

МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ У ПРОСТОРИ $L_p([0, T])$

Ю. В. КОЗАЧЕНКО, А. О. ПАШКО, О. І. ВАСИЛИК

*Автори присвячують цю роботу пам'яті свого вчителя
Михайла Йосиповича Ядренка*

Анотація. Будується модель дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$, яка наближає такий процес із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0, T])$. Наведено приклад моделювання у просторі $L_2([0, 1])$.

Ключові слова і фрази. Гауссові процеси, дробовий броунівський рух, моделювання, субгауссові процеси.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60G15, 60G22, 60G51, 68U20.

1. ВСТУП

Стохастичне моделювання випадкових процесів та полів використовується в багатьох областях природничих на соціальних наук, таких як економіка, математика, фізика, інженерія, метеорологія, біологія, соціологія, в яких воно забезпечує основу для ґрунтового аналізу та прийняття рішень. Ця галузь активно розвивається, починаючи з другої половини 20-го століття. Особливе місце займають методи і алгоритми моделювання вінерівського та узагальненого вінерівського процесів — процесів дробового броунівського руху. Численні дослідження показують (див., наприклад, [35]), що дані спостережень у теорії масового обслуговування, дослідженнях телекомунікаційних мереж, фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого. Одним із таких процесів є процес дробового броунівського руху (ДБР). Уперше такий процес розглянув Колмогоров [8] у 1940 році під час вивчення задач моделювання турбулентності [9]. Він досліджував дробовий броунівський рух у гільбертовому просторі, зокрема, отримав вигляд коваріаційної функції цього процесу з умови, яку ми зараз називаємо властивістю самоподібності. Із ранніх робіт також варто згадати публікацію Яглома [37], у якій він досліджував випадкові процеси зі стаціонарними n -ми приростами, маючи за мету узагальнення спектральної теорії стаціонарних процесів на більш загальний клас процесів. Тут дробовий броунівський рух розглядався як приклад випадкового процесу зі стаціонарними першими приростами і визначався через спектральну щільність. У результаті досліджень фракталів, зокрема, після роботи Мандельброта та ван Несса [23], в якій дробовий броунівський рух був зображений у вигляді інтеграла за вінерівським процесом по всій дійсній осі, дробовий броунівський рух став об'єктом інтенсивного вивчення. Зокрема, у роботах [29, 32] розглядаються деякі класичні зображення для дробового броунівського руху. Короткий огляд властивостей дробового броунівського руху наведено у [34], а систематичний аналіз, узагальнення та застосування існуючих результатів досліджень цих процесів можна знайти у книгах [1, 24].

Детальний огляд методів моделювання процесів дробового броунівського руху міститься в роботах [2] та [4]. У ранніх роботах як модель вінерівського процесу розглядалась дискретна послідовність незалежних гауссових випадкових величин.

Ці моделі застосовувались, наприклад, для знаходження інтегралів [6], розв'язування стохастичних крайових задач [33]. У роботах [3, 25, 30, 31] використовувалось спектральне зображення узагальненого вінерівського процесу для побудови спектральних моделей цього процесу. У [7, 11, 12, 15, 17, 21, 26, 27, 36] застосовувалось зображення дробового броунівського руху у вигляді випадкового ряду (див., наприклад, [5, 10, 19] стосовно розкладів у ряди, які використовують для моделювання), як моделі розглядалися скінченні суми, досліджувалися надійність та точність моделювання. Моделюванню випадкових процесів та полів також присвячені роботи [13, 14, 16], зокрема, гауссових процесів та полів — [22, 26], а більш загальних φ -субгауссових процесів — [18, 36].

Вказані підходи до моделювання мають свої переваги і недоліки. Великим недоліком методів моделювання на основі зображення дробового броунівського руху у вигляді випадкового ряду є необхідність проведення складної підготовчої роботи. Наприклад, у роботах [21, 26] для визначення параметрів моделі слід обчислити із заданою точністю наближені значення послідовностей нулів для двох функцій Бесселя першого роду, а це вимагає великих затрат часу. Використання спектрального зображення дробового броунівського руху не має таких недоліків.

