}\int_h^T \eta_s\,ds\right)^2 dh\right]\\ +\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T\left(D_h\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\int_t^T \eta_s\,ds\right)\right)^2 dtdh\right] < \infty. \end{aligned} \tag{25}$$

Але для першого доданку з правої частини (25), в силу

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\mathrm{e}^{\alpha h}\int_h^T \eta_s\,ds\right)^2 dh\right] \le T\int_0^T \mathrm{e}^{2\alpha h}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_s^2\,ds\right]dh < \infty,$$

а для другого, в силу (24),

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T\left(D_h\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\int_t^T \eta_s\,ds\right)\right)^2 dtdh\right]\\ &= \int_0^T\int_0^T \mathrm{e}^{2\alpha t}\,\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T D_h(\eta_s 1_{\{t<s\}})\,ds\right)^2\right]dtdh\\ &\le T\int_0^T\int_0^T \mathrm{e}^{2\alpha t}\,\mathbb{E}\left[\int_0^T (D_h\eta_s)^2\,ds\right]dtdh < \infty. \end{aligned}$$

□

Зауваження 4.1. Для доведення наступної леми наведемо результат з [5, нерівність (3.1)]: $\sup_{[0,T]}\mathbb{E}Z_t^p < \infty$ для будь-якого $p > -\frac{2b}{k^2}$.

Лема 4.5. *Нехай коефіцієнти процесу КІР, заданого рівнянням* (5), *задовольняють умову* $6k^2 < b$. *Тоді* $\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t} \in L^{1,2}$ *і* $\int_h^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}dt \in L^{1,2}$.

Доведення. Доведемо друге включення, яке потребує більше перетворень, а тоді для першого доведення повністю аналогічне. Необхідно показати, що

$$\begin{aligned}\left\|\int_h^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}dt\right\|^2_{L^{1,2}} &= \mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_h^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}dt\right)^2 dh\right.\\ &\left.+\int_0^T\int_0^T\left(D_l\int_h^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}dt\right)^2 dl dh\right]<\infty.\end{aligned}\tag{26}$$

Запишемо спочатку функцію

$$\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}=\sqrt{Z_t}\psi_{h,t}\left[\int_0^T\int_0^T\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}.$$

Оцінимо знаменник даної функції знизу. Запишемо

$$\begin{aligned}I&:=\int_0^T\int_0^T\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dh\,dt_1dt_2\\ &=\int_0^T\int_0^T\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\int_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-\left(\frac{b}{2}-\frac{k^2}{8}\right)\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\\ &\qquad\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-\left(\frac{b}{2}-\frac{k^2}{8}\right)\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}dh\,dt_1dt_2.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що $\widetilde{\tau}:=\inf\left\{t:|Z_t-Z_0|>\frac{Z_0}{2}\right\}$, $\widetilde{\tau}_1=\widetilde{\tau}\wedge T$. Позначимо через $q:=\frac{b}{2}-\frac{k^2}{8}$. З умови леми випливає, що $q>0$. Отримаємо

$$\begin{aligned}I&\geq\frac{Z_0}{2}\int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-\frac{2q}{Z_0}\int_h^{t_1}ds\right\}\\ &\qquad\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-\frac{2q}{Z_0}\int_h^{t_2}ds\right\}dh\,dt_1dt_2\\ &=\frac{Z_0}{2}\int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{\widetilde{\tau}_1}\int_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-\frac{2q}{Z_0}(t_1-h)\right\}\\ &\qquad\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-\frac{2q}{Z_0}(t_2-h)\right\}dh\,dt_1dt_2.\end{aligned}$$

Оскільки $t_1-h<T$ і $t_2-h<T$, то має місце наступна оцінка

$$I\geq\frac{Z_0}{12}\exp\left\{-\frac{T(Z_0+4q)}{Z_0}\right\}\widetilde{\tau}_1^3.$$

Далі несуттєві сталі будем позначати C або C з індексами. Зауважимо, що функції $\psi_{h,t}$ обмежені зверху одиницею. Тоді можна записати просто

$$I\geq C\widetilde{\tau}_1^3,\ \text{ і }\ \Psi_{h,t}\leq C\widetilde{\tau}_1^{-3}.$$

Тому

$$\mathbb{E}(Z_t\Psi_{h,t}^2)\leq\left(\mathbb{E}Z_t^2\mathbb{E}\Psi_{h,t}^2\right)^{\frac12}\leq C\left(\mathbb{E}Z_t^2\right)^{\frac12}\left(\mathbb{E}\widetilde{\tau}_1^{-6}\right)^{\frac12}.$$

Далі, з умови леми та зауваження 4.1 випливає, що $\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}Z_t^p<\infty$ для будь-якого $p\geq-12$. Скінченність $\mathbb{E}\widetilde{\tau}_1^{-6}$ випливає з леми 4.1. Тому існує стала $C>0$ така, що

$$\sup_{t,h\in[0,T]}\mathbb{E}(Z_t\Psi_{h,t}^2)\leq C.\tag{27}$$

Доведемо тепер обмеженість першого доданку з правої частини рівності (26). Справді,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_h^T \sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}dt\right)^2 dh\right] \le T\int_0^T\int_h^T \mathbb{E}(Z_t\Psi_{h,t}^2)dtdh \le C_1.$$

Покажемо тепер обмеженість другого доданку з правої частини рівності (26).

