Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 96, 2017, с. 142–154

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 96, 2017, pp. 142–154

УДК 519.21

ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ЗІ СТІЙКИМ ШУМОМ

Л. І. ПРИГАРА, Г. М. ШЕВЧЕНКО

Анотація. У статті вивчається тривимірне хвильове рівняння з правою частиною, яка має симетричний α-стійкий розподіл. Розглянуто два випадки: коли збурення є «білим шумом» та коли воно є «кольоровим шумом». В обох випадках доведено, що потенційний розв'язок рівняння, заданий формулою Кірхгофа, є узагальненим розв'язком.

Ключові слова і фрази. Стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних, хвильове рівняння, розклад Лепажа, симетрична α-стійка випадкова міра, узагальнений розв'язок, дійсне анізотропне дробове стійке поле.

1. Вступ

Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними відіграють провідну роль у моделюванні поведінки складних систем, що містять випадковість. З цієї причини кількість досліджень, присвячених таким рівнянням, постійно зростає. Проте переважна більшість робіт стосується випадку, коли випадковість у рівнянні має гауссівський розподіл. Зокрема, хвильове рівняння з гауссівським випадковим шумом вивчалося у роботах [3, 4, 8, 10, 14]. Одновимірне хвильове рівняння із загальною стохастичною мірою розглядалося у статтях [2, 6].

У цій роботі ми продовжуємо дослідження, започатковані в [9], де розглядалося хвильове рівняння зі стійкою мірою на площині. Об'єктом дослідження є хвильове рівняння у просторі

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)U(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ U(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

у якому права частина є випадковим збуренням вигляду $f(x,t) = \sigma(x,t)\cdot\dot{Z}(x)$, де $\sigma(x,t)$ — невипадкова обмежена функція, а $\dot{Z}(x)$ — випадковий шум із симетричним α-стійким розподілом. Розглянуто два принципово різні випадки: коли шум є «білим», у певному сенсі похідною від стійкої міри з незалежними приростами, та коли шум є «кольоровим», породженим полем із залежними приростами, а саме, дійсним гармонізованим анізотропним дробовим стійким полем. В обох випадках як потенційний розв'язок рівняння розглядається функція, задана формулою Кірхгофа. Доведено, що цю функцію коректно визначено та встановлено, що вона є узагальненим розв'язком рівняння. При цьому, оскільки теорія інтегрування за стійким кольоровим шумом відсутня, у роботі окремо дається означення інтеграла за таким шумом.

Статтю побудовано таким чином. У п. 2 наведено основні відомості щодо стійких величин та їх розподілів, а також короткі відомості щодо розкладу в ряд Лепажа.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60H15, 35L05, 35R60, 60G52.

Пункти 3 і 4 містять формулювання та доведення основних результатів статті, відповідно, для білого та кольорового шуму.

2. Стійкі величини

У цій статті розглядатимуться симетричні α-стійкі ($S\alpha S$) випадкові величини з $\alpha \in (0,2)$, більш докладну інформацію про них можна знайти у [12].

Випадкову величину ξ називають $S\alpha S$ із параметром масштабу $\|\xi\|_\alpha$, якщо її характеристична функція

$$\mathsf{E}\left[e^{i\lambda\xi}\right] = e^{-\lambda^\alpha \|\xi\|_\alpha^\alpha}.$$

Особливу роль у побудові процесів і полів зі стійкими розподілами відіграє $S\alpha S$-міра з незалежними приростами; у цій статті ми обмежимося $S\alpha S$-мірою на $\mathbb{R}^3$. Це функція $M\colon B_f(\mathbb{R}^3)\times\Omega\to\mathbb{R}$, де $B_f(\mathbb{R}^3)$ — сім'я борелевих підмножин скінченної міри Лебега, із такими властивостями:

(1) для будь-якої борелевої множини $A \in B_f(\mathbb{R}^3)$ випадкова величина $M(A)$ є $S\alpha S$ із параметром масштабу, що дорівнює $\lambda(A)$, мірі Лебега множини A;
(2) для неперетинних множин $A_1,\dots,A_n \in B_f(\mathbb{R}^3)$ значення $M(A_1),\dots,M(A_n)$ є незалежними;
(3) для неперетинних множин $A_1,\dots,A_n,\dots \in B_f(\mathbb{R}^3)$ таких, що $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in B_f(\mathbb{R}^3)$, ряд $\sum_{n=1}^\infty M(A_n)$ збіжний майже напевно, при цьому

$$M\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty M(A_n)$$

майже напевно.

Для функції $f(x,t)\in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ інтеграл

$$I(f) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,t) M(dx)$$

визначено як границю за ймовірністю інтегралів від простих функцій з обмеженим носієм, при цьому справедлива ізометрична властивість:

$$\|I(f)\|_\alpha^\alpha = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} |f(x,t)|^\alpha\, dx.$$

Зручним інструментом для аналізу стійких величин є зображення Лепажа, яке для міри M виглядає таким чином. Нехай φ — довільна неперервна додатна щільність розподілу на $\mathbb{R}^3$, а незалежні набори $\{\Gamma_k, k\ge 1\}, \{\xi_k, k\ge 1\}, \{g_k, k\ge1\}$ задовольняють умови:

- $\{\Gamma_k, k\ge 1\}$ — послідовність моментів стрибків пуассонівського процесу з одиничною інтенсивністю;
- $\{\xi_k, k\ge 1\}$ — незалежні випадкові вектори зі щільністю φ;
- $\{g_k, k\ge 1\}$ — незалежні центровані нормально розподілені випадкові величини з $\mathsf{E}[|g_k|^\alpha] = 1$.

