Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(98)/2018, с. 70–86

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(98)/2018, pp. 70–86

УДК 519.21

ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ НА ПЛОЩИНІ, КЕРОВАНЕ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

І. М. БОДНАРЧУК, В. М. РАДЧЕНКО

Анотація. Досліджено задачу Коші для хвильового рівняння на площині, породженого загальною стохастичною мірою. Доведено існування та єдиність м'якого розв'язку. Отримано неперервність за Гельдером його траєкторій за часовою та просторовою змінними. Установлено неперервну залежність розв'язку від даних задачі.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, м'який розв'язок, умова Гельдера, простір Бєсова.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15; Secondary 60G17, 60G57.

1. Вступ

Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ — σ-алгебра підмножин з X; $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це збіжність за ймовірністю. Нехай також μ — стохастична міра на $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, тобто, σ-адитивне відображення

$$\mu\colon \mathcal{B}(\mathsf{X}) \to \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}).$$

В [1] таке μ називається загальною стохастичною мірою, цим самим підкреслюється, що на μ не накладається додаткових умов, таких, як мартингальність, невід'ємність, існування моментів тощо.

Розглядаємо таку задачу Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x); \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $T > 0$, $a > 0$, та μ – стохастична міра, визначена на $\mathcal{B}([0,T])$.

Досліджуємо м'який розв'язок задачі (1) (див. рівність (3) нижче). А саме, доводимо, що цей розв'язок існує та єдиний, а також має траєкторії, для яких виконується умова Гельдера за сукупністю змінних. Також ми показуємо, що м'який розв'язок неперервно залежить від даних.

Вивчення стохастичних рівнянь із частинними похідними є досить актуальною задачею, над якою активно працюють сучасні науковці. На сьогодні широко дослідженими є рівняння з вінерівськими процесами, дробовим броунівським рухом, мартингальними та пуассонівськими мірами. Зокрема, для рівняння із процесом, що є білим шумом за часовою змінною та корельованим за двовимірною просторовою змінною, у [2] доведено гельдеровість розв'язку з показником, що залежить від даних задачі, але не перевищує $1/2$. Схожий результат для м'якого розв'язку параболічного рівняння в гільбертовому просторі із циліндричним вінерівським процесом отримано у [3]. У роботі [4] показано, що хвильове рівняння з вінерівським процесом має м'який розв'язок, що неперервно залежить від даних. Для рівняння з пуассонівською стохастичною мірою у гільбертовому просторі доведено існування та єдиність м'якого розв'язку, що задовольняє умову Ліпшица [5]. У випадку, коли стохастичний вплив заданий двопараметричним дробовим броунівським рухом із параметрами $H_1, H_2 \in (1/2, 1)$, досліджено умови існування та єдиності розв'язку, та доведено, що цей розв'язок є неперервним за Гельдером із показниками $\eta < H_1$ та $\hat{\eta} < H_2$ за часовою та просторовою змінними відповідно [6].

Хвильові рівняння з мартингальними мірами розглянуто в роботах [7–12]. Для рівняння у тривимірному просторі в [8] доведено, що існує м'який розв'язок, неперервний за Гельдером за сукупністю змінних із показником, що залежить від даних задачі (зокрема, не перевищує показники гельдеровості функцій, які визначають значення розв'язку в початковий момент часу). Схожий результат отримано в [7] при дослідженні регулярності за часовою змінною розв'язку рівняння, що містить частинні похідні другого порядку за часом. У роботі [9] показано, що розв'язки стохастичних хвильового рівняння та рівняння теплопровідності з мартингальною мірою мають абсолютно неперервні розподіли, та щільності розподілів належать простору Бєсова. Також умови існування щільностей розв'язків рівнянь у просторах вищих розмірностей установлено у [10]. Апроксимацію стохастичних хвильових рівнянь за допомогою відповідних детермінованих рівнянь побудовано в [11, 12].