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T\left(D_l\int_h^T\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}dt\right)^2 dldh\right]\\ &=\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T\left(\int_h^T D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t})dt\right)^2\right]dldh\\ &\le T\int_0^T\int_0^T\int_h^T\mathbb{E}(D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}))^2 dt\,dl\,dh.\end{aligned} \tag{28}$$

Знайдемо спочатку саму стохастичну похідну, використовуючи метод ланцюга:

$$D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}) = D_l\left(\sqrt{Z_t}\psi_{h,t}\left[\int_0^T\int_0^T\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned}= D_l\Bigg(&\sqrt{Z_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int_h^t\frac{ds}{Z_s}\right\}\times\\ &\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\times\right.\\ &\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}\Bigg)\\ &= D_l\left(\sqrt{Z_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int_h^t\frac{ds}{Z_s}\right\}\right)\\ &\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\times\right.\\ &\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+\sqrt{Z_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2}-q\int_h^t\frac{ds}{Z_s}\right\}\\ &\times D_l\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2}-q\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\times\right.\\ &\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2}-q\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}dh\,dt_1dt_2\right]^{-1}\end{aligned}$$

$$= \exp\left\{-\frac{t-h}{2} - q\int_h^t \frac{ds}{Z_s}\right\}\left(\frac{D_l Z_t}{2\sqrt{Z_t}} + q\sqrt{Z_t}\int_h^t \frac{D_l Z_s}{Z_s^2}ds\right)$$
$$\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}dh\,dt_1 dt_2\right]^{-1}$$

$$-\sqrt{Z_t}\exp\left\{-\frac{t-h}{2} - q\int_h^t \frac{ds}{Z_s}\right\}$$
$$\times\left[\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\sqrt{Z_{t_1}}\sqrt{Z_{t_2}}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}dh\,dt_1 dt_2\right]^{-2}\times$$

$$\times\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\exp\left\{-\frac{t_1-h}{2} - q\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s}\right\}\exp\left\{-\frac{t_2-h}{2} - q\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s}\right\}\times$$
$$\times\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{D_l Z_{t_1}}{2\sqrt{Z_{t_1}}} + q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{D_l Z_s}{Z_s^2}ds\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{D_l Z_{t_2}}{2\sqrt{Z_{t_2}}} + q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{D_l Z_s}{Z_s^2}ds\right)\right)dh\,dt_1 dt_2.$$

Враховуючи вигляд $D_l Z_t$, $\psi_{h,t}$ та I, отримаємо

$$D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}) = k\psi_{h,t}\left(\frac{\psi_{l,t}}{2} + q\sqrt{Z_t}\int_h^t \frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)I^{-1}$$
$$-k\sqrt{Z_t}\psi_{h,t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{\psi_{l,t_1}}{2} + q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{\psi_{l,t_2}}{2} + q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^2}ds\right)\right)dh\,dt_1 dt_2.$$

Для доведення обмеженості другого доданку (26), враховуючи (28), досить показати, що

$$\sup_{l,h,t}\mathbb{E}\left[(D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}))^2\right] < \infty. \tag{29}$$

З цією метою запишемо

$$\mathbb{E}\left[(D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}))^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(k\psi_{h,t}\left(\frac{\psi_{l,t}}{2} + q\sqrt{Z_t}\int_h^t \frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)I^{-1}\right.\right.$$
$$-k\sqrt{Z_t}\psi_{h,t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{\psi_{l,t_1}}{2} + q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{\psi_{l,t_2}}{2} + q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^2}ds\right)\right)dh\,dt_1 dt_2\right)^2\right]$$

$$\leq 2k^2\mathbb{E}\left[\left(\psi_{h,t}\left(\frac{\psi_{l,t}}{2}+q\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)I^{-1}\right)^2\right]$$

$$+2k^2\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\psi_{h,t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\psi_{h,t_1}\psi_{h,t_2}\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{\psi_{l,t_1}}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{\frac{3}{2}}}ds\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{\psi_{l,t_2}}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{\psi_{l,s}}{Z_s^{2}}ds\right)\right)dh\,dt_1dt_2\right)^2\right].$$

