Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(98)/2018, с. 205–214

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(98)/2018, pp. 205–214

УДК 519.21

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО ЧЛЕНА В АСИМПТОТИЧНОМУ РОЗКЛАДІ ФУНКЦІОНАЛА ВІД НАПІВМАРКОВСЬКОЇ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

В. С. КОРОЛЮК, І. В. САМОЙЛЕНКО

Анотація. У роботі [5] знайдено регулярну та сингулярну складові розкладу функціонала від напівмарковської випадкової еволюції, показано регулярність початкових умов. У цій статті проведено оцінку залишкового члена для отриманого в [5] асимптотичного розкладу.

Ключові слова і фрази. Асимптотичний розклад, напівмарковський процес, випадкова еволюція, залишковий член.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J25; Secondary 35C20.

1. Вступ

У роботі [5] деякі з отриманих у [13] результатів узагальнено на випадок напівмарковських процесів. Робота стосувалася схеми дифузійної апроксимації та була логічним продовженням статей [1, 7, 8], в яких аналогічне дослідження проведено у схемі усереднення. Подібну задачу досліджено в [6], де автор уводить додаткові параметри з метою перетворення напівмарковської випадкової еволюції на марковську. Це суттєво спрощує технічний бік дослідження, але вимагає введення додаткової змінної як аргументу функціонала, і питання зворотного переходу залишається відкритим. Крім того, автор не формулює результат щодо вигляду регулярної частини розкладу, а лише пропонує алгоритм для її знаходження, а також не проводить регуляризацію граничних умов, яка дозволяє, користуючись граничними умовами для сингулярної частини розкладу, запропонувати алгоритм для знаходження початкових умов при $t = 0$ в явному вигляді.

Також у [5] анонсовано дослідження питаня щодо збіжності асимптотичного ряду, яке вирішується за допомогою оцінки залишкового члена. Поточна публікація стосується саме цієї проблеми і таким чином повністю закриває питання асимптотичного розкладу напівмарковської випадкової еволюції у схемі дифузійної апроксимації.

Зауважимо, що подібна проблема досліджувалась раніше А. В. Свіщуком у роботах [10, 12] при доведенні граничних теорем для напівмарковських випадкових еволюцій. Але отримані там оцінки стосуються лише швидкості збіжності, або, що те саме, отримано оцінки для $\|\Phi_t^\varepsilon(u,x) - U_0(t)\|$, якщо використовувати позначення нашої статті. Натомість, у цій роботі автори намагаються розробити універсальний алгоритм, який би дозволив робити оцінки для асимптотичного ряду з довільною точністю по ε.

Нагадаємо постановку задачі та використані раніше позначення.

Для означення напівмарковської випадкової еволюції у схемі серій (більш детально щодо її властивостей див. [3]) розглянемо еволюційне рівняння в евклідовому

Публікація та її перша частина [5] містять результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом 0117U007015 Державного фонду фундаментальних досліджень.

просторі $\mathbb{R}^d, d \geq 1$,

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} v\big(u^\varepsilon(t); \text{æ}\big(t/\varepsilon^2\big)\big). \tag{1}$$

Нехай функція $\varphi(u)$ належить банаховому простору $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ дійснозначних тест-функцій, що обмежені разом з усіма своїми похідними. Норма визначається таким чином:

$$\|\varphi\| = \sup_{u \in \mathbb{R}^d} |\varphi(u)| < C_\varphi$$

для деякого $C_\varphi > 0$.

Напівмарковська випадкова еволюція в $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ визначається співвідношенням

$$\Phi_t^\varepsilon := \varphi(u^\varepsilon(t)), \quad \varphi \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d).$$

Процес, що перемикає швидкості $\text{æ}(t), t \geq 0$, є напівмарковським [2] у просторі станів $(E, \mathcal{E})$, де E — повний сепарабельний метричний простір, $\mathcal{E}$ — відповідна σ-алгебра його підмножин, і задається напівмарковським ядром [3]

$$Q(x, B, t) = P(x, B) F_x(t), \quad x \in E,\ B \in \mathcal{E},\ t \geq 0,$$

що визначає ймовірності переходу процесу марковського відновлення $\text{æ}_n, \tau_n, n \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q(x_n, B, t) &= \mathsf{P}\{\text{æ}_{n+1} \in B, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid \text{æ}_n = x\} = \\ &= \mathsf{P}\{\text{æ}_{n+1} \in B \mid \text{æ}_n = x\}\, \mathsf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid \text{æ}_n = x\}. \end{aligned}$$

Стохастичне ядро

$$P(x, B) = \mathsf{P}\{\text{æ}_{n+1} \in B \mid \text{æ}_n = x\}$$

задає перехідні ймовірності вкладеного ланцюга Маркова $\text{æ}_n = \text{æ}(\tau_n), n \geq 0$; функції розподілу

$$F_x(t) = \mathsf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid \text{æ}_n = x\} =: \mathsf{P}\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t\}, \quad x \in E,$$

задають розподіли періодів перебування θ_x у станах $x \in E$.