Цікаві випадки хвильових рівнянь, породжених випадковими шумами зі стійкими розподілами, вивчено у статтях [13, 14], де досліджено властивості узагальнених розв'язків. Зокрема, розглянуто рівняня на площині, в якому стохастичний вплив задано доданком $\sigma(t,x)\dot{M}(x)$, де σ — неперервна функція, та $\dot{M}$ — α-стійкий білий шум. Установлено, що розв'язок є гельдеровим за часовою змінною, але необмеженим у довільному околі кожної точки, в якій функція σ не перетворюється на нуль.

Властивості м'яких розв'язків рівнянь із частинними похідними із загальними стохастичними мірами розглянуто у [15–21]. Так, у статтях [15, 17] досліджено хвильові рівняння, в [18–20] — рівняння теплопровідності, у [21] — еволюційне рівняння в гільбертовому просторі. Існування, єдиність та регулярність м'якого розв'язку параболічного рівняння доведено в роботі [16], а в [22] представлено узагальнення цих результатів на випадок σ-скінченної стохастичної міри. Для випадкових функцій із траєкторіями з простору Бєсова визначено інтеграл за загальною стохастичною мірою та для певних рівнянь із такими інтегралами отримано твердження про існування та єдиність розв'язків [23].

Наша мета — узагальнити результати роботи [17] на випадок рівняння, заданого на площині. Основний результат нашого дослідження — теореми 2.1 та 2.2 — сформульовано в розділі 2, а доведено в розділі 6. Третій розділ містить деякі додаткові відомості та попередні оцінки. У розділах 4, 5 представлено твердження про неперервність за Гельдером інтеграла за стохастичною мірою окремо за просторовою (лема 4.1) та часовою (лема 5.1) змінними. У висновках порівняно отримані результати з результатами дослідження хвильового рівняння на прямій.

2. Формулювання основного результату

Розглядаємо м'який розв'язок задачі (1), тобто таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$, що

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \int_{\mathbb{R}^2} S_2(t, x-y) v_0(y)\, dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^2} S_2(t,x-y) u_0(y)\, dy \right) + \\ & + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^2} S_2(t-s, x-y) f\big(s, y, u(s,y)\big)\, dy + \\ & + \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^2} S_2(t-s, x-y)\sigma(s,y)\, dy\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $S_2(t,x) = \frac{1}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\mathbb{1}_{\{|x|<at\}}$ — фундаментальний розв'язок хвильового рівняння (1), та $|\cdot|$ позначає евклідову норму.

Інтеграли від випадкових функцій по dy та ds беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$. Такі інтеграли визначено і досліджено в [24] (див. також [25, глава 3]).

Також нехай $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < r\}$ — відкрита куля в $\mathbb{R}^2$, та $\bar{B}(x,r)$ — її замикання. Отже, рівняння (2) можна переписати у вигляді

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\pi}\int_{B(x,at)} \frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}\,dy + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a\pi}\int_{B(x,at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}\,dy\right) + \\ + \frac{1}{2a\pi}\int_0^t ds\int_{B(x,a(t-s))} \frac{f(s,y,u(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\,dy + \\ + \frac{1}{2a\pi}\int_{(0,t]} d\mu(s)\int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\,dy\,. \tag{3}$$

Далі будемо розглядати такі припущення.

A1. Функції $u_0(y) = u_0(y,\omega)\colon \mathbb{R}^2\times\Omega \to \mathbb{R}$, $v_0(y) = v_0(y,\omega)\colon \mathbb{R}^2\times\Omega \to \mathbb{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_0(y,\omega)| \le C_{u_0}(\omega)$, $|v_0(y,\omega)| \le C_{v_0}(\omega)$.

A2. $v_0(y), u_0(y), \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}, i = 1,2$, неперервні за Гельдером:

$$|v_0(y') - v_0(y'')| \le L_{v_0}(\omega)|y'-y''|^{\beta(v_0)}, \quad 0 < \beta(v_0) \le 1;$$
$$|u_0(y') - u_0(y'')| \le L_{u_0}(\omega)|y'-y''|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \le 1\,;$$
$$\left|\frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y') - \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y'')\right| \le L_{u_0}(\omega)|y'-y''|^{\beta(u_0)}\,.$$

A3. $f(s,y,v)\colon [0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)| \le C_f$.