Тоді M має такий самий розподіл, що й

$$M'(dx) = C_\alpha \sum_{k\ge1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \delta_{\xi_k}(dx) g_k, \tag{2}$$

де $C_\alpha = \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha}$, причому ряд збігається майже напевно. Рівність (2) потрібно розуміти у наступному сенсі: для довільних $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ розподіл вектора $\big(I(f_1), I(f_2), \ldots, I(f_n)\big)$ збігається з розподілом $\big(I'(f_1), I'(f_2), \ldots, I'(f_n)\big)$, де

$$I'(f) = C_\alpha \sum_{k\geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} f(\xi_k) g_k. \tag{3}$$

Надалі без обмеження загальності вважатимемо, що M задається формулою (2), а для функції $f(x,t) \in L^\alpha(\mathbb{R}^3)$ інтеграл

$$I(f) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,t) M(dx)$$

задається формулою (3). Також для технічного спрощення припустимо, що

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = (\Omega_\Gamma \otimes \Omega_\xi \otimes \Omega_g, \mathcal{F}_\Gamma \otimes \mathcal{F}_\xi \otimes \mathcal{F}_g, \mathsf{P}_\Gamma \otimes \mathsf{P}_\xi \otimes \mathsf{P}_g)\,;$$

для всіх $\omega = (\omega_\Gamma, \omega_\xi, \omega_g)$, $k \geq 1$: $\Gamma_k(\omega) = \Gamma_k(\omega_\Gamma)$, $\xi_k(\omega) = \xi_k(\omega_\xi)$, $g_k(\omega) = g_k(\omega_g)$.

3. Хвильове рівняння зі стійким білим шумом

Розглянемо рівняння (1)

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right) U(x,t) = \sigma(x,t)\dot{M}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ U(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} U(x,0) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де права частина рівняння є добутком невипадкової функції $\sigma\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ та «$S\alpha S$-білого шуму» $\dot{M}(x)$, що є в певному розумінні щільністю Радона–Нікодима $S\alpha S$-міри M із незалежними приростами на $\mathbb{R}^3$. Як потенційний розв'язок рівняння (4) розглянемо функцію, що задається формулою Кірхгофа:

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a} \iiint\limits_{y:|x-y|<at} \frac{\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} M(dy_1, dy_2, dy_3). \tag{5}$$

У подальшому припускатимемо, що функція σ є обмеженою.

Теорема 1. *Інтеграл у (5) визначено для всіх $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$.*

Доведення. Інтеграл у (5) є визначеним, якщо

$$\iiint\limits_{y:|x-y|<at} \left| \frac{\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} \right|^\alpha dy_1\, dy_2\, dy_3 < \infty.$$

Перевіримо цю умову:

$$\iiint\limits_{y:|x-y|<at} \left| \frac{\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} \right|^\alpha dy_1\, dy_2\, dy_3 \leq \iiint\limits_{y:|x-y|<at} \frac{C^\alpha}{|x-y|^\alpha}\, dy_1\, dy_2\, dy_3 = \\ = 4\pi C^\alpha \frac{(at)^{3-\alpha}}{3-\alpha} < \infty,$$

що й треба довести. □

Теорема 2. *Для всіх $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ майже напевно є збіжним ряд*

$$U(x,t) = C_\alpha \sum_{k\geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \frac{\sigma\left(\xi_k, t - \frac{|x-\xi_k|}{a}\right)}{|x-\xi_k|} g_k I_{\{|x-\xi_k|<at\}}.$$

Доведення. Позначимо

$$u_k(x,t) = C_\alpha \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \frac{\sigma\left(\xi_k, t - \frac{|x-\xi_k|}{a}\right)}{|x-\xi_k|} g_k I_{\{|x-\xi_k|<at\}}.$$

При фіксованих $\omega_\xi \in \Omega_\xi, \omega_\Gamma \in \Omega_\Gamma$ величини u_k є незалежними та центрованими. Тому згідно з теоремою Колмогорова, для доведення твердження теореми достатньо показати, що

$$\mathsf{E}_g\left[|U(x,t)|^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_g\left[|u_k(x,t)|^2\right] < \infty$$

для майже всіх $\omega_\xi \in \Omega_\xi, \omega_\Gamma \in \Omega_\Gamma$. Щоб перевірити цю умову, оцінимо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{\xi,g}\left[|U(x,t)|^2\right] &\le \mathsf{E}_{\xi,g}\left[C_\alpha^2 \sum_{k\ge1} \Gamma_k^{-2/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-2/\alpha} \frac{\left|\sigma\left(\xi_k, t - \frac{|x-\xi_k|}{a}\right)\right|^2}{|x-\xi_k|^2} g_k^2 I_{\{|x-\xi_k|<at\}}\right] \le \\
&\le \mathsf{E}_\xi\left[C \sum_{k\ge1} \Gamma_k^{-2/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-2/\alpha} \frac{1}{|x-\xi_k|^2} I_{\{|x-\xi_k|<at\}}\right] = \\
&= C \sum_{k\ge1} \Gamma_k^{-2/\alpha} \iiint_{y:|x-y|<at} \frac{\varphi(y)^{1-2/\alpha} dy}{|x-y|^2} \le \\
&\le C \left(\inf_{y:|x-y|\le at} \varphi(y)\right)^{1-2/\alpha} \sum_{k\ge1} \Gamma_k^{-2/\alpha} \iiint_{y:|x-y|<at} \frac{dy}{|x-y|^2} \le \\
&\le C_{x,t} \sum_{k\ge1} \Gamma_k^{-2/\alpha}.
\end{aligned}$$