Для спектральних моделей, запропонованих у згаданих вище роботах, досліджувалася збіжність кореляційних функцій, скінченно-вимірних розподілів тощо, а проблеми надійності та точності моделювання в різних функціональних просторах не вивчались. У цій роботі ми будемо спектральну модель дробового броунівського руху, яка наближає такий процес із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0, T])$. У розділі 2 ми наводимо деякі допоміжні результати та визначаємо модель дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$. У розділі 3 отримано умови, за яких дана модель наближає процес дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $L_p([0, T])$, та виведено наслідок для випадку $L_2([0, T])$. В останньому розділі наведено приклад моделювання процесу ДБР із заданими надійністю та точністю у просторі $L_2([0, 1])$ для певних значень параметра α .

2. МОДЕЛЬ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

Нехай (Ω, Σ, P) — стандартний імовірнісний простір, а T — деяка параметрична множина ($T = [0, T]$ або $T = [0, \infty)$).

Означення 2.1. Випадковий процес $\{W_\alpha(t), t \in T\}$ називається дробовим броунівським рухом із параметром $\alpha \in (0, 2)$, якщо він є гауссовим процесом із нульовим середнім $EW_\alpha(t) = 0$, кореляційною функцією

$$R(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t - s|^\alpha)$$

та $W_\alpha(0) = 0$.

Відомо, що дробовий броунівський рух із параметром $\alpha \in (0, 2)$ можна зобразити у такому вигляді (наприклад, див. роботи [29–31]):

$$W_\alpha(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right), \quad t \in [0, T],$$

де $\xi(\lambda), \eta(\lambda)$ — незалежні дійсні стандартні вінерівські процеси з

$$E\xi(\lambda) = E\eta(\lambda) = 0,$$

$$E(d\xi(\lambda))^2 = E(d\eta(\lambda))^2 = d\lambda,$$

$$A^2 = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\}^{-1} = \left\{ -\frac{2}{\pi} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}^{-1}.$$

Розглянемо відрізок $[0, \Lambda]$, $\Lambda > 0$, та зобразимо процес $W_\alpha = \{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ у вигляді

$$W_\alpha(t) = W_\alpha(t, [0, \epsilon]) + W_\alpha(t, [\epsilon, \Lambda]) + W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]),$$

де $0 < \epsilon < \Lambda$ та

$$W_\alpha(t, [a, b]) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_a^b \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_a^b \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right).$$

Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ — це таке розбиття відрізка $[0, \Lambda]$, що $\lambda_1 = \epsilon$. Будемо *модель* процесу W_α у вигляді такої суми:

$$\begin{aligned} S_M(t, \Lambda) &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i)) \right) = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} X_i - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} Y_i \right), \quad t \in [0, T], \quad M \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

де $\{X_i, Y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, — це незалежні гауссові випадкові величини та

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}Y_i = 0, \quad \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}Y_i^2 = \lambda_{i+1} - \lambda_i.$$

У подальшому нам буде потрібне твердження, яке є окремим випадком теореми 2.1 та наслідку 2.1 з роботи [7].

Твердження 2.1 [7]. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ — центрований гауссівський випадковий процес та інтеграл Лебега $\int_0^T (\mathbb{E}(X(t))^2)^{p/2} dt < \infty$ при $p \geq 1$ (позначимо $\int_0^T (\mathbb{E}(X(t))^2)^{p/2} dt =: c$). Тоді інтеграл $\int_0^T |X(t)|^p dt$ існує з імовірністю 1 та для довільних $\varepsilon > c^{p/2}$ справедлива оцінка*

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T |X(t)|^p dt > \varepsilon \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^{2/p}}{2c^{2/p}} \right\}.$$

3. МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ ІЗ ЗАДАНИМИ НАДІЙНІСТЮ ТА ТОЧНІСТЮ У ПРОСТОРІ $L_p([0, T])$

Означення 3.1. Модель $S_M = \{S_M(t, \Lambda), t \in [0, T]\}$ наближає випадковий процес $W_\alpha = \{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0, T])$, $p \geq 1$, якщо

$$\mathbb{P} \left\{ \left(\int_0^T |W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda)|^p dt \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq \delta.$$

Оскільки процес відхилень $X_M(t, \Lambda) := W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, є центрованим гауссовим випадковим процесом, то до нього можна застосувати твердження 2.1. У результаті отримуємо умови, за яких модель $S_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, наближає процес W_α з надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0, T])$.

Теорема 3.1. *Модель S_M наближає процес W_α із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0, T])$, $p \geq 1$, якщо у випадку $\alpha \in (0, 1]$*

виконується умова

$$\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \left(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}\right) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) \right)^{p/2} dt < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}} \right\},$$

а у випадку $\alpha \in (1, 2)$ виконується умова

$$\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) \right)^{p/2} dt < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}} \right\},$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ – розбиття відрізка $[0, \Lambda]$.

Доведення. Як уже зазначалося вище, до процесу відхилень $X_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, можна застосувати твердження 2.1. Це означає, що для процесу $X_M(t, \Lambda)$ справджується така нерівність для довільних значень $u > cp^{\frac{p}{2}}$:

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T |X_M(t, \Lambda)|^p dt > u \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{p}}}{2c^{\frac{2}{p}}} \right\},$$

де

$$c = \int_0^T (\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2)^{p/2} dt.$$

Якщо ми візьмемо $\varepsilon = u^{\frac{1}{p}}$ та $\delta \geq 2 \exp \left\{ -\frac{u^{2/p}}{2c^{2/p}} \right\} = 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2c^{2/p}} \right\}$, $0 < \delta < 1$, то наведена вище оцінка набуде такого вигляду:

$$\mathbb{P} \left\{ \left(\int_0^T |X_M(t, \Lambda)|^p dt \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq \delta,$$

тобто, ми отримуємо таку ж нерівність, як і в означенні 3.1. Таким чином, для того, щоб дізнатися, за яких умов модель S_M наближає процес W_α у просторі $L_p([0, T])$ із заданою точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1 - \delta$, необхідно перевірити, коли виконуються умови твердження 2.1.

Перш за все, з умови $u > cp^{p/2}$ отримуємо $\varepsilon = u^{1/p} > (cp^{p/2})^{1/p} = c^{1/p} p^{1/2}$ і, отже, $c < \frac{\varepsilon^p}{p^{p/2}}$.

По-друге, маючи $\delta \in (0, 1)$ таке, що $\delta \geq 2 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2c^{2/p}} \right\}$, ми отримуємо

$$\exp \left\{ -\frac{\varepsilon^2}{2c^{\frac{2}{p}}} \right\} \leq \frac{\delta}{2}; \quad -\frac{\varepsilon^2}{2c^{\frac{2}{p}}} \leq \ln \frac{\delta}{2}; \quad 2c^{\frac{2}{p}} \leq \frac{\varepsilon^2}{-\ln \frac{\delta}{2}};$$

$$c \leq \left(\frac{\varepsilon^2}{-2 \ln \frac{\delta}{2}} \right)^{\frac{p}{2}} = \frac{\varepsilon^p}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}}.$$

Таким чином, бачимо, що має виконуватися така умова:

$$c = \int_0^T (\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2)^{p/2} dt < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}} \right\}. \quad (1)$$

Далі розглянемо математичне сподівання $E(X_M(t, \Lambda))^2$:

$$\begin{aligned} E(X_M(t, \Lambda))^2 &= E(W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\ &= E(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]) + W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) + W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\ &= E(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]))^2 + E(W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]))^2 + E(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2. \end{aligned}$$