A4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $y \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}$,

$$|f(s,y',v') - f(s,y'',v'')| \le L_f(|y'-y''| + |v'-v''|)\,.$$

A5. $\sigma(s,y)\colon [0,T]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)| \le C_\sigma$.

A6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s',y') - \sigma(s'',y'')| \le L_\sigma\Big(|s'-s''|^{\beta(\sigma)} + |y'-y''|^{\beta(\sigma)}\Big), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \le 1.$$

A7. $\forall B \subset [0,T]: \quad |\mu(B)| \le C(\omega)$.

Надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ додатні константи, що можуть бути різними у різних формулах і точне значення яких не суттєве.

Теорема 2.1. *Нехай виконуються припущення* A1–A6. *Тоді*

1) Рівняння (3) має розв'язок $u(t,x)$. Якщо $v(t,x)$ — інший розв'язок (3), то для всіх $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^2$ $u(t,x) = v(t,x)$ м. н.

2) Якщо також справджується A7, *то для будь-яких фіксованих $\delta > 0$, $K > 0$ та $\gamma \in [0, \beta(v_0)\wedge\beta(u_0)]$, такого що $\gamma < \beta(\sigma) - 1/2$, стохастична функція $u(t,x)$ має модифікацію $\bar{u}(t,x)$, для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x') - \bar{u}(t_2,x'')| \le C(\omega)(|t_1-t_2|^\gamma + |x'-x''|^\gamma), \quad t_1,t_2 \in [\delta,T],\ x',x'' \in \bar{B}(0,K).$$

Нехай крім (1) маємо наступні задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial t^2} = a^2\Delta_x u_j(t,x) + f_j\big(t,x,u_j(t,x)\big) + \sigma_j(t,x)\,\dot{\mu}(t), \\ u_j(0,x) = u_{0j}(x); \quad \dfrac{\partial u_j(0,x)}{\partial t} = v_{0j}(x), \end{cases}$$

де $j \geq 1$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2$, $T > 0$, $a > 0$, а розв'язки розглядаються у м'якому сенсі, тобто

$$\begin{aligned} u_j(t,x) = {} & \frac{1}{2a\pi} \int_{B(x,at)} \frac{v_{0j}(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}}\, dy + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2a\pi} \int_{B(x,at)} \frac{u_{0j}(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}}\, dy \right) + \\ & + \frac{1}{2a\pi} \int_0^t ds \int_{B(x,a(t-s))} \frac{f_j(s,y,u_j(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy + \\ & + \frac{1}{2a\pi} \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma_j(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Для цих рівнянь розглядатимемо наступні припущення.

A1*. Функції $u_{0j}(y) = u_{0j}(y,\omega)\colon \mathbb{R}^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$, $v_{0j}(y) = v_{0j}(y,\omega)\colon \mathbb{R}^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$:

$$|u_{0j}(y,\omega)| \leq C_{u_0}(\omega), \quad |v_{0j}(y,\omega)| \leq C_{v_0}(\omega).$$

A2*. $v_{0j}(y), u_{0j}(y), \frac{\partial u_{0j}(y)}{\partial y_i}, i = 1,2$, неперервні за Гельдером:

$$\begin{aligned} |v_{0j}(y') - v_{0j}(y'')| &\leq L_{v_0}(\omega)|y' - y''|^{\beta(v_0)}, \quad 0 < \beta(v_0) \leq 1; \\ |u_{0j}(y') - u_{0j}(y'')| &\leq L_{u_0}(\omega)|y' - y''|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \leq 1\,; \\ \left| \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i}(y') - \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i}(y'') \right| &\leq L_{u_0}(\omega)|y' - y''|^{\beta(u_0)}\,. \end{aligned}$$

A3*. $f_j(s,y,v)\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f_j(s,y,v)| \leq C_f$.