Генератор асоційованого марковського процесу, що діє на банаховому просторі $\mathfrak{B}(E)$ дійснозначних тест-функцій $\varphi(x)$, що обмежені разом з усіма своїми похідними, оснащеному sup-нормою, має вигляд

$$Q = q(x)(P - I),$$

де оператор перехідних ймовірностей

$$P\varphi(x) = \int_E P(x, dy)\varphi(y), \quad x \in E,$$

$q(x) = 1/m_1(x)$, $m_k(x) = \int_0^\infty s^k F_x(ds)$.

Нехай перемикаючий напівмарковський процес $\text{æ}(t)$, $t \geq 0$, є рівномірно ергодичним (детально див. [3]). Позначимо $\pi(B), B \in \mathcal{E}$, через стаціонарний розподіл перемикаючого напівмарковського процесу $\text{æ}(t)$, $t \geq 0$, що задовольняє співвідношення

$$\pi(dx) = \rho(dx) m_1(x)/\widehat{m},$$
$$\widehat{m} = \int_E \rho(dx) m_1(x),$$

$\rho(B), B \in \mathcal{E}$ є стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова $\text{æ}_n, n \geq 0$, що визначається формулою

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx) P(x, B), \quad \rho(E) = 1.$$

У такому випадку [3, 4] банахів простір $\mathfrak{B}(E)$ розкладається у пряму суму підпросторів:

$N_Q := \{\varphi(x) : Q\varphi(x) = 0\}$ — нуль-підпростір оператора Q,

$R_Q := \{\psi(x) : Q\varphi(x) = \psi(x)\}$ — підпростір значень оператора Q.

Позначимо через Π проектор на нуль-підпростір оператора Q: $\Pi\varphi(x) := \widehat{\varphi}\mathbf{1}(x)$, де $\mathbf{1}(x) = 1$ для всіх $x \in E$, $\widehat{\varphi} := \int_E \varphi(x)\pi(dx)$.

У монографії [3, п. 3.4.3] досліджено умови, за яких справджується слабка збіжність

$$u^\varepsilon(t) \Rightarrow \hat{u}(t), \quad \varepsilon \to 0,$$

та отримано рівняння, що визначає граничний процес. Питання про швидкість збіжності можна розглядати із двох точок зору:

(i) асимптотичний аналіз флуктуацій

$$\zeta^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t) - \hat{u}(t), \quad \varepsilon \to 0;$$

(ii) асимптотичний аналіз функціонала, що визначає математичне сподівання від напівмарковської випадкової еволюції

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = \mathsf{E}[\varphi(u^\varepsilon(t)) \mid u^\varepsilon(0) = u, æ(0) = x].$$

Метою роботи [5] була реалізація другого підходу, а саме, побудова асимптотичного розкладу функціонала від напівмарковської випадкової еволюції у вигляді

$$\Phi_t^\varepsilon(u,x) = U^\varepsilon(t) + W^\varepsilon(\tau) = U_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \big(U_k(t) + W_k(\tau)\big), \tag{2}$$

де $\tau = t/\varepsilon^2$.

Зауваження 1.1. Зауважимо, що подібні асимптотичні розклади активно використовуються у багатьох прикладних проблемах, зокрема в задачах прийняття рішень та оптимізації. Багато прикладів для випадку марковської випадкової еволюції можна знайти у [13]. При цьому оцінки збіжності активно застосовуються у цій роботі при проведенні відповідних розрахунків.

Оскільки напівмарковська випадкова еволюція є узагальненням марковського випадку, очевидно, указані приклади ілюструють і нашу модель також. Тим не менш, питання щодо можливих застосувань самих напівмарковських випадкових еволюцій є також цікавим і відповідь на нього можна знайти, зокрема в монографії [11], де такі моделі застосовано до різних еволюційних систем.

У роботі [5] асимптотичний розклад (2) для функціонала від напівмарковської випадкової еволюції у схемі дифузійної апроксимації будується з використанням інтегрального рівняння марковського відновлення з використанням леми.