З посиленого закону великих чисел випливає, що $\Gamma_k \sim k, k \to +\infty$, P_Γ-майже напевно. Тоді $\mathsf{E}_{\xi,g}\left[|U(x,t)|^2\right] < \infty$ P_Γ-майже напевно. Звідси

$$\mathsf{E}_g\left[|U(x,t)|^2\right] < \infty$$

$\mathsf{P}_\xi \otimes \mathsf{P}_\Gamma$ -майже напевно, що й потрібно було довести. □

Доведемо, що функція $U(x,t)$ задовольняє рівняння (4) в узагальненому сенсі.

Теорема 3. *Для довільної функції $\theta(x,t) \in C_{fin}^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ з імовірністю 1 виконано рівність:*

$$\int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} U(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t) - a^2\Delta\theta(x,t)\right) dx\,dt = \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t)M(dx)dt. \tag{6}$$

Зауваження 1. *Виняткова подія ймовірності нуль може залежати від θ.*

Доведення. Зробимо таке позначення:

$$\psi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t) - a^2\Delta\theta(x,t),$$

$$K(y) = \int_0^\infty \iiint_{x:|x-y|<at} \frac{\varphi(y)^{-1/\alpha}\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)\psi(x,t)}{|x-y|} dx\,dt,$$

$$L(\psi) = \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} U(x,t)\psi(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= C_\alpha \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=1}^\infty \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \frac{\sigma\left(\xi_k, t - \frac{|x-\xi_k|}{a}\right)}{|x-\xi_k|} g_k \psi(x,t) I_{\{|x-\xi_k|<at\}}\, dx\, dt =$$

$$= C_\alpha \sum_{k=1}^\infty \Gamma_k^{-1/\alpha} K(\xi_k) g_k,$$

$$R(\theta) = \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t) M(dx) dt =$$

$$= C_\alpha \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=1}^\infty \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \sigma(\xi_k,t)\theta(\xi_k,t) g_k dx\, dt.$$

Тоді рівність (6) можна записати у вигляді $L(\psi) = R(\theta)$.

Припустимо, що $\operatorname{supp}\theta \subset B(0,R)\times[0,R]$. Тоді для $|y| > R + at$, $L(\psi) = 0$, а для $|y| \le R + at$

$$|K(y)| \le \left| \int_0^\infty \iiint_{x:|x-y|<at} \varphi(y)^{-1/\alpha} \frac{\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} \psi(x,t)\, dx\, dt \right| \le$$

$$\le \int_0^R \iiint_{x:|x|<R} |\varphi(y)|^{-1/\alpha} \frac{\left|\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)\right|}{|x-y|} |\psi(x,t)|\, dx\, dt \le$$

$$\le C \left(\inf_{x:|x|\le R+at} \varphi(x) \right)^{-1/\alpha} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^3 \\ t\ge 0}} |\psi(x,t)| \int_0^R \iiint_{x:|x|\le R} \frac{dx\, dt}{|x-y|} \le C_{R,\psi}.$$

При фіксованих $\omega_\xi \in \Omega_\xi$, $\omega_\Gamma \in \Omega_\Gamma$ справедлива рівність

$$\mathsf{E}_g \left[L(\psi)^2 \right] = C_\alpha^2 \sum_{k\ge 1} \Gamma_k^{-2/\alpha} K^2(\xi_k).$$

Тоді з оцінки на $K(y)$ випливає, що $\mathsf{E}_g \left[L(\psi)^2 \right] < \infty$ для майже всіх $\omega_\xi \in \Omega_\xi$, $\omega_\Gamma \in \Omega_\Gamma$. Оскільки згідно з посиленим законом великих чисел $\Gamma_k \sim k$, $k \to +\infty$, P_Γ-майже напевно, то за теоремою Колмогорова для довільної функції $\psi(x,t) \in C_{fin}^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+)$ ряд для $L(\psi)$ збіжний майже напевно. Аналогічно для ряду $R(\theta)$. Отже, достатньо перевірити рівність відповідних часткових сум, тобто довести, що

$$\begin{aligned} C_\alpha \sum_{k=1}^N \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} g_k \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma\left(\xi_k, t - \frac{|x-\xi_k|}{a}\right)}{|x-\xi_k|} \psi(x,t) I_{\{|x-\xi_k|<at\}}\, dx\, dt = \\ = C_\alpha \sum_{k=1}^N \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} g_k \int_0^\infty \theta(\xi_k,t)\sigma(\xi_k,t)\, dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Помітимо, що

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \int_{\frac{|x-y|}{a}}^\infty \frac{\sigma\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} \psi(x,t)\, dt\, dx = \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma(y,s)}{|x-y|} \psi\left(x, s + \frac{|x-y|}{a}\right) dx\, ds.$$

Щоб довести рівність (7), достатньо перевірити рівність відповідних доданків, тобто достатньо показати, що для довільних $s > 0, y \in \mathbb{R}^3$ виконано

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi\left(x, s + \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|} dx = \theta(y,s). \tag{8}$$

Оскільки $\operatorname{supp}\theta \subset B(0,R)\times[0,R]$, то для будь-яких $s \ge R$, $x \in \mathbb{R}^3$ виконано $\theta(x,s) = 0$; зокрема, рівність (8) очевидна для $s \ge R$. Щоб довести її для $s \in (0,R)$,