Тепер оцінимо кожен доданок у наведеному вище виразі:

$$\begin{aligned} E(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]))^2 &= \frac{A^2}{\pi} E\left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^{\lambda_1} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda)\right)^2 = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ E\left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda)\right)^2 + E\left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda)\right)^2 \right\} = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(\cos(\lambda t) - 1)^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda + \int_0^{\lambda_1} \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(\cos(\lambda t) - 1)^2 + \sin^2(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{2 - 2\cos(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{4\sin^2\left(\frac{\lambda t}{2}\right)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} \leq \\ &\leq \frac{A^2}{\pi} \left\{ t^2 \int_0^{\lambda_1} \lambda^{2-1-\alpha} d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Для наступного доданка маємо

$$\begin{aligned} E(W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]))^2 &= E\left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_\Lambda^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_\Lambda^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda)\right)^2 = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_\Lambda^\infty \frac{(2 - 2\cos(\lambda t))}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} \leq 2 \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_\Lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}} \right\} \leq \frac{2A^2}{\alpha\pi\Lambda^\alpha}. \end{aligned}$$

А для $E(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2$ отримуємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} E(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2 &= \frac{A^2}{\pi} E\left(\int_{\lambda_1}^\Lambda \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_{\lambda_1}^\Lambda \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i))\right)^2 = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ E\left(\sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right) d\xi(\lambda) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right) d\eta(\lambda)\right)^2 \right\} = \\ &= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)^2 d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)^2 d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} (\Sigma_{\cos} + \Sigma_{\sin}). \end{aligned}$$

Спочатку оцінимо $\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda$:

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\ & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq \\ & \leq 2 \left(\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t) - \sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\sin(\lambda_i t))^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right) = \\ & = 2(W_{i1} + W_{i2}). \end{aligned}$$

Тепер оцінимо W_{i1} та W_{i2} :

$$W_{i1} \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{4(\sin(\frac{\lambda t - \lambda_i t}{2}))^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(\lambda - \lambda_i)^2 t^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{t^2(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}}. \quad (2)$$

Для того, щоб оцінити W_{i2} , розглянемо окремо випадок $\alpha \leq 1$ та випадок $1 < \alpha < 2$. У випадку $\alpha \leq 1$ можна скористатися нерівністю $|\sin x| \leq |x|^\beta$, $0 < \beta \leq 1$. Тоді при $\beta < \alpha$ отримаємо

$$W_{i2} \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \left(\frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{\left(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} \right)^2}{\left(\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} \right)^2} d\lambda. \quad (3)$$

Пригадаємо ще таку нерівність: $a^\nu - b^\nu \leq (a - b)^\nu$, коли $\nu \leq 1$ та $a > b$. У нашому випадку $0 < \lambda_i < \lambda_{i+1}$ та $(\alpha + 1)/2 \leq 1$ при $\alpha \leq 1$. Тому з (3) отримуємо

$$W_{i2} \leq \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+1}}{\lambda_i^{2(\alpha+1)}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{2(\alpha-\beta)+2}}.$$

Візьмемо $\beta = \frac{3}{4}\alpha$. Тоді

$$W_{i2} \leq t^{\frac{3}{2}\alpha} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}}. \quad (4)$$

У випадку $1 < \alpha < 2$ матимемо

$$\begin{aligned} W_{i2} & \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{\left(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} \right)^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda = \\ & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{\left(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}} \right)^2 \left(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} + \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}} \right)^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\ & \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha+1}{2}} 4\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{4t^2(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\alpha-1} \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}} \leq \frac{4t^2(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отже, із (2)–(5) випливає, що при $\alpha \leq 1$

$$\Sigma_{\sin} \leq 2 \left(t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), \quad (6)$$

а у випадку $1 < \alpha < 2$

$$\Sigma_{\sin} \leq 2t^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{4(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right). \quad (7)$$

Тепер оцінимо $\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda$:

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\ & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq \\ & \leq 2 \left(\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - \cos(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\cos(\lambda_i t) - 1)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right) = \\ & = 2(W_{i3} + W_{i4}). \end{aligned}$$