A4*. $f_j(s,y,v)$ ліпшицева за $y \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}$

$$|f_j(s,y',v') - f_j(s,y'',v'')| \leq L_f(|y' - y''| + |v' - v''|)\,.$$

A5*. $\sigma_j(s,y)\colon [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma_j(s,y)| \leq C_\sigma$.

A6*. $\sigma_j(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma_j(s',y') - \sigma_j(s'',y'')| \leq L_\sigma\Big(|s' - s''|^{\beta(\sigma)} + |y' - y''|^{\beta(\sigma)}\Big), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \leq 1.$$

Зауважимо, що тут константи $C_{u_0}(\omega), L_{u_0}(\omega), C_{v_0}(\omega), L_{v_0}(\omega)$, $C_f, L_f, C_\sigma, L_\sigma$ та $\beta(u_0), \beta(v_0)$, $\beta(\sigma)$ спільні для всіх $j \geq 1$.

Теорема 2.2. *Нехай для кожного $j \geq 1$ елементи рівнянь (3) та (4) задовольняють припущення* A1–A7 *та* A1*–A6*, A7 *відповідно. Нехай також*

$$\begin{aligned} V_j &= \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |v_{0j}(y) - v_0(y)| \to 0 \quad \text{м. н.}, \\ U_j &= \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |u_{0j}(y) - u_0(y)| \to 0 \quad \text{м. н.}, \\ Du_j &= \sup_{y \in \mathbb{R}^2, i=1,2} \left| \frac{\partial u_{0j}}{\partial y_i}(y) - \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| \to 0 \quad \text{м. н.} \\ \Sigma_j &= \sup_{(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2} |\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y)| \to 0, \\ F_j &= \sup_{(s,y,v) \in [0,T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} |f_j(s,y,v) - f(s,y,v)| \to 0, \quad j \to \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Тоді для довільних $\delta > 0$, $(t,x) \in [\delta,T] \times \mathbb{R}^2$ виконується

$$|u_j(t,x) - u(t,x)| \to 0, \quad j \to \infty \quad \text{м. н.}$$

3. Додаткові відомості

Розглянемо простір Бєсова $B_{22}^{\alpha}([b,c])$, $\alpha \in (1/2,1)$, $b,c \in \mathbb{R}$. А саме, простір функцій $g\colon [b,c] \to \mathbb{R}$, для яких скінченна норма

$$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])} = \|g\|_{\mathsf{L}_2([b,c])} + \left(\int_0^{c-b} \left(w_{2,[b,c]}(g,r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2},$$

де

$$w_{2,[b,c]}(g,r) = \sup_{0\le h\le r}\left(\int_b^{c-h} |g(s+h)-g(s)|^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Для норм просторів Бєсова на множинах $[0,1]$ та $[b,c]$ справедливе таке співвідношення [18, нерівність (4)]. Нехай $g(z,\tau)\colon Z\times[b,c]\to\mathbb{R}$, Z — довільна множина. Тоді для функції $g(z,b+(c-b)s) : Z\times[0,1]\to\mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\underline{C}_{c-b}\|g(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])} \le \|g(z,b+(c-b)\,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,1])} \le \overline{C}_{c-b}\|g(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])},$$
$$\underline{C}_{c-b} = (c-b)^{-1/2}\big((c-b)^{\alpha}\wedge 1\big), \quad \overline{C}_{c-b} = (c-b)^{-1/2}\big((c-b)^{\alpha}\vee 1\big).$$

При цьому, якщо $c-b=1$, то

$$\|g(z,b+(c-b)\,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,1])} = \|g(z,\cdot)\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])}.$$

Покладемо для довільного $t\in[0,T]$

$$\Delta_{kn}^{(t)} = \big((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t\big], \quad n\ge 0, \quad 1\le k\le 2^n.$$

Нехай функція $g(z,s) : Z\times[0,T]\to\mathbb{R}$ така, що $\forall z\in Z :\ g(z,\cdot)$ неперервна на $[0,T]$. Тут $Z = Z_0\times[0,T]$, Z_0 — довільна множина, а $z=(z_0,t)$. Позначимо

$$g_n(z,s) = g(z,0)\mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{1\le k\le 2^n} g\big(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t\big)\mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(T)}}(s).$$

