Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 58–71

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 58–71

ПРО ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ РЕГЕНЕРУЮЧИХ ПРОЦЕСІВ

О. К. ЗАКУСИЛО, І. К. МАЦАК

Анотація. Установлюється одна загальна гранична теорема для екстремумів регенеруючих процесів. Наводяться її застосування до процесів загибелі та розмноження і процесів, які задають довжину черги.

Ключові слова і фрази. Екстремуми, регенеруючі процеси, процеси загибелі та розмноження, системи масового обслуговування.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K25, 60F05.

1. Вступ

Розглянемо m-канальну систему масового обслуговування (СМО), на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування ξ має експоненційний розподіл
$$\mathsf{P}(\xi < x) = 1 - \exp(-\mu x).$$
Тобто в загальноприйнятих позначеннях — це СМО типу $(M/M/m)$ (див. [1–3]). Нехай у момент $S_0 = 0$ система порожня, а S_1 — це момент звільнення системи після 1-го періоду зайнятості. Відповідно S_k — це момент звільнення системи після k-го періоду зайнятості.

Позначимо через $Q(t)$ величину черги у СМО в момент часу t. І нехай
$$\bar{Q}_n = \bar{Q}(S_n) = \max_{1\le k\le n} Y_k,$$
де
$$\bar{Q}(t) = \sup_{0\le s<t} Q(s), \qquad Y_k = \sup_{S_{k-1}\le s<S_k} Q(s).$$

У ряді робіт [4–8] ставилась задача знаходження констант $a_n, b_n > 0$ таких, що
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(b_n(\bar{Q}_n - a_n) < x\big) = G(x), \tag{1}$$
де $G(x)$ — невироджена функція розподілу.

Так, наприклад, ґрунтуючись на класичній теорії екстремальних значень незалежних однаково розподілених випадкових величин (н. о. р. в. в.) (див. [9, 10]), для СМО (M/M/m) одержано таке асимптотичне співвідношення:
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(b_n\bar{Q}_n < x) = \exp\big(-x^{-1}\big), \quad x \ge 0, \tag{2}$$
якщо $\lambda = m\mu$, $b_n = m!(nm^m)^{-1}$ [4, 7].

Але, як виявилось, у багатьох важливих випадках (наприклад, при $\lambda < m\mu$) рівності типу (1), (2) не виконуються, тобто при лінійних нормуваннях для $\bar{Q}_n$ не існує невироджений граничний розподіл. Аналогічна ситуація зберігається і для процесів загибелі та розмноження [7].

Тому у деяких статтях (наприклад, [5]) робилися спроби знайти нижню та верхню границі для розподілу випадкових величин $b_n(\bar{Q}_n - a_n)$. Деякі інші апроксимації, які базуються на співвідношенні (2), запропоновані в [7].

Огляд досліджень за даною тематикою можна знайти в роботі [8].

У цій статті буде встановлено один загальний результат для екстремальних значень регенеруючих процесів. При цьому ми дещо змінюємо саму постановку задачі. Так, на відміну від $\bar{Q}_n$, де супремум процесу $Q(t)$ фактично береться по випадковому інтервалу $(0, S_n)$, ми розглядаємо максимуми на невипадкових інтервалах, а головне — використовуємо нелінійні нормування. Далі будуть наведені застосування до процесів загибелі та розмноження, а також до процесу $Q(t)$, який описує довжину черги у СМО.

2. Гранична теорема для регенеруючих процесів

Нагадаємо означення регенеруючого процесу, наприклад, [11, ч. II, гл. 2].

Означення 2.1. Під циклом тривалості T ми будемо розуміти впорядковану пару $\mathcal{L} = (T, \xi(t))$, в якій T — невід'ємна випадкова величина, а $\xi(t)$ — випадковий процес, визначений на $[0, T)$,

$$\mathsf{P}(T = 0) < 1, \quad \mathsf{P}(T < \infty) = 1.$$

Випадкова величина T і процес $\xi(t)$ у загальному випадку залежні.

Припустимо, що $\mathcal{L}_i = (T_i, \xi_i(t))$, $i \geq 1$, — нескінченна послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з $\mathcal{L}$. Визначимо випадковий процес $X(t)$, $t \geq 0$, формулою

$$X(t) = \xi_i(t - S_{i-1}) \quad \text{при} \quad t \in [S_{i-1}, S_i),$$

де $S_i = T_1 + \ldots + T_i$, $i \geq 1$, $S_0 = 0$.

Тоді будемо називати процес $X(t)$ регенеруючим, точки S_i — моментами регенерації, а проміжок $[S_{i-1}, S_i)$ — i-м періодом регенерації.

Покладемо

$$Z(t) = \sup_{0 \leq s < t} X(s), \qquad Z_k = \sup_{S_{k-1} \leq s < S_k} X(s). \tag{3}$$

Щоб уникнути питань, пов'язаних із вимірністю $Z(t)$ та Z_k, на випадкові процеси $\xi_i(t)$ будемо накладати умову сепарабельності.

Зрозуміло, що тоді Z_k — це н. о. р. в. в. Будемо вважати, що для всіх $u \in \mathbb{R}$

$$q(u) = \mathsf{P}(Z_k \geq u) > 0 \quad \text{і} \quad q(u) \downarrow 0 \text{ при } u \uparrow \infty$$

(фактично остання умова означає, що Z_k майже напевне (м. н.) скінченна випадкова величина).

Теорема 1. *Нехай $a_T = \mathsf{E}\, T_k < \infty$, $x > 0$, $t^* = x/q(u)$. Тоді*

$$\lim_{u \to \infty} \mathsf{P}(Z(t^*) \geq u) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{a_T}\right). \tag{4}$$

Доведення теореми 1. Почнемо з одного допоміжного твердження.