Лема 1.1. *Функціонал від напівмарковської випадкової еволюції* $\Phi_t^\varepsilon(u,x)$ *задовольняє рівняння*

$$\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Phi^\varepsilon_{t-\varepsilon^2 s}(u,x) - \Phi_t^\varepsilon(u,x) = \varepsilon^2\mathbb{V}^\varepsilon(x)\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)V_{\varepsilon^2 s}(x)\varphi(u)ds, \tag{3}$$

де $\tau = t/\varepsilon^2$.

При визначенні асимптотичного розкладу, використано такі позначення.

Детермінована еволюція

$$\Phi_x(t,u) = \varphi(u_x^\varepsilon(t)), \quad u_x^\varepsilon(0) = u$$

визначається рівнянням

$$\frac{du_x^\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}v(u_x^\varepsilon(t);x)$$

та породжує відповідну півгрупу

$$V_t(x)\varphi(u) := \varphi(u_x^\varepsilon(t)), \quad u_x^\varepsilon(0) = u,$$

її генератор має вигляд

$$\mathbb{V}^\varepsilon(x)\varphi(u) = \frac{1}{\varepsilon}v(u,x)\varphi'(u).$$

Для зручності подальших викладок позначимо допоміжний генератор

$$\mathbb{V}(x)\varphi(u) := v(u,x)\varphi'(u).$$

Також позначимо

$$\mu_k(x) = \frac{m_k(x)}{k!m_1(x)}, \quad \mu_1(x) := 1, \quad L^i_{k,n}U_n(t) := (-1)^i C^{k-n-i}_{k-n-2i}\mathbb{V}^{k-n-2i}(x)PU^{(i)}_n(t),$$

$$\Pi\mathfrak{L}_k := \sum_{n=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]}\Pi\mu_{k-n-i}(x)L^i_{n,k}\mathbb{R}_0\mathfrak{L}_n + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\Pi\mu_{k-i}(x)L^i_{0,k},$$

$$\nu_k(x) = (-1)^k[m_k(x) - \mu_{k+1}(x)],$$

$$\widehat{L}_{k-1}(x) := \sum_{n=0}^{k-1}(-1)^n C^n_k\mathbb{V}^{k-n}(x)PU^{(n)}(t),$$

$$\widehat{L}_k(x) := \mathbb{V}^k(x)P.$$

І нарешті

$$\mathbf{Q}W(\tau) = \int_0^\infty F_x(ds)PW(\tau - s),$$

$$\psi^k(\tau) = \overline{F}^{(k)}_x(\tau)\mathbb{V}^k(x)P\varphi(u), \quad \psi^k_0(\tau) = \sum_{r=1}^{k-1}\mathbf{Q}^r W_{k-r}(\tau), \tag{4}$$

$$\overline{F}^{(k)}_x(\tau) = \int_\tau^\infty \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\overline{F}_x(s)ds, \quad \mathbf{Q}^r W(\tau) = \int_0^\infty \frac{s^r}{r!}F_x(ds)\mathbb{V}^r(x)PW(\tau - s).$$

2. Оцінка залишкового члена

Додатково припустимо, що фукнція $v(u;x)$ у (1) задовольняє умову

$$\sup_{|u|\le R}\sup_{x\in E}|v(u;x)| \le C_R, \tag{5}$$

де $R > 0$.

Доведемо допоміжний результат у вигляді леми та її наслідку.

Лема 2.1. *Якщо* Φ^ε *є розв'язком рівняння*

$$\mathbb{L}^\varepsilon\Phi^\varepsilon := [Q + \varepsilon Q_1]\Phi^\varepsilon = \varepsilon\psi, \tag{6}$$

де ψ *відома функція,* $\|\psi\| \le C$, $\|Q^{-1}\| \le C$, $\|Q_1\| \le C$, $\|Q_2\| \le C$, *тоді*

$$\|\Phi^\varepsilon\| \le C_1\varepsilon.$$

Доведення. Розв'язком рівняння (6) є

$$\Phi^\varepsilon = \varepsilon Q^{-1}[\psi - Q_1\Phi^\varepsilon - \varepsilon Q_2\Phi^\varepsilon].$$

Можемо виконати таку ітерацію: покладемо

$$\Phi^\varepsilon_{(0)} = \varepsilon\psi,$$

$$\left\|\Phi^\varepsilon_{(0)}\right\| = \varepsilon\|\psi\| \le \varepsilon C,$$

тоді

$$\Phi^\varepsilon_{(1)} = \varepsilon Q^{-1}\left[\psi - Q_1\Phi^\varepsilon_{(0)} - \varepsilon Q_2\Phi^\varepsilon_{(0)}\right],$$