покладемо
$$\tilde{\theta}(x,u) = \theta(x, R-u), \quad u \le R.$$
Тоді
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x, R-u) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\theta}(x,u), \quad \Delta\theta(x, R-u) = \Delta\tilde{\theta}(x,u);$$
$$\tilde{\theta}(x,0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\theta}(x,0) = 0.$$

Розглянемо таку крайову задачу:
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)V(x,t) = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\theta}(x,t) - a^2\Delta\tilde{\theta}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in (0,R], \\ V(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

Функція $\tilde{\theta}(x,t)$, очевидно, задовольняє це рівняння. З іншого боку, за формулою Пуассона – Парсеваля розв'язок такого рівняння має вигляд
$$\tilde{\theta}(y,t) = \frac{1}{4\pi a}\iiint_{x:|x-y|<at} \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\theta}\left(x, t - \frac{|x-y|}{a}\right) - a^2\Delta\tilde{\theta}\left(x, t - \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}\,dx.$$
Підставляючи $t = R - s$, маємо
$$\theta(y,s) = \frac{1}{4\pi a}\iiint_{x:|x-y|<a(R-s)} \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta\left(x, s + \frac{|x-y|}{a}\right) - a^2\Delta\theta\left(x, s + \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4\pi a}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi\left(x, s + \frac{|x-y|}{a}\right)}{|x-y|}\,dx.$$
Остання рівність справедлива, оскільки для $|x-y| \ge a(R-s)$ виконується нерівність $s + \frac{|x-y|}{a} \ge R$, а отже $\psi(x,t) = 0$. Таким чином, рівність (8) доведено. □

4. Хвильове рівняння зі стійким кольоровим шумом

Нашою подальшою метою є розгляд рівняння (4), у якому випадковий шум є «кольоровим», тобто значення шуму не є незалежними. А саме, ми розглядатимемо випадковий шум, породжений дійсним гармонізованим анізотропним дробовим стійким полем із параметром Хюрста H:
$$Z^H(x) = \operatorname{Re}\iiint_{\mathbb{R}^3}\prod_{l=1}^{3}\frac{e^{ix_l y_l} - 1}{|y_l|^{H+1/\alpha}}M(dy);$$
з технічних причин ми обмежимося випадком $\alpha \in (1,2)$, $H \in (1/3, 1)$. Властивості цього поля досліджувалися у [7]. У статтях [5, 13] вивчалися його мультидробові аналоги. Зокрема, у цитованих роботах установлено, що вказане поле має модифікацію, реалізації якої задовольняють умову Гельдера з показником $\beta \in (0, H)$. Розклад Лепажа для цього поля виглядає так:
$$Z^H(x) = C_\alpha \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{-1/\alpha}\prod_{l=1}^{3}\frac{e^{ix_l\xi_{k,l}} - 1}{|\xi_{k,l}|^{H+1/\alpha}}\varphi\left(\xi_k\right)^{-1/\alpha} g_k,$$
де
$$\varphi(x) = \prod_{l=1}^{3}\frac{K}{|x_l|\left(\left|\log|x_l|\right| + 1\right)^{1+\eta}},$$

тут η — фіксована додатна стала, $K = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-1} \left(\big|\log|x|\big| + 1\right)^{-1-\eta} dx\right)^{-1}$ — нормуюча стала. Цей розклад є одним з основних засобів для встановлення властивостей реалізації поля Z^H, зокрема, неперервності та гельдерівських властивостей, про які йшлося вище.

Теорія інтегрування за полем Z^H відсутня. Визначимо інтеграл таким чином. Позначимо через

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-|x|^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

щільність стандартного нормального розподілу у $\mathbb{R}^3$. Знайдемо для кожного $\varepsilon > 0$ згортку

$$Z^{H,\varepsilon}(x) = \left(Z^H * \psi_\varepsilon\right) x = \iiint_{\mathbb{R}^3} \psi_\varepsilon\,(x - z)\, Z^H(z) dz,$$

де $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\psi(x) \ge 0$. Визначимо

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(z,y) &= \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \psi_\varepsilon(y-z) Z^H(z) = \\ &= \frac{\prod_{l=1}^3 (y_l - z_l)}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon^9} e^{-\frac{|y-z|^2}{2\varepsilon^2}} \operatorname{Re} \iiint_{\mathbb{R}^3} \prod_{l=1}^3 \frac{e^{iz_l t_l} - 1}{|t_l|^{H+1/\alpha}} M(dt) \end{aligned}$$

та покладемо

$$Y^\varepsilon(y) = \iiint_{\mathbb{R}^3} X^\varepsilon(z,y) dz.$$

Доведемо можливість зміни порядку інтегрування в останньому інтегралі. Згідно з теоремою 4.1 [11], для цього достатньо довести, що $\iiint_{\mathbb{R}^3} \big|X^\varepsilon(z,y)\big| dz < \infty$ майже напевно. У свою чергу, за теоремою 3.3 [11] остання умова рівносильна такій:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\prod_{l=1}^3 |y_l - z_l|}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon^9} e^{-\frac{|y-z|^2}{2\varepsilon^2}} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \left| \operatorname{Re} \prod_{l=1}^3 \frac{e^{iz_l t_l} - 1}{|t_l|^{H+1/\alpha}} \right|^\alpha dt \right)^{1/\alpha} dz < \infty.$$