Для W_{i3} маємо

$$\begin{aligned} W_{i3} & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(\cos(\lambda t) - \cos(\lambda_i t))^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(2 \sin(\frac{\lambda t + \lambda_i t}{2}) \sin(\frac{\lambda_i t - \lambda t}{2}))^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\ & \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{4 \left| \frac{\lambda_i t - \lambda t}{2} \right|^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вираз W_{i4} спочатку оцінимо при $\alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned} W_{i4} & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\cos(\lambda_i t) - 1)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\ & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(2 \sin^2 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\ & = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq \\ & \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \left(\left| \frac{\lambda_i t}{2} \right|^{\frac{\beta}{2}} \right)^4 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\ & \leq 2^{2-2\beta} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+1}}{\lambda_i^{2(\alpha+1)}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = \frac{2^{2-2\beta} t^{2\beta} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{2(\alpha-\beta)+2}}. \end{aligned}$$

Знову виберемо $\beta = \frac{3}{4}\alpha$. Тоді

$$W_{i4} \leq \frac{2^{2-\frac{3}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2}\alpha} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}}. \quad (9)$$

У випадку $1 < \alpha < 2$ матимемо

$$W_{i4} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \left(\left| \frac{\lambda_i t}{2} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^4 \frac{\left(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}} \right)^2 \left(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} + \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}} \right)^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
&\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha+1}{2}} 4\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \frac{4t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Отже, із (8)–(10) при $\alpha \leq 1$ маємо

$$\Sigma_{\cos} \leq 2 \left(t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), \quad (11)$$

а у випадку $1 < \alpha < 2$

$$\Sigma_{\cos} \leq 2t^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{4(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right). \quad (12)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2 \leq \\
&\leq \begin{cases} \frac{2A^2}{\pi} \left(2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), & \alpha \leq 1; \\ \frac{4A^2 t^2}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + 4 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right), & 1 < \alpha < 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

І для $\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2$ маємо наступні оцінки:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &\leq \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\
&\quad \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), \quad \alpha \leq 1; \quad (13)
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &\leq \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\
&\quad \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right), \quad 1 < \alpha < 2. \quad (14)
\end{aligned}$$

Нарешті, з оцінок (13)–(14) ми отримуємо, що умова (1) буде виконуватися, якщо справджуються такі нерівності:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) \right)^{p/2} dt < \\
&< \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}} \right\}, \quad \alpha \leq 1, \quad (15)
\end{aligned}$$

та

$$\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) \right)^{p/2} dt < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{p/2}}, \frac{1}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}} \right\}, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (16)$$

Таким чином, якщо виконуються умови (15)–(16), то справедливе твердження теореми 3.1. \square

Наслідок 3.1. *Модель S_M наближає процес W_α у просторі $L_2([0, T])$ із заданою точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, якщо у випадку $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова*

$$\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{T^3 \lambda_1^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)} + \frac{T}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2T^3}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{\lambda_i^{\alpha+1}} + \frac{(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) T^{\frac{3}{2}\alpha+1}}{\frac{3}{2}\alpha + 1} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) < \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \min \left\{ 1, \left(-\ln \frac{\delta}{2} \right)^{-1} \right\},$$

а у випадку $\alpha \in (1, 2)$ виконується умова

$$\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{T^3 \lambda_1^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)} + \frac{T}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2T^3}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{\lambda_i^{\alpha+1}} + \frac{4T^3}{3} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) < \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \min \left\{ 1, \left(-\ln \frac{\delta}{2} \right)^{-1} \right\},$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ – розбиття відрізка $[0, \Lambda]$.