і оскільки Q^{-1}, Q_1 та Q_2 є обмеженими, то

$$\left\|\Phi^{\varepsilon}_{(1)}\right\| \le \varepsilon C\Big(C + C\left\|\Phi^{\varepsilon}_{(0)}\right\| + \varepsilon C\left\|\Phi^{\varepsilon}_{(0)}\right\|\Big) \le C\big(\varepsilon C + (\varepsilon C)^2 + \varepsilon(\varepsilon C)^2\big).$$

За індукцією, матимемо

$$\Phi^{\varepsilon}_{(N)} \le C\sum_{k=1}^{N+1}(\varepsilon C)^k + (\varepsilon C)^{N+2}.$$

Можемо обрати параметр ε достатньо малим, щоб $\varepsilon C < 1$. Тоді, при $N \to \infty$ ми отримаємо

$$\|\Phi^{\varepsilon}\| \le C\frac{\varepsilon C}{1-\varepsilon C} \le \varepsilon C_1.$$

Лему доведено. □

Наслідок 2.1. *Якщо Φ^{ε} є розв'язком рівняння*

$$\mathbb{L}^{\varepsilon}\Phi^{\varepsilon} := \big[Q + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2\big]\Phi^{\varepsilon} = \varepsilon^{N+1}\psi, \tag{7}$$

де $\|\psi\| \le C$, $\|Q^{-1}\| \le C$, $\|Q_1\| \le C$, $\|Q_2\| \le C$, то

$$\|\Phi^{\varepsilon}\| \le C_1\varepsilon^{N+1}.$$

Доведення. Покладемо

$$\varepsilon^{-N}\Phi^{\varepsilon} =: \overline{\Phi}^{\varepsilon}.$$

Тоді маємо із (7):

$$\varepsilon^{N}\mathbb{L}^{\varepsilon}\overline{\Phi}^{\varepsilon} = \varepsilon^{N+1}\psi.$$

Отримаємо рівняння для $\overline{\Phi}^{\varepsilon}$:

$$\mathbb{L}^{\varepsilon}\overline{\Phi}^{\varepsilon} = \varepsilon\psi.$$

Згідно із лемою 2.1, маємо

$$\left\|\overline{\Phi}^{\varepsilon}\right\| \le C_1\varepsilon,$$

або для Φ^{ε}:

$$\|\Phi^{\varepsilon}\| \le C_1\varepsilon^{N+1}.$$

Таким чином, наслідок доведено. □

Тепер можемо перейти до оцінювання залишкового члена, записаного у вигляді

$$\Phi^{\varepsilon,N}(t) = \Phi^{\varepsilon}_t(u,x) - \Phi^{\varepsilon}_N(t) = \Phi^{\varepsilon}_t(u,x) - U_0(t) - \sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\big(U_k(t) + W_k(\tau)\big).$$

Теорема 2.1. *За умов (1) та (5) справедлива наступна оцінка залишкового члена у асимптотичному розкладі, визначеному в теоремі 1.1 з [5]:*

$$\left\|\Phi^{\varepsilon,N}(t)\right\| \le C^{\varepsilon}\varepsilon^{N+1},$$

для деякого C^{ε}.

Зауваження 2.1. Отриманий результат повністю узгоджується з оцінкою, отриманою в [10], а саме, у позначеннях нашої роботи

$$\|\Phi^{\varepsilon}_t(u,x) - U_0(t)\| \le \varepsilon d,$$

де константу d отримано через оцінки відповідних генераторів, які визначають напівмарковську еволюцію.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що $\Phi^{\varepsilon,N}(t)$ задовольняє умови наслідку 2.1.

Спершу розглянемо регулярну частину $U^{\varepsilon,N}(t) := U^\varepsilon(t) - U_0(t) - \sum_{k=1}^N \varepsilon^k U_k(t)$ асмптотичного розкладу $\Phi^{\varepsilon,N}(t)$.