Отже, враховуючи, що $\psi_{h,t}<1$, можемо записати

$$\mathbb{E}\left[(D_l(\sqrt{Z_t}\Psi_{h,t}))^2\right]\leq 2k^2\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^2I^{-2}\right]$$

$$+2k^2\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s^{2}}\right)\right)dh\,dt_1dt_2\right)^2\right]=2k^2I_1+2k^2I_2.$$

Оцінимо окремо кожне математичне сподівання. Використовуючи нерівність Гельдера та нерівність $(a+b)^n\leq 2^{n-1}(a^n+b^n)$, отримаємо

$$I_1:=\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^2I^{-2}\right]\leq\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}I^{-4}\right)^{1/2}$$

$$\leq C_1\left(\frac{1}{2}+8q^4\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right]\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\widetilde{\tau}_1^{-12}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обмеженість $\mathbb{E}\widetilde{\tau}_1^{-12}$ випливає із леми 4.1. Оцінимо тепер

$$\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right]\leq\left(\mathbb{E}Z_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq T^{\frac{7}{2}}\left(\mathbb{E}Z_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_h^t\mathbb{E}Z_s^{-12}ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

Беручи до уваги зауваження 4.1 та умову леми, отримуємо, що $\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^4\right]\leq C$. А це означає, що $I_1\leq C$. Оцінимо тепер I_2.

$$I_2:=\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}I^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s^{2}}\right)\right)dh\,dt_1dt_2\right)^2\right]$$

$$\leq \left(\mathbb{E}(Z_t^2 I^{-8})\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \int_0^T \int_0^{t_1\wedge t_2} \left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s^2}\right)\right)dh\,dt_1dt_2\right)^4\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq T^{\frac{9}{2}}\left(\mathbb{E}Z_t^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\mathbb{E}I^{-16}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s^2}\right)\right)^4\right]dh\,dt_1dt_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_2\left(\mathbb{E}Z_t^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(\mathbb{E}\widetilde{\tau}_1^{-48}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T\int_0^T\int_0^{t_1\wedge t_2}\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s^2}\right)\right)^4\right]dh\,dt_1dt_2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $C_2 = \frac{12^4 T^{\frac{9}{2}}}{Z_0^4}\exp\left\{\frac{4T(Z_0+4q)}{Z_0}\right\}$. Скінченність величини $\mathbb{E}\widetilde{\tau}_1^{-48}$ та обмеженість $\mathbb{E}Z_t^4$ випливає із зауваження 4.1, леми 4.1 та умови леми. Для доведення обмеженості $\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_{t_2}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_1}}\int_h^{t_1}\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)+\sqrt{Z_{t_1}}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_{t_2}}\int_h^{t_2}\frac{ds}{Z_s^2}\right)\right)^4\right]$ достатньо показати, що обмежена наступна величина

$$\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^4\right]\leq\left(\mathbb{E}Z_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}+q\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\left(\mathbb{E}Z_t^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+128\,q^8\,\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

За умовою леми $6k^2 < b$. Тому можна вибрати $1 < d < \frac{b}{6k^2}$. Тоді $-12d > -\frac{2b}{k^2}$, і згідно із зауваженням 4.1

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}Z_t^{-12d}<\infty.$$

Нехай p таке, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{d}=1$. Двічі застосовуючи нерівність Гельдера, одержуємо

$$\mathbb{E}\left[\left(\sqrt{Z_t}\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^8\right]\leq\left(\mathbb{E}Z_t^{4p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\int_h^t\frac{ds}{Z_s^{\frac{3}{2}}}\right)^{8d}\right]\right)^{\frac{1}{d}}$$
$$\leq T^{\frac{8d-1}{d}}\left(\mathbb{E}Z_t^{4p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_h^t\mathbb{E}Z_s^{-12d}ds\right)^{\frac{1}{d}}<\infty.$$

Отже, ми показали, що $I_2 \leq C$. А це означає, що має місце (29), а тоді і (26). Лему доведено. □

Подяка. Автори щиро вдячні Олексію Михайловичу Кулику за корисні зауваження і пропозиції, які сприяли значному покращенню статті, зокрема, за детальні пояснення щодо застосування числення Маллявена до зображення щільностей інтегральних функціоналів.