Нехай ζ та ϵ — випадкові величини такі, що

$$\mathsf{P}(\epsilon = 1) = q, \quad \mathsf{P}(\epsilon = 0) = 1 - q, \quad 0 < q < 1,$$
$$\mathsf{P}(\zeta \geq 0) = 1, \quad \mathsf{P}(\zeta = 0) < 1.$$

У загальному випадку випадкові величини ζ та ϵ залежні.

Розглянемо послідовність (ζ_n, ϵ_n) незалежних копій пари (ζ, ϵ). Далі визначимо випадкову величину ν:

$$\nu = \min(n \geq 1 : \epsilon_n = 1).$$

Випадкова величина ν має геометричний розподіл [12, с. 61]:

$$\mathsf{P}(\nu = n) = q(1 - q)^{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{5}$$

і

$$\mathsf{E}\, \nu = \frac{1}{q}, \quad \mathrm{D}\, \nu = \frac{1 - q}{q^2}.$$

Покладемо
$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i. \tag{6}$$

Лема 1. *Якщо* $\mathsf{E}\,\zeta = a < \infty$, $x > 0$ *фіксовані,* S_ν *задається рівністю (6) і*
$$q = \mathsf{P}(\epsilon = 1) \to 0,$$
то
$$\lim_{q\to 0} \mathsf{P}(qS_\nu < x) = 1 - \exp\Big(-\frac{x}{a}\Big). \tag{7}$$

Доведення леми 1. Добре відомо і просто перевіряється, що геометрично розподілена випадкова величина ν з параметром q задовольняє рівність
$$\lim_{q\to 0} \mathsf{P}(q\nu < x) = 1 - \exp(-x).$$
Тому достатньо довести, що $\forall\delta > 0$
$$\lim_{q\to 0} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{a\nu} S_\nu - 1\right| > \delta\right) = 0. \tag{8}$$
За посиленим законом великих чисел Колмогорова
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - a) = 0 \quad \text{м. н.},$$
а отже і
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (\zeta_i - a) = 0 \quad \text{м. н.}$$
Тому $\forall\delta > 0$, $\exists n_0 = n_0(\delta)$ таке, що
$$\mathsf{P}\left(\sup_{m\geq n_0} \frac{1}{m} \left|\sum_{i=1}^{m} (\zeta_i - a)\right| > \delta\right) \leq \delta. \tag{9}$$
Далі маємо
$$\mathsf{P}\left(\frac{1}{\nu}\left|\sum_{i=1}^{\nu} (\zeta_i - a)\right| > \delta\right) \leq \mathsf{P}\left(\frac{1}{\nu}\left|\sum_{i=1}^{\nu} (\zeta_i - a)\right| > \delta, \nu \geq n_0\right) + \mathsf{P}(\nu < n_0) \leq$$
$$\leq \mathsf{P}\left(\sup_{m\geq n_0} \frac{1}{m}\left|\sum_{i=1}^{m} (\zeta_i - a)\right| > \delta\right) + \mathsf{P}(\nu < n_0). \tag{10}$$
Останній доданок у (10) оцінюється просто. Згідно з рівністю (5) при $q \leq 1 - (1-\delta)^{1/(n_0-1)}$
$$\mathsf{P}(\nu \geq n_0) = (1-q)^{n_0-1} \geq 1 - \delta \quad \text{або} \quad \mathsf{P}(\nu < n_0) \leq \delta. \tag{11}$$
Збираючи разом оцінки (9)–(11), приходимо до рівності (8). □

Інші підходи до асимптотичних рівностей типу (7) та їх застосування в теорії надійності можна знайти в роботах [13–15].

Перейдемо безпосередньо до доведення рівності (4). Введемо позначення
$$\epsilon_k(u) = I(Z_k \geq u),$$
$$\nu(u) = \min(k \geq 1 : \epsilon_k(u) = 1),$$
де $I(A)$ — індикатор випадкової події A. І нехай
$$T_k^* = \begin{cases} \inf(t \geq 0 : \xi_k(t) \geq u), & \text{при } \epsilon_k(u) = 1, \\ T_k, & \text{у противному випадку.} \end{cases}$$

Із означення ясно, що випадкові події

$$(Z(t) \geq u) \quad \text{та} \quad \left(\sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^* \leq t\right)$$

еквівалентні. А отже

$$\mathsf{P}\big(Z(t^*) \geq u\big) = \mathsf{P}\left(\sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^* \leq t^*\right) = \mathsf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^* \leq x\right). \tag{12}$$

Так само очевидно, що $T_k^* \leq T_k$ і

$$\sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k - T_{\nu(u)} \leq \sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k^* \leq \sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k. \tag{13}$$

В умовах теореми 1 згідно з лемою 1 маємо

$$\lim_{u\to\infty} \mathsf{P}\left(q(u) \sum_{k=1}^{\nu(u)} T_k \leq x\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{a_T}\right).$$

Звідси та зі співвідношень (12), (13) випливає, що рівність (4) буде встановлена, якщо

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{u\to\infty} \mathsf{P}\big(q(u) T_{\nu(u)} > \delta\big) = 0. \tag{14}$$

Маємо

$$\mathsf{P}\big(q(u) T_{\nu(u)} > \delta\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\nu(u) = k)\, \mathsf{P}\left(T_k > \frac{\delta}{q(u)} \;\Big/\; \nu(u) = k\right). \tag{15}$$