Із рівняння (3) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PU^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - U^{\varepsilon,N}(t) = \\
&\quad = \int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\big[U^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - U^{\varepsilon,N}(t)\big] + \\
&\quad\quad + \int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PU^{\varepsilon,N}(t) - U^{\varepsilon,N}(t) = \\
&\quad = QU^{\varepsilon,N}(t) + \int_0^\infty F_x(ds)[\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x) - I]PU^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - \\
&\quad\quad - \varepsilon^2\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)' + \\
&\quad\quad + \int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Big[U^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big)U^{\varepsilon,N}(t) + \varepsilon^2 s\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big] = \\
&\quad = QU^{\varepsilon,N}(t) - \overline{F}_x(s)[\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x) - I]PU^{\varepsilon,N}(t)\big|_0^\infty + \\
&\quad\quad + \varepsilon\mathbb{V}(x)\int_0^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PU^{\varepsilon,N}(t)ds - \varepsilon^2\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)' + \\
&\quad\quad + \int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Big[U^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - U^{\varepsilon,N}(t) + \varepsilon^2 s\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big] = \\
&\quad = \big[Q + \varepsilon Q_1^\varepsilon + \varepsilon^2 Q_2^\varepsilon\big]U^{\varepsilon,N}(t),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
Q_1^\varepsilon U^{\varepsilon,N}(t) &:= \mathbb{V}(x)\int_0^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PU^{\varepsilon,N}(t)ds + \\
&\quad + \int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Big[U^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - U^{\varepsilon,N}(t) + \varepsilon^2 s\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big]/\varepsilon, \\
Q_2^\varepsilon U^{\varepsilon,N}(t) &:= -\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)',
\end{aligned} \tag{8}$$

і ми маємо, з урахуванням умов (1) та (5):

$$\begin{aligned}
\|Q_1^\varepsilon\| &= \Big\|\mathbb{V}\int_0^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}PU^{\varepsilon,N}(t)ds + \\
&\quad + \int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Big[U^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - U^{\varepsilon,N}(t) + \varepsilon^2 s\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big]/\varepsilon\Big\| \le \\
&\le \|\mathbb{V}\|\big\|U^{\varepsilon,N}(t)\big\|\int_0^\infty e^{\varepsilon^2 s\|\mathbb{V}\|}\overline{F}_x(s)ds + \\
&\quad + \int_0^\infty F_x(ds)e^{\varepsilon^2 s\|\mathbb{V}\|}\Big\|U^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big) - U^{\varepsilon,N}(t) + \varepsilon^2 s\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big\|/\varepsilon \le \\
&\le C + \widetilde{C} = C_1, \\
\|Q_2^\varepsilon\| &= \Big\|-\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big\| \le \Big\|\big(U^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big\|\int_0^\infty sF_x(ds)e^{\varepsilon^2 s\|\mathbb{V}\|} \le C_2,
\end{aligned}$$

оскільки функції $U^{\varepsilon,N}(t)$ належать простору дійснозначних функцій, обмежених разом з усіма своїми похідними.

Оператор Q має обмежений обернений оператор $\mathbb{R}_0 = \Pi - [Q+\Pi]^{-1}$ в R_Q (див. [4]).

З іншого боку, маємо із (3):

$$\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PU^{\varepsilon,N}\big(t-\varepsilon^2 s\big)-U^{\varepsilon,N}(t)=$$
$$=\left[\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PU^{\varepsilon}\big(t-\varepsilon^2 s\big)-U^{\varepsilon}(t)\right]-$$
$$-\left[Q+\sum_{k=1}^N \varepsilon^{2k}\mu_k(x)L_k\right]\left[U_0+\sum_{k=1}^N \varepsilon^k U_k\right]-$$
$$-\frac{(\varepsilon s)^{N+1}}{(N+1)!}\mathbb{V}^{(N+1)}(x)\int_0^\infty F_x(ds)\int_0^{\varepsilon^2 s}\mathbb{V}_\theta(x)PU_N^\varepsilon\big(t-\varepsilon^2 s\big)d\theta=$$
$$=-\left[QU_0+\sum_{k=1}^N\varepsilon^k\left(QU_k+\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]}\mu_{k-n-i}(x)L_{k,n}^iU_n(t)\right)-\varepsilon^{N+1}\psi\right]=\varepsilon^{N+1}\psi,$$

де останнє співвідношення є наслідком співвідношень, отриманих у наслідку 3.1 у [5]:

$$\begin{cases} QU_0(t)=0,\\ QU_1(t)=-\mathbb{V}(x)PU_0(t),\\ QU_2(t)=\dfrac{\partial PU_0(t)}{\partial t}-\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)PU_0(t)-\mathbb{V}(x)PU_1(t),\\ QU_3(t)=\dfrac{\partial PU_1(t)}{\partial t}-\mu_2(x)\mathbb{V}^2(x)PU_1(t)-\mathbb{V}(x)PU_2(t)+\\ \qquad\qquad +\mu_2(x)C_1^2\mathbb{V}(x)P\dfrac{\partial U_0(t)}{\partial t}-\mu_3(x)\mathbb{V}^3(x)PU_0(t),\\ \qquad\dots\\ QU_k(t)=-\displaystyle\sum_{n=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-n}{2}\right]}\mu_{k-n-i}(x)L_{k,n}^iU_n(t),\quad k\ge 3,\\ \qquad\dots \end{cases}$$

тут

$$L_{k,n}^iU_n(t):=(-1)^iC_{k-n-2i}^{k-n-i}\mathbb{V}^{k-n-2i}(x)PU_n^{(i)}(t).$$

Функція ψ є інтегралом, що має форму, подібну до (8), і отже його можна оцінити аналогічно тому, як і оператори Q_1^ε та Q_2^ε.