Тоді за [21, лема 3] випадкова функція

$$\eta(z) = \int_{(0,t]} g(z,s)d\mu(s), \quad z\in Z,$$

має таку модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z) = \int_{(0,t]} g_0(z,s)d\mu(s) + \sum_{n\ge 1}\left(\int_{(0,t]} g_n(z,s)d\mu(s) - \int_{(0,t]} g_{n-1}(z,s)d\mu(s)\right), \tag{6}$$

що для всіх $\varepsilon>0$, $\omega\in\Omega$, $z\in Z$

$$|\widetilde{\eta}(z)| \le \big|g(z,0)\mu((0,t])\big| +$$
$$+\left\{\sum_{n\ge 1} 2^{n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|g\big(z,k2^{-n}T\wedge t\big) - g\big(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t\big)\right|^2\right\}^{\frac12}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t]\Big)\right|^2\right\}^{\frac12}.$$

Для цієї модифікації за [26, теорема 1.2] та [18, нерівність (6)] справедлива оцінка

$$|\widetilde{\eta}(z)| \le \big|g(z,0)\mu((0,t])\big| + C\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}\times$$
$$\times\left\{\sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t]\Big)\right|^2\right\}^{\frac12}, \tag{7}$$

де $\alpha = \varepsilon/2 + 1/2$. Зауважимо, що модифікація $\widetilde{\eta}$ є спільною для всіх $z \in Z$, а стала C залежить від величин α, T та не залежить від z, ω.

Також будемо використовувати таку оцінку [18, нерівність (7)]:

$$\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])} \le C_t^{\frac{1}{2}} \|g(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])} + |g(z,t)|\sqrt{T-t} + \\ + C_t^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t r^{-2\alpha-1} \int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |g(z,t)-g(z,s)|^2\, ds\, dr \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + C_t^{\frac{1}{2}} t^{-\alpha} \mathbb{1}\{t<T\} \left(\int_0^t |g(z,t)-g(z,s)|^2\, ds \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

де $C_t = 1 + \mathbb{1}\{t<T\}$ забезпечує точну рівність у випадку $t = T$.

4. Регулярність стохастичного інтеграла за просторовою змінною

Лема 4.1. *Нехай виконуються припущення A5, A6. Тоді для довільних фіксованих $t \in [0,T]$, $K > 0$ та $\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$ випадкова функція*

$$\varphi(x) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy, \quad x \in \bar{B}(0,K),$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером із показником γ_1.

Доведення. Нехай довільні $t \in (0,T]$, $x', x'' \in \bar{B}(0,K)$ — фіксовані. Покладемо для $s < t$

$$h(t,x,s) = \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy$$

та

$$q(z,s) = h(t,x',s) - h(t,x'',s), \quad z = (x',x'',t).$$

Для модифікації (6) випадкової функції

$$\eta(z) = \varphi(x') - \varphi(x'') = \int_{(0,t]} q(z,s) d\mu(s)$$

використаємо оцінку (7), причому модифікацію будуємо на множині $Z \times [0,t] = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0,t] \times [0,t]$. У такому випадку оцінка (7) має вигляд

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le |q(z,0)\mu((0,t])| + C\|q(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])} \times \left\{ \sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left| \mu\left(\Delta^{(t)}_{kn}\right) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

де стала C залежить від t.

Оцінимо норму простору Бєсова на $[0,t]$ функції $q(z,\cdot)$. Зробимо деякі перетворення функції h. У відповідному інтегралі виконаємо заміну змінних

$$y_1 = x_1 - z(t-s)\cos\varphi,$$
$$y_2 = x_2 - z(t-s)\sin\varphi,$$

одержимо

$$h(t,x,s) = (t-s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\sigma\big(s, x_1 - z(t-s)\cos\varphi, x_2 - z(t-s)\sin\varphi\big)}{\sqrt{a^2 - z^2}}\, z\, dz\,.$$