Далі

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(T_k > \frac{\delta}{q(u)} \;\Big/\; \nu(u) = k\right) &= \mathsf{P}\left(T_k > \frac{\delta}{q(u)} \;\Big/\; \epsilon_1(u) = 0, \ldots, \epsilon_{k-1}(u) = 0, \epsilon_k(u) = 1\right) = \\ &= \mathsf{P}\left(T_k > \frac{\delta}{q(u)} \;\Big/\; \epsilon_k(u) = 1\right) = \frac{1}{q(u)} \mathsf{P}\left(T_k > \frac{\delta}{q(u)}, \epsilon_k(u) = 1\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{q(u)} \mathsf{P}\left(T_1 > \frac{\delta}{q(u)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} b(u). \end{aligned} \tag{16}$$

Оскільки $\mathsf{E}\, T_1 = a_T < \infty$, то

$$x\, \mathsf{P}(T_1 > x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

а отже $b(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Останнє асимптотичне співвідношення разом з оцінками (15), (16) дає рівність (14). □

Таким чином, на практиці згідно з теоремою 1 імовірність досягнення процесом $X(s)$ високого рівня u на інтервалі $[0, t)$ у багатьох випадках наближено можна знайти за формулою

$$\mathsf{P}(Z(t) \geq u) \approx 1 - \exp\left(-\frac{tq(u)}{a_T}\right)$$

(це буде так, коли, наприклад, u досить велике, а $tq(u)$ — помірне число).

Розглянемо один клас регенеруючих процесів $X(t)$, які часто виникають у теорії надійності та теорії масового обслуговування. Цей клас визначається так: k-й період регенерації $[S_{k-1}, S_k)$ складається із двох частин, довжини яких і траєкторії процесу на цих частинах незалежні. Довжина першої частини τ_k має експоненційний розподіл $\mathsf{P}(\tau_k < x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Довжина η_k другої частини має довільний розподіл і $\mathsf{E}\, \eta_k < \infty$.

Вважаємо, що $X(t) \in (0, 1, 2, \dots)$ м. н., причому на першій частині $X(t) = 0$ (перебуває у стані 0), а на другій — $X(t) \in (1, 2, \dots)$.

У термінології із [14] $X(t)$ — це регенеруючий процес спеціального виду. Для таких процесів справджується такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо $X(t)$ регенеруючий процес спеціального виду, який задовольняє умови теореми 1, то*

$$\lim_{u\to\infty} \mathsf{P}\big(Z(t^*) \ge u\big) = 1 - \exp(-\lambda p_0 x), \tag{17}$$

де

$$p_0 = \lim_{t\to\infty} p_0(t), \quad p_0(t) = \mathsf{P}(X(t) = 0). \tag{18}$$

Доведення. Доведення цього твердження випливає із теореми 1. Дійсно, процес $X(t)$ можна розглядати, як альтернуючий процес із двома станами: 0 та $(1, 2, \dots)$. Тоді існує границя у (18) і $p_0 = K_\Gamma$ — це стаціонарний коефіцієнт готовності [15, с. 122–124]. Причому справджується рівність

$$K_\Gamma = \frac{\mathsf{E}\,\tau_k}{\mathsf{E}\,\tau_k + \mathsf{E}\,\eta_k} = \frac{1/\lambda}{\mathsf{E}\,T_k},$$

тобто $\mathsf{E}\,T_k = \frac{1}{\lambda p_0}$. Залишається застосувати теорему 1. □

Зауваження 1. У загальному випадку, коли на першій частині τ_k $X(t) = m > 0$ (процес перебуває у стані m), а на другій частині η_k — $X(t) \ne m$, то наведені вище міркування дозволяють переписати формулу (17) так:

$$\lim_{u\to\infty} \mathsf{P}\big(Z(t^*) \ge u\big) = 1 - \exp(-\lambda p_m x).$$

Будемо позначати через $\gamma_k(t)$ — час перебування процесу $X(t)$ у стані k на $(0, t)$.

Наступна лема дозволяє дещо посилити наслідок 1.

Лема 2. *Нехай $X(t)$ — випадковий процес, який набуває скінченне або зліченне число значень, $X(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Припустимо, що існують моменти регенерації процесу $X(t)$: $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$, $T_i = S_i - S_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, н. о. р. в. в. Тоді*

(i) якщо

$$\mathsf{E}\,T_1 = a_T < \infty,$$

то для будь-якого k існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\gamma_k(t)}{t} = \frac{\mathsf{E}\,\gamma_k(T_1)}{a_T} = \frac{1}{a_T}\int_0^\infty \mathsf{P}\big(X(t) = k,\, T_1 > t\big)dt \quad \textit{м. н.}; \tag{19}$$

(ii) якщо для деякого k існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(X(t) = k) = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k > 0, \tag{20}$$

і

$$\mathsf{E}\,\gamma_k(T_1) = c_k < \infty, \tag{21}$$

то справедлива рівність (19) *і*

$$\mathsf{E}\,T_1 = a_T = \frac{c_k}{p_k}. \tag{22}$$

Доведення леми 2. Перша частина леми є добре відомим результатом у теорії відновлення [11, с. 184–185; 16, с. 429–430; 17]. Тому зразу перейдемо до п. (ii). Припустимо, що $\mathsf{E}\,T_1 = \infty$.

Тоді за посиленим законом великих чисел при $n \to \infty$ маємо

$$\frac{\gamma_k(S_n)}{S_n} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(\gamma_k(S_i) - \gamma_k(S_{i-1})\big)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T_i} \to 0 \quad \text{м. н.}, \tag{23}$$

бо чисельник прямує до $c_k < \infty$, а знаменник — до $+\infty$.