Застосувавши нерівність $|e^{iz_l t_l} - 1| \le 2 \wedge |z_l t_l|$ та зробивши заміну $u_l = z_l t_l$, $l = 1,2,3$, останній інтеграл оцінимо згори виразом

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\prod_{l=1}^3 |y_l - z_l| |z_l|^{H+1/\alpha-1}}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon^9} e^{-\frac{|y-z|^2}{2\varepsilon^2}} \left(\iiint_{\mathbb{R}^3} \prod_{l=1}^3 \frac{2^\alpha \wedge |u_l|^\alpha}{|u_l|^{\alpha H + 1}} du \right)^{1/\alpha} dz < \infty.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} Y^\varepsilon(y) = {} & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon^9} \iiint_{\mathbb{R}^3} \prod_{l=1}^3 \frac{1}{|t_l|^{H+1/\alpha}} \times \\ & \times \operatorname{Re} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^3 \left(e^{iz_l t_l} - 1\right)(y_j - z_j) \right) e^{-\frac{|y-z|^2}{2\varepsilon^2}} dz\, M(dt). \end{aligned} \tag{9}$$

Використавши аналогічні міркування, одержимо, що для довільного $x \in \mathbb{R}^3$

$$Z^{H,\varepsilon}(x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} Y^\varepsilon(y)\, dy_3\, dy_2\, dy_1,$$

тобто поле $Z^{H,\varepsilon}$ є, принаймні у слабкому сенсі, диференційованим, та

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} Z^{H,\varepsilon}(x) = Y^\varepsilon(x).$$

Тому для функції $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ інтеграл за полем Z^H природно визначити як границю за ймовірністю

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x) Z^H(dx) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \iiint_{\mathbb{R}^3} f(x) \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} Z^{H,\varepsilon}(x) dx \tag{10}$$

у разі, коли така границя існує.

Розглянемо хвильове рівняння з α-стійким кольоровим збуренням:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\right) U(x,t) = \dot{Z}^H(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ U(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Як і в попередньому пункті, потенційний розв'язок рівняння (11) визначимо за формулою Кірхгофа:

$$U(x,t) = \frac{1}{4\pi a} \iiint\limits_{y:|x-y|<at} \frac{1}{|x-y|} Z^H(dy); \tag{12}$$

інтеграл у цій формулі будемо розуміти у сенсі (10).

Доведення коректності цього визначення проведемо в декілька етапів. Спершу визначимо функцію $U'(x,t)$ формальним диференціюванням ряду Лепажа для поля $Z^H(x)$, тобто запишемо формально:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} Z^H(x) = C_\alpha \operatorname{Re} \left(-i \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi\left(\xi_k\right)^{-1/\alpha} g_k \prod_{l=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} \xi_{k,l} e^{i x_l \xi_{k,l}}}{\left|\xi_{k,l}\right|^{H+1/\alpha-1}} \right)$$

і тимчасово покладемо

$$\begin{aligned} U'(x,t) = C_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \prod_{l=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} \xi_{k,l}}{\left|\xi_{k,l}\right|^{H+1/\alpha-1}} g_k \times \\ \times \operatorname{Im} \left(e^{i(x,\xi_k)} \iiint_{y:|x-y|<at} \frac{e^{i(y-x,\xi_k)}}{|x-y|} dy \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Перетворимо останній інтеграл:

$$\begin{aligned} &\iiint_{y:|x-y|<at} \frac{e^{i(y-x,\xi_k)}}{|x-y|}\, dy = \iiint_{|z|<at} \frac{e^{i(z,\xi_k)}}{|z|}\, dz = \left|\xi_k \to |\xi_k|\, \overrightarrow{e_3}\right| = \\ &\quad = \iiint_{|z|<at} \frac{e^{i z_3 |\xi_k|}}{|z|}\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{at} \rho^2 \sin\theta \frac{e^{i\rho\cos\theta|\xi_k|}}{\rho}\, d\rho\, d\theta\, d\nu = \\ &\quad = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{at} \rho \sin\theta e^{i\rho\cos\theta|\xi_k|}\, d\rho\, d\theta = -\frac{2\pi}{i\,|\xi_k|} \int_0^{at} e^{i\rho\cos\theta|\xi_k|} \Big|_0^{\pi} d\rho = \\ &\quad = \frac{4\pi}{|\xi_k|} \int_0^{at} \frac{e^{i\rho|\xi_k|} - e^{-i\rho|\xi_k|}}{2i} d\rho = \frac{4\pi}{|\xi_k|} \int_0^{at} \sin\rho\,|\xi_k|\, d\rho = \frac{4\pi}{|\xi_k|^2} \left(-\cos\rho\,|\xi_k|\right) \Big|_0^{at} = \\ &\quad = \frac{4\pi}{|\xi_k|^2} \left(1 - \cos at\,|\xi_k|\right). \end{aligned}$$

Останню формулу використаємо для означення функції U', тобто покладемо

$$U'(x,t) = \frac{C_\alpha}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \prod_{l=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} \xi_{k,l}}{\left|\xi_{k,l}\right|^{H+1/\alpha-1}} \sin\left(x,\xi_k\right) \frac{1 - \cos at\,|\xi_k|}{|\xi_k|^2} g_k. \tag{14}$$