Тепер робимо заміну $v = \sqrt{a^2 - z^2}$, тоді

$$h(t,x,s) = (t-s)\times$$
$$\times\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma\Big(s, x_1 - (t-s)\sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2 - (t-s)\sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big)\, dv. \quad (10)$$

Далі за припущенням A6 маємо

$$|q(z,s)| \le L_\sigma |x' - x''|^{\beta(\sigma)}(t-s)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dv \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)} \quad (11)$$

та для $s \in (0, t-h]$, $h < t$, виконується

$$|q(z, s+h) - q(z,s)| \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)}\,. \quad (12)$$

З іншого боку, за припущеннями A5 та A6 отримуємо аналогічну оцінку за допомогою степеня h:

$$|q(z,s+h) - q(z,s)| \le L_\sigma T 2\pi a h^{\beta(\sigma)} + C_\sigma 2\pi a h \le C h^{\beta(\sigma)}\,. \quad (13)$$

Для довільного $\lambda_1 \in (0,1)$ перемножимо нерівності (12), піднесену до степеня $1-\lambda_1$, і (13), піднесену до степеня λ_1. Одержимо

$$|q(z,s+h) - q(z,s)| \le C|x'-x''|^{(1-\lambda_1)\beta(\sigma)} h^{\lambda_1\beta(\sigma)}$$

та

$$\left(\int_0^t \big(w_{2,[0,t]}(q,r)\big)^2 r^{-2\alpha-1} dr\right)^{1/2} \le C|x'-x''|^{(1-\lambda_1)\beta(\sigma)}\left(\int_0^t r^{2\lambda_1\beta(\sigma)-2\alpha-1}\, dr\right)^{1/2} \le$$
$$\le C|x'-x''|^{(1-\lambda_1)\beta(\sigma)},$$

при $\beta(\sigma)\lambda_1 > \alpha \Leftrightarrow \lambda_1 > \frac{\alpha}{\beta(\sigma)} > \frac{1}{2\beta(\sigma)}$. Тоді для довільного

$$\gamma_1 = (1-\lambda_1)\beta(\sigma) < \left(1 - \frac{1}{2\beta(\sigma)}\right)\beta(\sigma) = \beta(\sigma) - 1/2$$

знайдеться відповідне α.

Також з (11) маємо

$$|q(z,0)| \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)}, \quad \|q(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)}\,,$$

та, оскільки за умовою теореми $|x'| \le K$, $|x''| \le K$, то

$$|q(z,0)| \le C|x'-x''|^{\gamma_1}, \quad \|q(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} \le C|x'-x''|^{\gamma_1}\,.$$

Підставимо отримані оцінки в (9). Остаточно ми одержуємо

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le C|x'-x''|^{\gamma_1}\left(\big|\mu((0,t])\big| + \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\Big|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(t)}\Big)\Big|^2\right\}^{\frac12}\right) \le$$
$$\le C(\omega)|x'-x''|^{\gamma_1}\,,$$

де сума зі стохастичною мірою скінченна за [19, лема 3.1].

Нагадаємо, що тут $C(\omega)$ залежить від значення змінної t. Проте, якщо додатково вимагати виконання припущення A7 та $\forall\delta > 0$ розглядати стохастичний інтеграл для фіксованого $t \in [\delta, T]$, то отримаємо умову Гельдера зі сталою, що не залежить від t (аналогічно до випадку леми 5.1 нижче). □

5. Регулярність стохастичного інтеграла за часовою змінною

Лема 5.1. *Нехай виконуються припущення A5–A7. Тоді для довільних фіксованих $x \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ та $\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$ випадкова функція*

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy, \quad t \in [\delta, T],$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером із показником γ_1.