Література

1. E. Alos and Ch-O. Ewald, *A note on the Malliavin differentiability of the Heston volatility*, SSRN Electronic Journal **09/2005** (2005), DOI: 10.2139/ssrn.847645.
2. O. E. Barndorff-Nielsen and N. Shephard, *Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology) **63** 2001, 167—241, doi: 10.1111/1467-9868.00282.
3. J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica **53** (1985), no. 2, 385–407.
4. F. Delbaen and W. Schachermayer, *The Mathematics of Arbitrage*, Springer Finance, New York, 2006.
5. S. Dereich, A. Neuenkirch, and L. Szpruch, *An Euler-type method for the strong approximation of the Cox-Ingersoll-Ross process*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **468** (2012), 1105–1115.
6. F. D'Ippoliti, E. Moretto, S. Pasquali, and B. Trivellato, *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. Exact and approximated option pricing in a stochastic volatility jump-diffusion model*, Springer Milan, Milano, 2009, pp. 133–142, doi: 10.1007/978-88-470-1481-7-14.
7. M. Garman, *A general theory of asset valuation under diffusion state processes*, Working Paper, Univ. of California, Berkeley, 1976.
8. Goard, J.: *Exact and approximate solutions for options with time-dependent stochastic volatility*, Applied Mathematical Modelling **38** (2014), 2771–2780.
9. S. Heston, *The review of financial studies*, J. Finance **6(2)** (1993), 327–343.
10. R. Frey, *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, J. Finance **42** (1987), 281–300.
11. N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland Mathematical Library, vol. 24, 1986.
12. E. Fournie, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, and T. Touzi, *Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance*, Fin. and Stoch. **3** (1999), 391—412.
13. S. Kuchuk-Iatsenko and Y. Mishura, *Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein-Uhlenbeck process. Exact formulas*, Modern Stoch. Theory Appl. **2(3)** (2015), 233–249.
14. S. Kuchuk-Iatsenko and Y. Mishura: *Pricing the European call option in the model with stochastic volatility driven by Ornstein–Uhlenbeck process. Simulation*, Modern Stoch. Theory Appl. **2(4)** (2015), 355–369.
15. J. A. Leon and D. Nualart, *Stochastic evolution equations with random generators*, The Annals of Probability **26(1)** (1998), 149–186.
16. Ю. С. Мішура, Є. Ю. Мунчак, *Швидкість збіжності цін опціонів з використанням методу псевдомоментів*, Теорія ймовір. та матем. статист. **92** (2015) 110–124.
17. Ю. С. Мішура, Є. Ю. Мунчак, *Швидкість збіжності цін опціонів при дискретизації геометричного процесу Орнштейна–Уленбека бернуллієвськими стрибками цін акцій*, Теорія ймовір. та матем. статист. **93** (2015), 127–141.
18. Yu. Mishura, G. Rizhniak, and V. Zubchenko, *European call option issued on a bond governed by a geometric or a fractional geometric Ornstein–Uhlenbeck process*, Modern Stoch. Theory Appl. **1(1)** (2014), 95–108.
19. E. Nicolato and E. Venardos, *Option Pricing in Stochastic Volatility Models of the Ornstein–Uhlenbeck type*, Mathematical Finance **13** (2003), 445–466, doi: 10.1111/1467-9965.t01-1-00175.
20. D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Second edition, Probability and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2006.
21. D. Nualart and E. Pardoux, *Stochastic Calculus with Anticipating Integrands*, Probab. Th. Rel. Fields **78** (1988), no. 4, 535–581.
22. G. Di Nunno, B. Øksendal, and F. Proske, *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Universitext, Springer Science & Business Media, 2008.
23. Y. Ouknine, *Fubini-type theorem for anticipating integrals*, Random Oper. Stoch. Equ. **4** (1996), no. 4, 351–354.
24. D. L. Ocone and I. Karatzas, *A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios*, Stochastics and Stochastics Reports **34** (1991), 187–220.
25. J. Perelló, R. Sircar, and J. Masoliver, *Option Pricing under stochastic volatility: the exponential Ornstein-Uhlenbeck model*, J. Stat. Mech. **1** (2008), P06010.
26. M. Sanz-Sole, *Malliavin Calculus with Applications to Stochastic Partial Differential Equations*, EPFL Press, Lausanne, 2005.

27. N. Shephard and T. G. Andersen, *Handbook of Financial Time Series. Chapter: Stochastic Volatility: Origins and Overview*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2009, pp. 233–254, doi: 10.1007/978-3-540-71297-8-10.
28. A. N. Shiryaev, *Essentials of stochastic finance: facts, models, theory*, World Scientific, 1999.
29. S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II. Continuous-Time Models*, Springer Finance Textbooks, Springer-Verlag, New York, 2004.
30. E. M. Stein and J. C. Stein, *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, The Review of Financial Studies, vol. 4(4), 1991, pp. 727–752.
31. J. Wiggins, *Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates*, Journal of Financial Economics **19** (1987), 351–372.
32. B. Wong and C. C. Heyde, *On changes of measure in stochastic volatility models*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **2006** (2006), 1–13, Article ID 18130.

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: kuchuk.iatsenko@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: myus@univ.kiev.ua

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект академіка Глушкова, 6, Київ 03127, Україна
Адреса електронної пошти: yevheniamunchak@gmail.com

Надійшла 06/04/2016