Доведення. У випадку $p = 2$

$$\varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{p/2}}, \frac{1}{(-2 \ln \frac{\delta}{2})^{p/2}} \right\} = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \min \left\{ 1, \left(-\ln \frac{\delta}{2} \right)^{-1} \right\}.$$

Далі, підставляючи $p = 2$ у підінтегральні вирази в умовах теореми 3.1 та інтегруючи їх по $t \in [0, T]$, отримуємо твердження цього наслідку. \square

4. РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ МОДЕЛЮВАННЯ У ПРОСТОРІ $L_2([0, 1])$

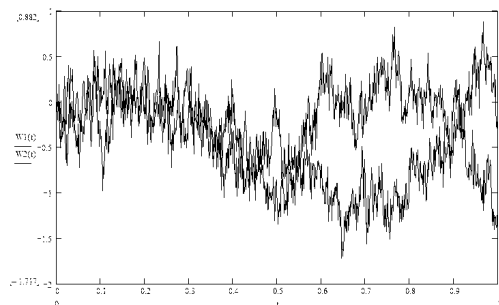
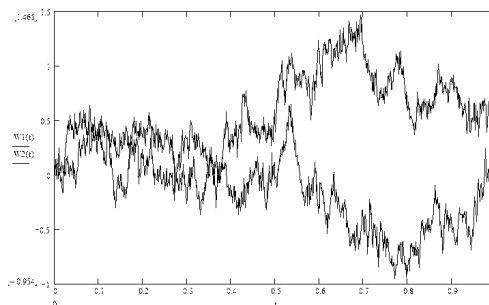
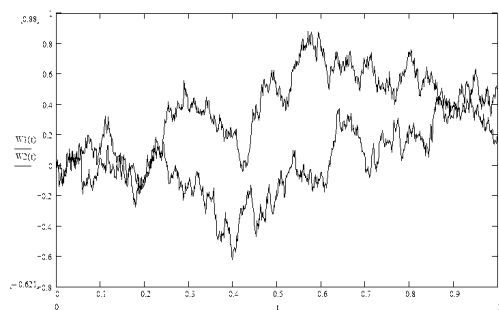
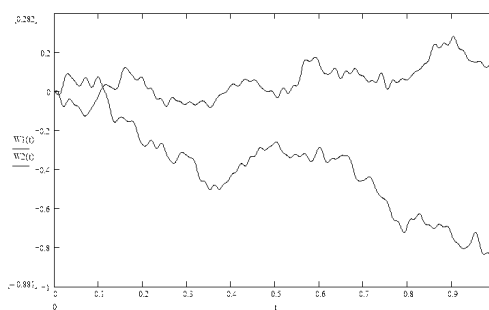
Якщо вибрати рівномірне розбиття відрізка $[0, \Lambda]$

$$\Delta\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{\Lambda}{M}, \quad \lambda_1 = \frac{\Lambda}{M}, \quad \lambda_i = \frac{i\Lambda}{M},$$

то з наслідку 3.1 у випадку $L_2([0, 1])$ легко отримати умови для обчислення параметрів Λ та M нашої моделі. Наприклад, у випадку $\alpha \in (0, 1]$ будемо мати

$$\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{\Lambda^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)M^{2-\alpha}} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2\Lambda^{2-\alpha}}{9M^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\alpha+1}} + \frac{(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) \Lambda^{\frac{\alpha}{2}}}{(\frac{3}{2}\alpha + 1) M^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) < \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \min \left\{ 1, \left(-\ln \frac{\delta}{2} \right)^{-1} \right\}.$$

На рис. 1–4 для заданої надійності $1 - \delta = 0.95$ та точності $\varepsilon = 0.05$ зображено траєкторії моделі процесу дробового броунівського руху при різних значеннях параметра α .

Рис. 1. $\alpha = 0.4$ Рис. 2. $\alpha = 0.6$ Рис. 3. $\alpha = 0.8$ Рис. 4. $\alpha = 1.2$

Як і слід було очікувати, чим більше значення α , тим гладша траєкторія моделі процесу дробового броунівського руху.

У роботі [26] в основі алгоритму моделювання дробового броунівського руху лежало зображення цього процесу у вигляді випадкового ряду [5]. Такий алгоритм вимагав великої підготовчої роботи, пов'язаної з обчисленням нулів функцій Бесселя із заданою точністю. Розроблений алгоритм моделювання на основі спектрального зображення дробового броунівського руху є значно легшим із погляду практичної реалізації.