Твердження 1. *Ряд у формулі* (14) *є збіжним майже напевно.*

Доведення. Оскільки величини g_k незалежні, то

$$\mathsf{E}_g\left[U'(x,t)^2\right] = \frac{C_\alpha^2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{-2/\alpha}\varphi(\xi_k)^{-2/\alpha}\prod_{l=1}^{3}\frac{1}{|\xi_{k,l}|^{2H+2/\alpha-2}}\sin^2(x,\xi_k)\frac{(1-\cos at\,|\xi_k|)^2}{|\xi_k|^4} =: \\ =: \frac{C_\alpha^2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{-2/\alpha}g(t,x,\xi_k).$$

Оцінимо

$$\mathsf{E}_\xi\left[g(t,x,\xi_k)\right] = \iiint_{\mathbb{R}^3}\varphi(y)^{1-2/\alpha}\frac{\sin^2(x,y)(1-\cos at\,|y|)^2}{|y|^4}\prod_{l=1}^{3}\frac{dy_l}{|y_l|^{2H+2/\alpha-2}} =$$

$$= K^{3-6/\alpha}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin^2(x,y)(1-\cos at\,|y|)^2}{|y|^4}\prod_{l=1}^{3}\frac{dy_l}{|y_l|^{2H-1}\left(\left|\log|y_l|\right|+1\right)^{1+\eta-2/\alpha-2\eta/\alpha}} \le$$

$$\le K^{3-6/\alpha}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\left(1\wedge|x|^2|y|^2\right)\left(4\wedge a^4t^4|y|^4\right)}{|y|^4}\prod_{l=1}^{3}\frac{dy_l}{|y_l|^{2H-1}\left(\left|\log|y_l|\right|+1\right)^{1+\eta-2/\alpha-2\eta/\alpha}}.$$

Зробимо сферичну заміну:

$$y_1 = \rho\sin\theta\cos\nu,\quad y_2 = \rho\sin\theta\sin\nu,\quad y_3 = \rho\cos\theta, \\ \rho>0,\quad \theta\in[0,\pi],\quad \nu\in[0,2\pi]. \tag{15}$$

За допомогою нерівності

$$\left(\left|\log|z|\right|+1\right)^d \le C_\varepsilon\left(|z|^{-\varepsilon}\vee|z|^{\varepsilon}\right), \tag{16}$$

де $d = 2/\alpha+2\eta/\alpha-1-\eta$, зробимо оцінку

$$\left(\left|\log|\rho\sin\theta\cos\nu|\right|+1\right)^d \le C_\varepsilon\left(\rho^\varepsilon\vee\rho^{-\varepsilon}\right)|\sin\theta|^{-\varepsilon}|\cos\nu|^{-\varepsilon}. \tag{17}$$

Аналогічно оцінимо інші логарифми. Тоді

$$\mathsf{E}_\xi\left[g(t,x,\xi_k)\right] \le C_\varepsilon\int_0^\infty\!\!\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^\pi\frac{\left(\rho^\varepsilon\vee\rho^{-\varepsilon}\right)^3\left(1\wedge|x|^2\rho^2\right)\left(4\wedge a^4t^4\rho^4\right)}{\rho^{6H-1}}\times \\ \times|\sin\theta|^{3-4H-2\varepsilon}|\cos\theta|^{1-2H-\varepsilon}|\sin\nu|^{1-2H-\varepsilon}|\cos\nu|^{1-2H-\varepsilon}\,d\theta\,d\nu\,d\rho.$$

Звідси при $\varepsilon < 2-2H$ маємо

$$\mathsf{E}_\xi\left[g(t,x,\xi_k)\right] \le C_\varepsilon\int_0^\infty\frac{\left(\rho^\varepsilon\vee\rho^{-\varepsilon}\right)^3\left(1\wedge|x|^2\rho^2\right)\left(4\wedge a^4t^4\rho^4\right)}{\rho^{6H-1}}\,d\rho.$$

Останній інтеграл збіжний у нулі, оскільки $7-6H-3\varepsilon > -1$, а на нескінченності при $1-6H+3\varepsilon < -1$, тобто при $\varepsilon < 2(H-1/3)$. Таким чином, поклавши $\varepsilon = (1-H)\wedge(H-1/3)$, одержимо $\mathsf{E}_\xi\left[g(t,x,\xi_k)\right] < \infty$, звідки

$$\mathsf{E}_{g,\xi}\left[U'(x,t)^2\right] = \frac{C_\alpha^2}{a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{-2/\alpha}\mathsf{E}_\xi\left[g(t,x,\xi_k)\right] < \infty$$

P_Γ-майже напевно. Звідси, як і раніше, із теореми Колмогорова виводимо збіжність ряду для $U'(x,t)$ майже напевно. □

Позначимо

$$U^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{4\pi a}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}Z^{H,\varepsilon}(y)\frac{dy}{|x-y|}.$$

Теорема 4. *Для всіх $t>0, x\in\mathbb{R}^3$ справедлива збіжність за ймовірністю*

$$U^\varepsilon(x,t)\xrightarrow{\mathsf{P}}U'(x,t),\quad \varepsilon\to 0+. \tag{18}$$