Далі, при $S_{n-1} < t \le S_n$

$$\frac{\gamma_k(t)}{t} \le \frac{\gamma_k(S_{n-1})}{S_{n-1}} + \frac{\gamma_k(S_n) - \gamma_k(S_{n-1})}{S_{n-1}} \quad \text{м. н.} \tag{24}$$

Другий доданок справа у (24) прямує до 0. Дійсно,

$$\frac{\gamma_k(S_n)}{n} \to c_k, \quad \frac{\gamma_k(S_{n-1})}{n} \to c_k, \quad \frac{S_n}{n} \to \infty \quad \text{м. н.} \tag{25}$$

Разом співвідношення (23)–(25) дають

$$\frac{\gamma_k(t)}{t} \to 0, \quad t \to \infty \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $0 \le \gamma_k(t)/t \le 1$, то і

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}\,\gamma_k(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{E}\, I(X(s)=k)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_k(s)ds = 0,$$

що суперечить умові (20).

Таким чином $\mathsf{E}\, T_1 = a_T < \infty$. Тому згідно з рівністю (19) маємо

$$\frac{c_k}{a_T} = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma_k(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}\,\gamma_k(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathsf{E}\, I(X(s)=k)ds =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p_k(s)ds = p_k,$$

що і дає рівність (22). □

Наслідок 2. *Нехай $X(t)$ регенеруючий процес, $X(t) \in (0,1,2,\dots)$ м. н., для деякого k виконуються умови (20), (21). І нехай $x > 0$, $t^* = x/q(u)$. Тоді*

$$\lim_{u\to\infty} \mathsf{P}\big(Z(t^*) \ge u\big) = 1 - \exp\left(-\frac{p_k}{c_k}x\right). \tag{26}$$

Зауваження 2. Нехай в умовах леми 2 параметр t пробігає деяку зліченну множину, $t \in \Im = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots\}$ ($t_i \to \infty$, при $n \to \infty$, t_i можуть бути випадковими, а $X(t)$ може залежати від послідовності (t_i)), моменти регенерації $S_i \in \Im$ м. н., $\widehat{\gamma}_k(t)$ — кількість попадань у стан k послідовності $X(t_i)$ при $t_i \in [0,t)$, $N(t) = \max(i \ge 0 : t_i < t)$. Аналіз доведення леми 2 показує, що коли виконуються співвідношення (20), (21), то справедлива рівність

$$\hat{a}_T = \mathsf{E}\, N(T_1) = \frac{\mathsf{E}\,\widehat{\gamma}_k(T_1)}{p_k} = \frac{c_k}{p_k},$$

тут $\hat{a}_T$ — середня кількість точок t_i, які попадають в один інтервал регенерації. При цьому в самому доведенні достатньо лише замінити інтеграли на відповідні суми.

Зауваження 3. Анонімний рецензент помітив, що «теорема 1 легко випливає з леми 1.1 статті [8]». Здається це дійсно так. Але на нашу думку метод доведення теореми 1 має самостійний інтерес. Він може бути використаний при оцінюванні швидкості збіжності у граничних теоремах такого типу. Так, наприклад, із доведення теореми 1 та відомих результатів для «геометричних» сум випливає таке твердження.

Твердження 1. *Нехай виконуються умови теореми 1, і для довільних k випадкові величини Z_k та T_k незалежні. І нехай $\mathsf{E}\, T_1^s < \infty$ для деякого s, $1 < s < 2$. Тоді*

$$\sup_{x>0} \left| \mathsf{P}\big(Z(t^*) \ge u\big) - 1 + \exp\left(-\frac{x}{a_T}\right) \right| \le Cq(u)^{s-1} \frac{\mathsf{E}\, T_1^s}{a_T^s}, \tag{27}$$

де C — абсолютна константа.

Оскільки в усіх відомих нам реальних застосуваннях випадкові величини Z_k та T_k залежні, то доведення цього твердження опускається.

3. Процеси загибелі та розмноження

Припустимо, що $X(t)$ — марковський процес зі станами $0, 1, 2, \dots$, його ймовірності переходу $p_{i,j}(t)$ стаціонарні і задовольняють умови при $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
&1.\quad p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), \quad i \geq 0,\\
&2.\quad p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), \quad i \geq 1,\\
&3.\quad p_{i,i}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), \quad i \geq 0,\\
&4.\quad \mu_0 = 0,\ \lambda_0 > 0,\ \mu_i > 0,\ \lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{28}$$

Тоді $X(t)$ називають процесом загибелі та розмноження. Такі процеси широко застосовуються в біології, теорії масового обслуговування, теорії надійності тощо [1, § 1.4; 2, § 7.4; 15, § 6.3].

Покладемо

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad k \geq 1.$$

Далі в цьому розділі вважаємо, що процес загибелі та розмноження задовольняє умови (28), а також

$$\sum_{k \geq 1} \theta_k < \infty, \tag{29}$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} = \infty. \tag{30}$$

Відомо [2, 18], що тоді існують стаціонарні ймовірності станів

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\big(X(t) = k\big) = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k, \tag{31}$$

причому

$$p_k = \theta_k p_0, \quad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k\right)^{-1}. \tag{32}$$

Окрім того, вкладений ланцюг Маркова буде рекурентним [2, с. 102–103].

Далі будемо використовувати такі позначення:

$$\alpha_0(m) = 1, \quad \alpha_k(m) = \prod_{i=1+m}^{k+m} \frac{\mu_i}{\lambda_i}, \quad k \geq 1,$$

запис ($u \in \mathbb{N}$, $u \to \infty$) означає, що u пробігає цілі додатні числа і прямує до ∞, $Z(t)$ як і вище задається рівністю (3).