Отже, ми показали, що функція $U^{\varepsilon,N}(t)$ задовольняє рівняння

$$\big[Q+\varepsilon Q_1^\varepsilon+\varepsilon^2Q_2^\varepsilon\big]U^{\varepsilon,N}(t)=\varepsilon^{N+1}\psi, \tag{9}$$

де умови наслідку 2.1 виконуються для $Q, Q_1^\varepsilon, Q_2^\varepsilon, \psi$.

Таким чином, у підпросторі R_Q:

$$\big\|U^{\varepsilon,N}(t)\big\|\le C\varepsilon^{N+1}. \tag{10}$$

Легко бачити, що рівняння (9) у підпросторі N_Q має форму

$$\big[\varepsilon Q_1^\varepsilon+\varepsilon^2Q_2^\varepsilon\big]c^{\varepsilon,N}(t)=\varepsilon^{N+1}\psi. \tag{11}$$

Із (8) отримаємо

$$[Q_1^\varepsilon+\varepsilon Q_2^\varepsilon]c^{\varepsilon,N}(t)=m_1(x)\mathbb{V}(x)c^{\varepsilon,N}(t)+\varepsilon\mathbb{V}^2(x)\int_0^\infty\overline{F}_x(s)\int_0^{\varepsilon^2 s}\mathbb{V}_\theta(x)Pc^{\varepsilon,N}(t)d\theta ds-$$
$$-\varepsilon\int_0^\infty sF_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\big(c^{\varepsilon,N}(t)\big)'+$$

$$+\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)P\Big[c^{\varepsilon,N}(t-\varepsilon^2 s)-c^{\varepsilon,N}(t)+\varepsilon^2 s\big(c^{\varepsilon,N}(t)\big)'\Big]/\varepsilon.$$

Отже, можемо переписати (11) у такій формі:

$$[Q_1+\varepsilon Q_2]c^{\varepsilon,N}(t)=\varepsilon^N\psi,$$

де Q_1^{-1} є обмеженим оператором, а Q_2 та ψ є інтегралами типу (8) і їх можна оцінити так само, як Q_1^ε та Q_2^ε.

Таким чином, умови наслідку 2.1 задоволено для Q_1, Q_2, ψ, і ми маємо у підпросторі N_Q:

$$\big\|c^{\varepsilon,N}(t)\big\|\le C\varepsilon^N. \tag{12}$$

Тепер розглянемо функцію $W^{\varepsilon,N}(\tau):=W^\varepsilon(\tau)-\sum_{k=1}^N\varepsilon^k W_k(\tau)$, яка визначає сингулярну частину $\Phi^{\varepsilon,N}(t)$.

Із рівняння (3) маємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)-W^{\varepsilon,N}(\tau)=\\
&=\int_0^\tau F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)-W^{\varepsilon,N}(\tau)+\int_\tau^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)=\\
&=\int_0^\tau F_x(ds)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)-W^{\varepsilon,N}(\tau)+\int_\tau^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)+\\
&\quad+\int_0^\tau F_x(ds)[\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)-I]PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)=\\
&=[\mathbf{Q}-I]W^{\varepsilon,N}(\tau)-\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)\big|_\tau^\infty+\\
&\quad+\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_\tau^\infty\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)ds-\overline{F}_x(s)[\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)-I]PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)\big|_0^\tau+\\
&\quad+\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_0^\tau\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)ds=\\
&=[\mathbf{Q}-I]W^{\varepsilon,N}(\tau)+\overline{F}_x(\tau)\mathbb{V}_t(x)PW^{\varepsilon,N}(0)-\overline{F}_x(\tau)[\mathbb{V}_t(x)-I]PW^{\varepsilon,N}(0)+\\
&\quad+\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_0^\infty\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)ds=\\
&=[\mathbf{Q}-I]W^{\varepsilon,N}(\tau)+\overline{F}_x(\tau)PW^{\varepsilon,N}(0)+\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_0^\infty\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)ds=\\
&=([\mathbf{Q}-I]+\varepsilon\mathbf{Q}_1)W^{\varepsilon,N}(\tau),
\end{aligned}$$