Доведення. Перетворимо внутрішній інтеграл у формулі для $\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} Z^{H,\varepsilon}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iz_i t_i} - 1\right)(y_j - z_j)\, e^{-\frac{|y_j - z_j|^2}{2\varepsilon^2}} dz_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon^3} \int_{\mathbb{R}} e^{iz_i t_i} (y_j - z_j)\, e^{-\frac{|y_j - z_j|^2}{2\varepsilon^2}} dz_j =$$
$$= e^{iy_j t_j} \int_{\mathbb{R}} e^{i(z_j - y_j)t_j} (y_j - z_j) e^{-\frac{|y_j - z_j|^2}{2\varepsilon^2}} \frac{dz_j}{\sqrt{2\pi}\varepsilon^3} =$$
$$= e^{iy_j t_j} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt_j} x e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\varepsilon^3} = e^{iy_j t_j} \widehat{\psi'_\varepsilon}(t_j) =$$
$$= e^{iy_j t_j} (-it_j) \widehat{\psi_\varepsilon}(t_j) = -it_j e^{iy_j t_j} e^{-\varepsilon^2 t_j^2/2}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} Z^{H,\varepsilon}(y) = i \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i(z,y)} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} z_j e^{-\varepsilon^2 z_j^2/2}}{|z_j|^{H+1/\alpha-1}} M(dz).$$

Звідси, використовуючи міркування, аналогічні тим, що привели до (9), маємо

$$U^\varepsilon(x,t) = \frac{1}{4\pi a} \operatorname{Re}\left(i \iiint_{y:|x-y|<at} \frac{1}{|x-y|} \times \right.$$
$$\left. \times \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{i(z,y)} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} z_j}{|z_j|^{H+1/\alpha-1}} e^{-\varepsilon^2 |z|^2/2} M(dz)\, dy \right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi a} \operatorname{Re}\left(i \iiint_{\mathbb{R}^3} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} z_j}{|z_j|^{H+1/\alpha-1}} e^{-\varepsilon^2|z|^2/2} \iiint\limits_{y:|x-y|<at} \frac{e^{i(z,x)}}{|x-y|}\, dy\, M(dz) \right) =$$
$$= \frac{1}{a} \operatorname{Re}\left(i \iiint_{\mathbb{R}^3} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} z_j}{|z_j|^{H+1/\alpha-1}} e^{-\varepsilon^2|z|^2/2} \frac{e^{i(z,x)}}{|z|^2} (1 - \cos at\,|z|) M(dz) \right) =$$
$$= \frac{1}{a} \iiint_{\mathbb{R}^3} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} z_j}{|z_j|^{H+1/\alpha-1}} e^{-\varepsilon^2|z|^2/2} \sin(z,x) \frac{1 - \cos at\,|z|}{|z|^2} M(dz).$$

Визначимо часткові суми ряду Лепажа:

$$U_N(x,t) = \frac{C_\alpha}{a} \sum_{k=1}^{N} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} \xi_{k,j}}{|\xi_{k,j}|^{H+1/\alpha-1}} \sin(x,\xi_k) \frac{1 - \cos at\,|\xi_k|}{|\xi_k|^2} g_k,$$
$$U_N^\varepsilon(x,t) = \frac{C_\alpha}{a} \sum_{k=1}^{N} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k)^{-1/\alpha} \prod_{j=1}^{3} \frac{\operatorname{sign} \xi_{k,j}}{|\xi_{k,j}|^{H+1/\alpha-1}} e^{\frac{-\varepsilon^2|\xi_k|^2}{2}} \sin(\xi_k,x) \frac{1 - \cos at\,|\xi_k|}{|\xi_k|^2} g_k.$$

Оцінимо для довільного $\delta > 0$

$$\mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U^\varepsilon(x,t)| > \delta\right) \le \mathsf{P}\left(|U_N(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) +$$
$$+ \mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U_N(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) + \mathsf{P}\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right). \tag{19}$$

Легко бачити, що для будь-яких $t \ge 0, x \in \mathbb{R}^3, N \ge 1$ виконується

$$U_N^\varepsilon(x,t) \to U_N(x,t), \quad \varepsilon \to 0+$$

майже напевно. Тоді

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0+} \mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U^\varepsilon(x,t)| > \delta\right) \le$$

$$\leq \mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U_N(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) + \varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{P}\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right).$$

Із твердження 1 випливає, що

$$\mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U_N(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) \to 0, \quad N \to \infty.$$

Отже,

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U^\varepsilon(x,t)| > \delta\right) \leq \varlimsup_{N\to\infty} \varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{P}\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right). \quad (20)$$

Оцінимо

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0+} \mathsf{P}\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) \leq \mathsf{E}_{\Gamma,\xi}\left[\sup_{\varepsilon>0} \mathsf{P}_g\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right)\right]. \quad (21)$$

За нерівністю Чебишова, для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}_g\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) \leq \frac{9}{\delta^2}\mathsf{E}_g\left[|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)|^2\right]. \quad (22)$$

З розкладу Лепажа маємо, що

$$\mathsf{E}_g\left[|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)|^2\right] \leq$$
$$\leq C\sum_{k=N+1}^{\infty} \Gamma_k^{-2/\alpha}\varphi(\xi_k)^{-2/\alpha}\prod_{j=1}^{3}\frac{1}{|\xi_{k,j}|^{2H+2/\alpha-2}}\sin^2(\xi_k,x)\frac{(1-\cos at\,|\xi_k|)^2}{|\xi_k|^4} =:$$
$$=: C\sum_{k=N+1}^{\infty}\Gamma_k^{-2/\alpha} g(t,x,\xi_k).$$

У твердженні 1 доведено, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{-2/\alpha}g(t,x,\xi_k)$ збіжний $\mathsf{P}_\Gamma\otimes\mathsf{P}_\xi$-майже напевно. Отже, враховуючи (22), маємо $\sup_{\varepsilon>0}\mathsf{P}_g\left(|U^\varepsilon(x,t) - U_N^\varepsilon(x,t)| > \frac{\delta}{3}\right) \to 0$, $N\to\infty$, $\mathsf{P}_\Gamma\otimes\mathsf{P}_\xi$-майже напевно. Використовуючи теорему про мажоровану збіжність, з оцінок (20), (21) дістанемо

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0+}\mathsf{P}\left(|U'(x,t) - U^\varepsilon(x,t)| > \delta\right) = 0,$$

що й треба довести. □

Як і у випадку рівняння з білим шумом, функція $U(x,t)$ задовольняє рівняння (11) в узагальненому сенсі.