Теорема 2. *Нехай $X(t)$ процес загибелі та розмноження, який задовольняє умови (28)–(30). Якщо*

$$X(0) = m \quad \text{м. н.}, \quad x > 0, \quad t^* = x \sum_{k=0}^{u-m-1} \alpha_k(m) \quad \text{при} \quad u \geq m+1,$$

то

$$\lim_{u\in\mathbb{N},\, u\to\infty} \mathsf{P}\big(Z(t^*) \geq u\big) = 1 - \exp(-\lambda_m p_m x), \tag{33}$$

де p_m задається рівностями (32).

Зауваження 4. У важливому випадку $m = 0$ (процес стартує зі стану 0) формула (33) запишеться так:

$$\lim_{u\in\mathbb{N},\, u\to\infty} \mathsf{P}\bigl(Z(t^*) \geq u\bigr) = 1 - \exp(-\lambda_0 p_0 x),$$

де

$$t^* = x\sum_{k=0}^{u-1} \alpha_k, \quad \alpha_0 = \alpha_0(0) = 1, \quad \alpha_k = \alpha_k(0) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_i}.$$

Доведення теореми 2. Із умов теореми випливає, що $X(t)$ буде регенеруючим процесом спеціального виду з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$, тут S_k — це перший момент попадання у стан m після k-го виходу з нього. Причому

$$\mathsf{P}(\tau_k < x) = 1 - \exp\bigl(-(\lambda_m + \mu_m)x\bigr), \quad x \geq 0,$$
$$\mathsf{E}\, T_k = \frac{1}{(\lambda_m + \mu_m)p_m},$$

остання формула випливає із рівності (22) леми 2.

Далі буде показано, що при $u \geq m + 1$

$$q(u) = \mathsf{P}(Z_1 \geq u) = \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \mu_m}\left(\sum_{k=0}^{u-m-1} \alpha_k(m)\right)^{-1}. \tag{34}$$

Вибираючи

$$t^* = x\left(\frac{\lambda_m + \mu_m}{\lambda_m}\right)\sum_{k=0}^{u-m-1} \alpha_k(m), \tag{35}$$

із наслідку 1 (див. зауваження 1) отримаємо

$$\lim_{u\in\mathbb{N},\, u\to\infty} \mathsf{P}\bigl(Z(t^*) \geq u\bigr) = 1 - \exp\bigl(-(\lambda_m + \mu_m)p_m x\bigr). \tag{36}$$

Заміна у (35), (36) $y = x\left(\frac{\lambda_m+\mu_m}{\lambda_m}\right)$ приводить до рівності (33).

Залишається установити рівність (34). Тут нам знадобиться лема 3.

Лема 3. *Розглянемо ланцюг Маркова зі станами* $0, 1, 2, \ldots, d$ *та ймовірностями переходів* $\forall i = 1, 2, \ldots, d-1$*:*

$$p_{i,j} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad \text{при } j = i + 1,$$
$$p_{i,j} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad \text{при } j = i - 1,$$

$\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, d-1$, $p_{0,0} = p_{d,d} = 1$, *тобто стани* 0 *та* d — *поглинаючі. І нехай ланцюг Маркова стартує зі стану* 1. *Тоді*

$$\mathsf{P}(\textit{поглинання у стані } d) = 1 - \mathsf{P}(\textit{поглинання у стані } 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k}. \tag{37}$$

Лема 3 — це окремий випадок відомого результату для ланцюгів Маркова [2, с. 105, 226–227].

Фактично рівність (34) просто випливає із леми 3. Дійсно, припустимо спочатку, що $m = 0$ і розглянемо перший цикл регенерації $[0, S_1)$ процесу загибелі та розмноження $X(t)$, $Z_1 = \sup_{0\leq s<S_1} X(s)$. На інтервалі $[0, S_1)$ процес $X(t)$ у момент τ_1 переходить зі стану 0 у стан 1. Тоді подія $(Z_1 \geq u)$ еквівалентна події, що вкладений ланцюг Маркова процесу $X(t)$ на першому циклі регенерації досягне рівня u.

Водночас остання подія еквівалентна події про те, що ланцюг Маркова із леми 3 поглинається станом $d = u$. Звідси та з леми 3 маємо

$$q(u) = \mathsf{P}(Z_1 \geq u) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{u-1} \alpha_k},$$

тобто при $m = 0$ рівність (34) правильна.

Нехай $m \geq 1$. Добре відомо, що вкладений ланцюг Маркова процесу $X(t)$ має такі самі перехідні ймовірності, як і ланцюг Маркова із леми 3 (але без поглинання). Тому отримаємо

$$\mathsf{P}(Z_1 = m) = \frac{\mu_m}{\lambda_m + \mu_m}, \tag{38}$$

а при $u \geq m + 1$

$$\mathsf{P}(Z_1 \geq u) = \frac{\lambda_m}{(\lambda_m + \mu_m) \sum_{k=0}^{u-m-1} \alpha_k(m)}. \tag{39}$$

Дійсно, рівність (38) відповідає випадку, коли процес $X(t)$ у момент τ_1 переходить зі стану m у стан $m - 1$ з імовірністю $\mu_m/(\lambda_m + \mu_m)$. А рівність (39) означає, що в момент τ_1 робиться перехід $m \to m + 1$ з імовірністю $\lambda_m/(\lambda_m + \mu_m)$. А далі ми приходимо до вже розглянутого випадку $m = 0$, який ґрунтується на лемі 3. Таким чином, рівність (34), а з нею і теорема 2 доведені. □

4. Довжина черги в системах обслуговування

Наведемо кілька прикладів застосувань отриманих вище результатів до екстремальних значень довжини черги у СМО.