5. Висновки

У статті запропоновано новий алгоритм моделювання процесів дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $L_p([0, T])$. Результати роботи проілюстровано на прикладі моделювання ДБР у просторі $L_2([0, 1])$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. F. Biagini, Y. Hu, B. Øksendal, T. Zhang, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, London, 2008.
2. J.-F. Coeurjolly, *Simulation and identification of the fractional Brownian motion: a bibliographical and comparative study*, Journal of Statistical Software, **5** (2000), no. 7, 1–53.
3. A. B. Dieker, M. Mandjes, *On spectral simulation of fractional Brownian motion*, Probab. Engrg. Inform. Sci., **17** (2003), 417–434.
4. A. B. Dieker, *Simulation of fractional Brownian motion*, Master's thesis, Vrije Universiteit Amsterdam (2002, updated in 2004).

5. K. O. Dzharidze, J. H. van Zanten, *A series expansion of fractional Brownian motion*, CWI, Probability, Networks and Algorithms, **R 0216** (2002).
6. S. M. Ermakov, G. A. Mikhailov, *Statistical simulation*, Nauka, Moscow, 1982. (Russian)
7. Yu. Kozachenko, O. Kamenshchikova, *Approximation of $S\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p(T)$* , Theory Probab. Math. Statist., **79** (2009), 83–88.
8. A. N. Kolmogorov, *Wiener spirals and some other interesting curves in a Hilbert space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **26** (1940), no. 2, 115–118. (Russian)
9. A. N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **30** (1941), 299–303. (Russian)
10. Yu. Kozachenko, A. Olenko, O. Polosmak, *Uniform convergence of wavelet expansions of Gaussian random processes*, Stoch. Anal. Appl., **29** (2011), no. 2, 169–184.
11. Yu. Kozachenko, A. Pashko, *Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. I*, Theory Probab. Math. Statist., **58** (1999), 51–66.
12. Yu. Kozachenko, A. Pashko, *Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. II*, Theory Probab. Math. Statist., **59** (1999), 77–92.
13. Yu. Kozachenko, A. Pashko, *On the simulation of random fields. I*, Theory Probab. Math. Statist., **61** (2000), 61–74.
14. Yu. Kozachenko, A. Pashko, *On the simulation of random fields. II*, Theory Probab. Math. Statist., **62** (2001), 51–63.
15. Yu. Kozachenko, A. Pashko, *Accuracy and reliability of simulation of random processes and fields in uniform metrics*, Kyiv, 2016. (Ukrainian)
16. Yu. Kozachenko, A. Pashko, I. Rozora, *Simulation of random processes and fields*, Zadruga, Kyiv, 2007. (Ukrainian)
17. Yu. Kozachenko, O. Pogorilyak, I. Rozora, A. M. Tegza, *Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability*, ISTE Press – Elsevier, 2016.
18. Yu. Kozachenko, I. Rozora, *Accuracy and reliability of models of stochastic processes of the space $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$* , Theory Probab. Math. Statist., **71** (2005), 105–117.
19. Yu. Kozachenko, I. Rozora, Ye. Turchyn, *On an expansion of random processes in series*, Random Oper. Stoch. Equ., **15** (2007), no. 1, 15–33.
20. Yu. Kozachenko, O. Vasilik, *On the distribution of suprema of $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ random processes*, Theory Stoch. Process., **4(20)** (1998), no. 1–2, 147–160.
21. Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk, *Simulation of weakly self-similar stationary increment $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -processes: a series expansion approach*, Methodol. Comput. Appl. Probab., **7** (2005), 379–400.
22. P. Kramer, O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, *Comparative Analysis of Multiscale Gaussian Random Field Simulation Algorithms*, J. Comput. Phys., September (2007).
23. B. B. Mandelbrot, J. W. van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, **10** (1968), no. 4, 422–437.
24. Yu. Mishura, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes*, Lecture Notes in Math., vol. 1929, Springer, Berlin, 2008.
25. F. J. Molz, H. H. Liu, *Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology: A review, presentation of fundamental properties, and extensions*, Water Resources Research, **33** (1997), no. 10, 2273–2286.
26. A. Pashko, *Statistical simulation of a generalized Wiener process*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics, **2** (2014), 180–183. (Ukrainian)
27. A. Pashko, *Estimation of accuracy of simulation of a generalized Wiener process*, Bulletin of Uzhgorod University, Series: Mathematics and Informatics, **25** (2014), no. 1, 109–116. (Ukrainian)
28. A. Pashko, Yu. Shusharin, *Solving linear stochastic equations with random coefficients using Monte Carlo methods*, Scientific Bulletin of Chernivtsi University, Series: Computer Systems and Components, **5** (2014), no. 2, 21–27. (Ukrainian)
29. J. Picard, *Representation formulae for the fractional Brownian motion*, Séminaire de Probabilités, Springer-Verlag, XLIII (2011), 3–70.
30. S. M. Prigarin, *Numerical modelling of random processes and fields*, Novosibirsk, 2005. (Russian)
31. S. M. Prigarin, P. V. Konstantinov, *Spectral numerical models of fractional Brownian motion*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **24** (2009), no. 3, 279–295.
32. I. S. Reed, P. C. Lee, T. K. Truong, *Spectral representation of fractional Brownian motion in n dimensions and its properties*, IEEE Trans. Inform. Theory, **41** (1995), no. 5, 1439–1451.
33. K. Sabelfeld, *Monte Carlo Methods in Boundary Problems*, Nauka, Novosibirsk, 1989. (Russian)