де оператор $\mathbf{Q}$ визначено в (4), а згідно з наслідком 5.1 із [5]

$$\varepsilon\mathbf{Q}_1W^{\varepsilon,N}(\tau):=\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_0^\infty\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)ds+\overline{F}_x(\tau)PU^{\varepsilon,N}(0),$$

і ми отримаємо з умов (1), (5) та (10):

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Q}_1\|&=\left\|\mathbb{V}\int_0^\infty\overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)Pds\right\|+\big\|\overline{F}_x(\tau)PU^{\varepsilon,N}(0)\big\|\le\\
&\le\|\mathbb{V}\|\int_0^\infty e^{\varepsilon^2 s\|\mathbb{V}\|}\overline{F}_x(s)ds+\big\|U^{\varepsilon,N}(0)\big\|\le C_1+\varepsilon^{N+1}C_2\le C.
\end{aligned}$$

Умови розділів 3, 4 монографії [9, глава 1] виконуються для оператора $\mathbf{Q}(\tau)$. А саме,

$$\int_E\int_E\int_0^\infty\pi(dx)F_x(dt)P(x,dy)=1<\infty.$$

Отже, оператор $\mathbf{Q}-I$ має обмежений обернений оператор.

З іншого боку, маємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)-W^{\varepsilon,N}(\tau)=\\
&\quad=\left[\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon}(\tau-s)-W^{\varepsilon}(\tau)\right]-\\
&\quad-\left[(\mathbf{Q}-I)+\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\int_0^\infty F_x(ds)\frac{s^k}{k!}\mathbb{V}^k(x)P\right]\left[\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k W_k\right]-\\
&\quad-\int_0^\infty F_x(ds)\frac{\varepsilon^{N+1}\mathbb{V}^{N+1}(x)}{(N+1)!}\int_0^{\varepsilon^2 s}\mathbb{V}_\theta(x)PW_N^\varepsilon(\tau-s)d\theta.
\end{aligned}$$

Рівняння для сингулярного доданка $W(\tau), \tau=t/\varepsilon^2 (\varepsilon>0)$ можна легко отримати із (3), оскільки зсув на $-\varepsilon s$ можна записати через співвідношення

$$\mathcal{L}^\varepsilon W^\varepsilon(\tau)=\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^\varepsilon(\tau-s)-W^\varepsilon(\tau)=\varepsilon\psi_\varepsilon(\tau), \tag{13}$$

де

$$\varepsilon\psi_\varepsilon(\tau)=\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)\varphi(u)ds.$$

Оскільки доданок $\left[\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^\varepsilon(\tau-s)-W^\varepsilon(\tau)\right]$ задовольняє рівняння (13), маємо

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty F_x(ds)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)PW^{\varepsilon,N}(\tau-s)-W^{\varepsilon,N}(\tau)=\\
&\quad=\varepsilon\mathbb{V}(x)\int_\tau^\infty \overline{F}_x(s)\mathbb{V}_{\varepsilon^2 s}(x)\varphi(u)ds-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\left[(\mathbf{Q}-I)W_k(\tau)+\psi_0^k(\tau)\right]+O(\varepsilon^{N+1})=\\
&\quad=\sum_{k=1}^{N}\psi^k(\tau)+O(\varepsilon^{N+1})-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\left[(\mathbf{Q}-I)W_k(\tau)+\psi_0^k(\tau)\right]+O(\varepsilon^{N+1})=\varepsilon^{N+1}\phi,
\end{aligned}$$

де ми використовуємо рівності отримані у [5, лема 4.1]. Тут функція ϕ є інтегралом типу (8) і може бути оцінена так само, як оператори $Q_1^\varepsilon, Q_2^\varepsilon$.

Отже, ми показали, що функція $W^{\varepsilon,N}(\tau)$ задовольняє рівняння

$$([\mathbf{Q}-I]+\varepsilon\mathbf{Q}_1)W^{\varepsilon,N}(\tau)=\varepsilon^{N+1}\phi,$$

де $\mathbf{Q}-I, \mathbf{Q}_1$ та ϕ задовольняють умови наслідку 2.1.