Приклад 1. СМО (M/M/m). Дана класична СМО описана на початку роботи (див. також [1, 2]). Під довжиною черги тут і далі будемо розуміти загальне число заявок, які перебувають на обслуговуванні або чекають його. І позначаємо через $Q(t)$ довжину черги в момент часу t, а $\bar{Q}(t) = \sup_{0 \leq s < t} Q(s)$.

Відомо [2, с. 219–220], що $Q(t)$ буде процесом загибелі та розмноження з параметрами:

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{при } 1 \leq k \leq m, \\ m\mu, & \text{при } \quad k > m. \end{cases}$$

Тоді неважко знайти

$$\alpha_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{\lambda_i} = \begin{cases} k!\rho^{-k}, & \text{при } 1 \leq k \leq m, \\ m! m^{k-m} \rho^{-k}, & \text{при } k > m, \end{cases}$$

де $\rho = \lambda/\mu$.

Далі для досить великих u обчислюємо

$$q(u) = \left(\sum_{k=0}^{u-1} \alpha_k \right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{\rho^k} + \frac{m!\big((m/\rho)^u - (m/\rho)^{m+1}\big)}{m^m (m/\rho - 1)} \right)^{-1}. \tag{40}$$

На параметри λ та μ накладемо умову

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < m. \tag{41}$$

Відомо [1, 2], що тоді виконуються умови (29), (30) та існують стаціонарні ймовірності

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \quad \text{при } 1 \leq k \leq m,$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{m!m^{k-m}} p_0, \quad \text{при } k > m,$$
$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{m+1}}{m!(m-\rho)} \right)^{-1}. \tag{42}$$

Звідси, із теореми 2 та із зауваження 4 маємо таке.

Твердження 2. *Нехай для СМО* $(M/M/m)$ *виконується умова* (41) *і*

$$Q(0) = 0 \quad \textit{м. н.}, \quad x > 0, \quad t^* = x \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{\rho^k} + \frac{m!\big((m/\rho)^u - (m/\rho)^{m+1}\big)}{m^m (m/\rho - 1)} \right).$$

Тоді

$$\lim_{u\in\mathbb{N},\, u\to\infty} \mathsf{P}(\bar{Q}(t^*) \ge u) = 1 - \exp(-\lambda p_0 x), \tag{43}$$

де p_0 *задається рівністю (42).*

Зауваження 5. (i) Із доведення теореми 1 зрозуміло, що в означенні t^* величину $q(u)$ можна замінити на $q_1(u)$, якщо $q(u) \sim q_1(u)$, тобто, коли вони еквівалентні. Тому у твердженні 2 можлива заміна $q(u)$ на більш просту і еквівалентну $q_1(u) = \frac{m!(m/\rho)^u}{m^m(m/\rho-1)}$, але при цьому скоріш за все погіршиться швидкість збіжності.

(ii) Якщо у прикладі 1 $m = \infty$ (необмежене число каналів обслуговування), то

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,2,\ldots; \qquad \mu_k = k\mu, \quad \alpha_k = \frac{k!}{\rho^k}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad \mu_0 = 0.$$

Тоді для будь-яких $\lambda > 0$, $\mu > 0$ правильна рівність (43) з

$$t^* = x \sum_{k=0}^{u-1} \frac{k!}{\rho^k}, \quad p_0 = \exp(-\rho).$$

Приклад 2. СМО (M/G/1). Це одноканальна система масового обслуговування, на яку поступає пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ, а час обслуговування ξ має довільний розподіл, $\mathsf{P}(\xi < x) = G(x)$. Припустимо, що $\mathsf{E}\,\xi = b < \infty$ і

$$\rho = \lambda b < 1. \tag{44}$$

За умови (44) існують стаціонарні ймовірності станів

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(Q(t) = k) = p_k, \tag{45}$$

а $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ задається відомою формулою Полячека–Хінчина. Звідси (див. [2, с. 471–472])

$$p_0 = 1 - \rho. \tag{46}$$

Якщо в момент $S_0 = 0$ система порожня, а $S_1, S_2, \ldots$ — це послідовні моменти звільнення системи після відповідного періоду зайнятості, то $Q(t)$ буде регенеруючим процесом спеціального виду з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$ Причому для k-го періоду регенерації (S_{k-1}, S_k) перша частина τ_k (де система пуста) має розподіл $\mathsf{P}(\tau_k < x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Друга частина η_k (період зайнятості) має обмежене середнє: $\mathsf{E}\,\eta_k = b/(1-\lambda b) < \infty$ [2, с. 497].

Таким чином, можна застосувати теорему 1 та наслідок 1, але залишається знайти величину $q(u)$.

Покладемо

$$d_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} \exp(-\lambda x)\, dG(x) \quad -$$

імовірність того, що за час обслуговування однієї заявки у СМО надійде k нових заявок,

$$D_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} d_i \quad -$$

імовірність того, що за час обслуговування однієї заявки у СМО надійде більше ніж k заявок.

Далі зафіксуємо деяке велике ціле додатне число u і позначимо через q_k, $1 \le k < u$, імовірність того, що на періоді зайнятості процес $Q(t)$ потрапить у стан u при умові, що в деякий момент часу на другій частині η у СМО було k заявок і одна з них почала обслуговуватись (при $k = 1$ цей момент збігається з початком періоду зайнятості). Фактично q_k збігається з імовірністю того, що вкладений ланцюг Маркова, стартуючи зі стану k, досягне стану u раніше ніж стану 0 (вкладений ланцюг Маркова тут — це значення процесу $Q(t)$ в моменти закінчення обслуговування).