34. G. Shevchenko, *Fractional Brownian motion in a nutshell*, Int. J. Modern Phys. Conf. Ser., **36** (2015), id. 1560002.
35. T. Sottinen, *Fractional Brownian motion in finance and queueing*, Academic Dissertation, University of Helsinki, 2003.
36. О. Vasylyk, Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, *φ -sub-Gaussian random processes*, Kyivskiy Universytet, Kyiv, 2008. (Ukrainian)
37. A. M. Yaglom, *Correlation theory of stationary and related random processes with stationary n -th increments*, Mat. Sbornik, **37** (1955), no. 1, 141–196.

КАФЕДРА ТЕОРІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКИ ТА АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64/13, М. КИЇВ, УКРАЇНА, 01601; ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА, ВУЛ. 600-РІЧЧЯ, 21, М. ВІННИЦЯ, УКРАЇНА, 21021

Адреса електронної пошти: ykoz@ukr.net

ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64/13, М. КИЇВ, УКРАЇНА, 01601

Адреса електронної пошти: aap2011@ukr.net

КАФЕДРА ТЕОРІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКИ ТА АКТУАРНОЇ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, ВУЛ. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64/13, М. КИЇВ, УКРАЇНА, 01601

Адреса електронної пошти: ovasylyk@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 20.09.2017

SIMULATION OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION IN THE SPACE $L_p([0, T])$

YU. V. KOZACHENKO, A. O. PASHKO, O. I. VASYLYK

ABSTRACT. In this paper, we construct the model of a fractional Brownian motion with parameter $\alpha \in (0, 2)$, which approximates such process with given reliability $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, and accuracy $\varepsilon > 0$ in the space $L_p([0, T])$. Example of simulation in $L_2([0, 1])$ is given.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДРОБНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p([0, T])$

Ю. В. КОЗАЧЕНКО, А. А. ПАШКО, О. И. ВАСЫЛЫК

Аннотация. Мы строим модель дробного броуновского движения с параметром $\alpha \in (0, 2)$, которая приближает такой процесс с заданной надежностью $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, и точностью $\varepsilon > 0$ в пространстве $L_p([0, T])$. Приведен пример моделирования в пространстве $L_2([0, 1])$.