Теорема 5. *Для довільної функції* $\theta(x,t) \in C_{fin}^{\infty}(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^+)$ *з імовірністю 1 виконано рівність*

$$\int_0^\infty\iiint_{\mathbb{R}^3} U(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t) - a^2\Delta\theta(x,t)\right)dx dt = \int_0^\infty\iiint_{\mathbb{R}^3}\theta(x,t)\sigma(x,t)Z^H(dx)dt. \quad (23)$$

Доведення. Оскільки міркування є цілком аналогічними попереднім, дамо лише схему доведення. Позначимо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t) - a^2\Delta\theta(x,t) = \psi(x,t).$$

Тоді рівність (23) можна записати у вигляді

$$\int_0^\infty\iiint_{\mathbb{R}^3} U(x,t)\psi(x,t)dx\,dt = \int_0^\infty\iiint_{\mathbb{R}^3}\theta(x,t)\sigma(x,t)Z^H(dx)dt.$$

Зауважимо, що

$$\int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t)Z^H(dx)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t)Z^{H,\varepsilon}(dx)dt.$$

Оскільки поле $Z^{H,\varepsilon}$ гладке, то зі стандартних фактів щодо рівнянь у частинних похідних маємо

$$\int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} U^\varepsilon(x,t)\psi(x,t)dx\,dt = \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t)Z^{H,\varepsilon}(dx)dt.$$

Далі, аналогічно теоремі (2), можна довести, що

$$\int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} U^\varepsilon(x,t)\psi(x,t)dx\,dt \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} U(x,t)\psi(x,t)dx\,dt.$$

З іншого боку, за означенням маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t)Z^{H,\varepsilon}(dx)dt = \int_0^\infty \iiint_{\mathbb{R}^3} \theta(x,t)\sigma(x,t)Z^H(dx)dt. \qquad \square$$

Список літератури

1. R. M. Balan and C. A. Tudor, *The stochastic wave equation with fractional noise: a random field approach*, Stochastic Process. Appl. **120** (2010), no. 12., 2468–2494.
2. I. M. Bodnarchuk, *Wave equation with a stochastic measure*, Teor. Imovir. Mat. Stat. **94** (2016), 1–15. (Ukrainian)
3. R. C. Dalang and N. E. Frangos, *The stochastic wave equation in two spatial dimensions*, Ann. Probab. **26** (1998), no. 1, 187–212.
4. R. C. Dalang and M. Sanz-Sole, *Hölder–Sobolev Regularity of the Solution to the Stochastic Wave Equation in Dimension Three*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 199 (931), AMS, Providence, 2009.
5. M. Dozzi and G. Shevchenko, *Real harmonizable multifractional stable process and its local properties*, Stochastic Process. Appl. **121** (2011), no. 7, 1509–1523.
6. D. M. Gorodnya, *On the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for wave equations with general stochastic measures*, Theory Probab. Math. Statist. **85** (2012), 53–59.
7. N. Kôno and M. Maejima, *Hölder continuity of sample paths of some self-similar stable processes*, Tokyo J. Math. **14** (1991), no. 1, 93–100.
8. A. Millet and P.-L. Morien, *On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density*, Stochastic Process. Appl. **86** (2000), no. 1, 141–162.
9. L. Pryhara and G. Shevchenko, *Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise*, Mod. Stoch. Theory Appl. **3** (2016), no. 3, 237–248.
10. L. Quer-Sardanyons and S. Tindel, *The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet*, Stochastic Process. Appl. **117** (2007), no. 10, 1448–1472.
11. G. Samorodnitsky, *Integrability of stable processes*, Probab. Math. Statist. **13** (1992), no. 2, 191–204.
12. G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, New York, 1994.
13. G. M. Shevchenko, *Local properties of a multifractional stable field*, Theory Probab. Math. Statist. **85** (2012), 159–168.
14. J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial diferential equations*, École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV – 1984, Lecture Notes in Math., vol. 1180, Springer, Berlin, 1986, 265–439.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: pruhara7@gmail.com

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: zhora@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2017

WAVE EQUATION WITH STABLE NOISE

L. I. PRYHARA, G. M. SHEVCHENKO

Abstract. We study a three-dimensional wave equation with a source having symmetric α-stable distribution. Two cases are considered: where the perturbation is a “white noise” and where it is a “coloured noise”. In both cases we show that a candidate solution to the equation, given by the Kirchhoff formula, is a generalized solution.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С УСТОЙЧИВЫМ ШУМОМ

Л. И. ПРИГАРА, Г. М. ШЕВЧЕНКО

Аннотация. В статье изучается трехмерное волновое уравнение с правой частью, имеющей симметричное α-устойчивое распределение. Рассмотрены два случая: когда возмущение является «белым шумом» и когда оно являтся «цветным шумом». В обоих случаях доказано, что потенциальное решение уравнения, заданное формулой Кирхгофа, является обобщенным решением.