Користуючись формулою повної ймовірності для вектора $(q_k), k = 1, 2, \dots, u-1$, можна скласти систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} q_{u-1} &= D_0 + d_0 q_{u-2}, \\ q_{u-2} &= D_1 + d_0 q_{u-3} + d_1 q_{u-2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1 &= D_{u-2} + \sum_{i=1}^{u-2} d_i q_i. \end{aligned} \tag{47}$$

Неважко зрозуміти, що на першому циклі регенерації в момент τ_1 процес перейде у стан 1, а отже події:

$$\{\text{вкладений ланцюг Маркова зі стану 1 досягне стану } u \text{ раніше за стан } 0\}$$

та

$$\{Z_1 \ge u\} = \left\{ \sup_{0 \le s < S_1} Q(s) \ge u \right\}$$

еквівалентні, тобто $q(u) = q_1$.

Звідси, із наслідку 1 та з рівностей (46), (47) випливає таке твердження.

Твердження 3. *Нехай для СМО $(M/G/1)$ виконується умова (44) і*

$$Q(0) = 0 \quad \textit{м. н.}, \quad x > 0, \quad t^* = \frac{x}{q(u)}.$$

Тоді

$$\lim_{u \in \mathbb{N},\, u \to \infty} \mathsf{P}\big(\bar{Q}(t^*) \ge u\big) = 1 - \exp\big(-\lambda(1-\rho)x\big), \tag{48}$$

де $q(u) = q_1$, а (q_k) — розв'язок системи рівнянь (47).

Зауваження 6. У зв'язку з деякими задачами теорії надійності система лінійних рівнянь, близька до (47), була виписана у [14, с. 99]. Там же дається точний аналітичний вираз для величини q_1 через твірні функції вектора D_k. На жаль, ним важко скористатись на практиці.

На нашу думку, числовий розв'язок системи рівнянь (47) можна одержати методом послідовних підстановок навіть при досить великих u.

Приклад 3. СМО (G/M/1). Це одноканальна система масового обслуговування, на яку поступає рекурентний потік заявок, $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$ — моменти надходження заявок. Вважаємо, що $(\tau_k = t_k - t_{k-1})$ — послідовність н. о. р. в. в. із функцією розподілу $G(x)$, а час обслуговування ξ_k має експоненційний розподіл із параметром μ.

Введемо моменти регенерації процесу $Q(t)$: $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$, тут S_k — це момент надходження нової заявки після k-го періоду зайнятості (для спрощення записів вважаємо, що в момент $t_0 = 0$ надійшла заявка). Нехай T_k — тривалість k-го циклу регенерації.

Вкладений ланцюг Маркова (Q_n) визначається моментами (t_n), а його стани — це довжина черги перед надходженням заявки, тобто

$$Q_n = Q(t_n - 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Позначимо через

$$d_k^* = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^k}{k!} \exp(-\mu x) dG(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, -$$

імовірність того, що на інтервалі довжини τ відбудеться k обслуговувань,

$$f(v) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^* v^k.$$

І припустимо, що

$$\mathsf{E}\,\tau_k = a_\tau < \infty \quad \text{і} \quad \rho = \frac{1}{a_\tau \mu} < 1. \tag{49}$$

Відомо [2, с. 477–478; 19], що тоді існують стаціонарні ймовірності станів для (Q_n):

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Q_n = k) = p_k = (1 - v_0) v_0^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{50}$$

де v_0 — єдиний розв'язок рівняння

$$f(v_0) = v_0 \quad (0 < v_0 < 1). \tag{51}$$

Окрім того, якщо $G(x)$ має неґратчастий розподіл, то за умови (49) існують стаціонарні ймовірності станів і для процесу $Q(t)$ [19]:

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(Q(t) = k) = p_k^* = \frac{p_{k-1}}{a_\tau \mu}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{52}$$

Як і в попередніх прикладах, щоб скористатися основною теоремою 1 чи її наслідками нам необхідно знайти величину $q(u)$ — імовірність досягнення процесом $Q(t)$ стану u на одному циклі регенерації.

Для визначеності виберемо для аналізу 1-й цикл регенерації $[0, S_1)$. І позначимо через q_k, $k = 1, 2, \dots, u-1$, імовірність того, що на інтервалі $[0, S_1)$ процес $Q(t)$ попаде в стан u при умові, що в деякий момент надходження заявки $t_i \in [0, S_1)$ він буде в стані k.

Розглянемо значення процесу $Q(t)$ в моменти надходження заявок t_i і скористаємось формулою повної ймовірності. Тоді так само, як і у прикладі 2, для вектора (q_k) можна скласти систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} q_1 &= d_0^* q_2, \\ q_2 &= d_0^* q_3 + d_1^* q_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ q_k &= d_0^* q_{k+1} + d_1^* q_k + \dots + d_{k-1}^* q_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ q_{u-1} &= d_0^* + d_1^* q_{u-1} + \dots + d_{u-2}^* q_2. \end{aligned} \tag{53}$$

Ця система лінійних рівнянь може бути розв'язана методом послідовних підстановок аналогічно системі (47). Тоді $q(u) = q_1$.

Твердження 4. *Нехай для СМО $(G/M/1)$ виконуються умови* (49) *і*

$$Q(0) = 1 \quad \textit{м. н.}, \quad x > 0, \quad t^* = \frac{x}{q(u)}.$$

Тоді

$$\lim_{u\in\mathbb{N},\,u\to\infty} \mathsf{P}\big(\bar{Q}(t^*) \geq u\big) = 1 - \exp\bigg(-\frac{(1-v_0)x}{a_\tau}\bigg), \tag{54}$$

де a_τ *та* v_0 *визначені в (49), (51) відповідно, а* $q(u) = q_1$, (q_k) *— розв'язок системи рівнянь* (53).