Отже, ми отримаємо

$$\left\|W^{\varepsilon,N}(\tau)\right\|\le C\varepsilon^{N+1}. \tag{14}$$

Для функції $\Phi^{\varepsilon,N}(t)$ маємо з (10), (12) та (14):

$$\left\|\Phi^{\varepsilon,N}(t)\right\|\le\left\|U^{\varepsilon,N}(t)\right\|+\left\|c^{\varepsilon,N}(t)\right\|+\left\|W^{\varepsilon,N}(\tau)\right\|\le C\varepsilon^{N+1}+C\varepsilon^N+C\varepsilon^{N+1}=C^\varepsilon\varepsilon^N.$$

Нарешті, якщо розглянемо

$$\Phi^{\varepsilon,N+1}(t)=\Phi^{\varepsilon,N}(t)-\varepsilon^{N+1}\left[U^{\varepsilon,N+1}(t)+c^{\varepsilon,N+1}(t)+W^{\varepsilon,N+1}(t)\right],$$

то

$$\Phi^{\varepsilon,N}(t)=\Phi^{\varepsilon,N+1}(t)+\varepsilon^{N+1}\left[U^{\varepsilon,N+1}(t)+c^{\varepsilon,N+1}(t)+W^{\varepsilon,N+1}(t)\right].$$

А отже, справедлива така оцінка:

$$\left\|\Phi^{\varepsilon,N}(t)\right\|\le\left\|\Phi^{\varepsilon,N+1}(t)\right\|+O\big(\varepsilon^{N+1}\big)\le C^\varepsilon\varepsilon^{N+1}.$$

Теорему доведено. □

Список літератури

1. S. Albeverio, V. S. Koroliuk, I. V. Samoilenko, *Asymptotic expansion of semi-Markov random evolutions,* Stochastics, **81** (2009), no. 5, 343–356.
2. V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk, *Stochastic Models of Systems,* Kluwer Acad. Publ., 1999.
3. V. S. Korolyuk, N. Limnios, *Stochastic Systems in Merging Phase Space,* World Scientific Publishers, 2005.
4. V. S. Korolyuk, A. F. Turbin, *Mathematical foundation of state lumping of large systems,* Kluwer Acad. Publ., 1990.
5. V. S. Koroliuk, I. V. Samoilenko, *Asymptotic expansion for a functional of semi-Markov random evolution in diffusion approximation scheme,* Theory Probab. Math. Statist., **96** (2017), 84–99. (Ukrainian)
6. A. A. Pogorui, R. M. Rodriguez-Dagnino, *Asymptotic expansion for transport processes in semi-Markov media,* Theory Probab. Math. Statist., **83** (2011), 127–134.
7. I. V. Samoilenko, *Asymptotic expansion for the functional of markovian evolution in R^d in the circuit of diffusion approximation,* J. Appl. Math. Stoch. Anal., **3** (2005), 247–258.
8. I. V. Samoilenko, *Asymptotic expansion of a semi-Markov random evolution,* Ukr. Math. J., **58** (2006), no. 9, 1396–1414.
9. V. M. Shurenkov, *Ergodic Markov processes,* Nauka, Moscow, 1989. (Russian)
10. A. V. Swishchuk, *Semi-Markov random evolutions: some ideas, methods and results,* Exploring Stochastic Laws. Festschrift in Honour of the 70th Birthday of Academician V. S. Korolyuk (A. V. Skorokhod and Yu. V. Borovskikh, ed.), VSP, 1995, 417–442.
11. A. Swishchuk, Jianhong Wu, *Evolution of Biological Systems in Random Media: Limit Theorems and Stability,* Springer, 2003.
12. A. V. Swishchuk, *Estimations of convergence rate in limi theorems for semi-Markov random evolutions,* Stochastic systems and theor applications, Inst. of Math. NasUSSR, Kiev, 1990, 86–92. (Russian)
13. G. G. Yin, Q. Zhang, *Continuous-Time Markov Chains and Applications: a Singular Perturbation Approach,* Springer, 1998.

Інститут математики, Національна академія наук України, вул. Терещенківська, 3, Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: vskorol@yahoo.com

Факультет комп'ютерних наук та кіберенетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: isamoil@i.ua

Стаття надійшла до редколегії 16.02.2018

ESTIMATION OF THE REMAINDER IN ASYMPTOTIC EXPANSION OF A FUNCTIONAL OF SEMI-MARKOV RANDOM EVOLUTION

V. S. KOROLIUK, I. V. SAMOILENKO

Abstract. In [5] we found regular and singular parts of the expansion for a functional of semi-Markov random evolution and showed regularity of initial conditions. In this work we estimate the remainder of the asymptotic expansion found in [5].

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА ОТ ПОЛУМАРКОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

В. С. КОРОЛЮК, И. В. САМОЙЛЕНКО

Аннотация. В работе [5] найдена регулярная и сингулярная составляющие разложения функционала от полумарковской случайной эволюции, показана регулярность начальных условий. В данной статье проведена оценка остаточного члена для полученного в [5] асимптотического разложения.