Твердження 4 випливає із теореми 1 та наступного допоміжного результату.

Лема 4. *Якщо для СМО (G/M/1) виконуються умови (49), то середня тривалість циклу регенерації задається формулою*

$$\mathsf{E}\,T_k = \frac{a_\tau}{1-v_0}. \tag{55}$$

Доведення леми 4. Розглянемо 1-й цикл регенерації $[0, S_1)$ процесу $Q(t)$, $T_1 = S_1$ — його тривалість, $\kappa = \min(n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \tau_i \geq \sum_{i=1}^{n} \xi_i)$. Безпосередньо з означення маємо

$$T_1 = \sum_{i=1}^{\kappa} \tau_i.$$

Фактично κ — це 1-й момент перескоку через 0 послідовності $\sum_{i=1}^{n}(\tau_i - \xi_i)$, а отже κ — це марковський момент відносно σ-алгебри $\mathfrak{G} = \sigma(\tau_i, \xi_i, i = 1, 2, \ldots)$. Тому за тотожністю Вальда [11, с. 229]

$$\mathsf{E}\,T_1 = \mathsf{E}\,\tau_1\,\mathsf{E}\,\kappa. \tag{56}$$

κ можна визначити також як кількість кроків, які зробить вкладений ланцюг Маркова (Q_n) між 1-м та 2-м попаданнями у стан 0. Тому, скориставшись лемою 2 (див. зауваження 2) та рівністю (50), отримаємо

$$\mathsf{E}\,\kappa = \frac{c_0}{p_0} = \frac{c_0}{1-v_0}. \tag{57}$$

Але оскільки кількість попадань у стан 0 ланцюга (Q_n) на інтервалі $[0, S_1)$ дорівнює 1, то

$$c_0 = \mathsf{E}\,\gamma_0(T_1) = 1. \tag{58}$$

Збираючи разом рівності (56)–(58), одержуємо (55). □

Нам невідомо, чи буде правильною рівномірна оцінка (27) у випадку теореми 2 чи тверджень 2–4.

Автори висловлюють подяку анонімним рецензентам за важливі зауваження.

Список літератури

1. B. V. Gnedenko, I. N. Kovalenko, *Introduction to queueing theory*, 2nd ed., Mathematical Modeling, vol. 5, Birkhäuser, Boston, 1989.
2. S. Karlin, *A first course in stochastic processes*, Academic Press, New York-London, 1966.
3. V. V. Anisimov, O. K. Zakusylo, V. S. Donchenko, *Elements of the queueing theory and asymptotic analysis of systems*, Vyshcha shkola, Kiev, 1987. (Russian)
4. J. W. Cohen, *Extreme values distribution for the M/G/1 and G/M/1 queueing systems*, Ann. Inst. H. Poincare., Sect.B, **4** (1968), 83–98.
5. C. W. Anderson, *Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes*, J. Appl. Prob., **7** (1970), 99–113.
6. D. L. Iglehart, *Extreme values in the GI/G/1 queue*, Ann. Math. Statist., **43** (1972), 627–635.
7. R. F. Serfozo, *Extreme values of birdh and death processes and queues*, Stochastic Process. Appl., **27** (1988), 291–306.
8. S. Asmussen, *Extreme values theory for queues via cycle maxima*, Extremes, **1** (1998), 137–168.
9. J. Galambos, *The asymptotic theory of extreme order statistics*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1978.
10. M. R. Leadbetter, G. Lindgren, H. Rootzén, *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

11. D. Cox, W. Smith, *Renewal theory*, Sovetskoye Radio, Moscow, 1967. (Russian)
12. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, M. I. Yadrenko, *Theory of probability and mathematical statistics*, Vyshcha shkola, Kiev, 1988. (Russian)
13. I. K. Matsak, *A lemma for random sums and its applications*, Ukrain. Mat. Zh. (2017), in press. (Ukrainian)
14. E. Yu. Barzilovich, Yu. K. Belyaev, V. A. Kashtanov, I. N. Kovalenko, A. D. Solovyev, I. A. Ushakov, *Problems of the mathematical theory of reliability* (B. V. Gnedenko, ed.), Radio i Svyaz, Moscow, 1983. (Russian)
15. B. V. Gnedenko, Yu. K. Belyayev, A. D. Solovyev, *Mathematical methods of reliability theory*, Academic Press, New York-London, 1969.
16. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1971.
17. B. V. Dovgaĭ, I. K. Matsak, *On a redundant system with renewals*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 63–76.
18. S. Karlin, J. McGregor, *The classification of birth and death processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **86** (1957), 366–400.
19. L. Takács, *Some probability questions in the theory of telephone traffic*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., **8** (1958), 151–210. (Hungarian)

Кафедра дослідження операцій, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: zakusylo@univ.net.ua

Кафедра дослідження операцій, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: ivanmatsak@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 4.08.2017

ON EXTREME VALUES OF SOME REGENERATIVE PROCESSES

O. K. ZAKUSYLO, I. K. MATSAK

Abstract. A general limit theorem for extremes of regenerative processes is established. Applications to birth and death processes and processes specifying queue length are given.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ РЕГЕНЕРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

О. К. ЗАКУСИЛО, И. К. МАЦАК

Аннотация. Устанавливается одна общая предельная теорема для экстремумов регенерирующих процессов. Приводятся ее применения к процессам гибели и размножения и к процесам, задающим длину очереди.