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{R}^2$ фіксоване. Розглянемо модифікацію (6) випадкової функції

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy = \\ = \int_{(0,t]} \hat{q}(z,s) d\mu(s), \quad z = (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [\delta, T].$$

Тоді для довільних фіксованих $\delta \le t_1 < t_2 \le T$ та $z_i = (x, t_i)$, $i = 1, 2$, маємо

$$\hat{\varphi}(t_2) - \hat{\varphi}(t_1) = \int_{(0,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s) d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{q}_0(z_1,s) d\mu(s) + \\ + \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(0,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s) d\mu(s) - \int_{(0,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s) d\mu(s) \Big) - \\ - \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(0,t_1]} \hat{q}_n(z_1,s) d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{q}_{n-1}(z_1,s) d\mu(s) \Big) = I_1 + I_2,$$

де

$$I_1 = \int_{(0,t_1]} (\hat{q}_0(z_2,s) - \hat{q}_0(z_1,s)) d\mu(s) + \\ + \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(0,t_1]} \big(\hat{q}_n(z_2,s) - \hat{q}_n(z_1,s)\big) d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \big(\hat{q}_{n-1}(z_2,s) - \hat{q}_{n-1}(z_1,s)\big) d\mu(s) \Big);$$

$$I_2 = \int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_0(z_2,s)\, d\mu(s) + \sum_{n\ge1} \Big(\int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_n(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \hat{q}_{n-1}(z_2,s)\, d\mu(s) \Big).$$

Розглянемо спочатку доданок I_1. Для $s \in (0, t_1]$, $\tilde{z} = (x, t_1, t_2)$ покладемо

$$Q(\tilde{z}, s) = \hat{q}(z_2, s) - \hat{q}(z_1, s)\,.$$

Зауважимо, що тут $\tilde{z} = (x, t_1, t_2)$ відповідає величині z_0, уведеній у розділі 3, а $(\tilde{z}, t_1)$ — величині z. Але для спрощення запису, ми це опускаємо.

Тоді аналогічно до (7) можемо записати

$$|I_1| \le \big|Q(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])\big| + \\ + C\|Q(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])} \times \Bigg\{ \sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \Big|\mu\Big(\Delta^{(T)}_{kn} \cap (0,t_1]\Big)\Big|^2 \Bigg\}^{\frac{1}{2}} \le \\ \le \big|Q(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])\big| + C(\omega)\|Q(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,T])}, \tag{14}$$

де остання нерівність отримується з використанням A7 [18, оцінка (12)].

Оцінимо кожен із доданків співвідношення (14). Спочатку розглянемо величину $Q(\tilde{z}, s)$, $s \in (0, t_1]$. Аналогічно до рівності (10) отримуємо представлення функції $\hat{q}(z_i, s)$, $i = 1, 2$:

$$\hat{q}(z_i, s) = (t_i - s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma\Big(s, x - (t_i - s)\sqrt{a^2 - v^2}(\cos\varphi, \sin\varphi)\Big)\, dv. \tag{15}$$

Тоді за припущеннями A6, A7 маємо

$$|Q(\tilde{z}, s)| \leq C|t_2 - t_1|^{\beta(\sigma)}, \tag{16}$$

де стала C не залежить від t_1, t_2. Також одержимо для $s \in (0, t_1 - h]$, $h \in (0, t_1]$:

$$|Q(\tilde{z}, s + h) - Q(\tilde{z}, s)| \leq C|t_2 - t_1|^{\beta(\sigma)}. \tag{17}$$

Тепер оцінимо величину $|Q(\tilde{z}, s+h) - Q(\tilde{z}, s)|$ за допомогою степеня h. Маємо

$$|Q(\tilde{z}, s + h) - Q(\tilde{z}, s)| \leq |\hat{q}(z_2, s + h) - \hat{q}(z_2, s)| + |\hat{q}(z_1, s + h) - \hat{q}(z_1, s)|.$$

Такі ж міркування, що й при отриманні (16) приводять до оцінки

$$|Q(\tilde{z}, s + h) - Q(\tilde{z}, s)| \leq Ch^{\beta(\sigma)}.$$

Таким чином, враховуючи (17), для довільного $\lambda_2 \in (0, 1)$ виконується

$$|Q(\tilde{z}, s + h) - Q(\tilde{z}, s)| \leq C|t_2 - t_1|^{(1-\lambda_2)\beta(\sigma)} h^{\lambda_2 \beta(\sigma)}. \tag{18}$$

Отже,

$$\left(\int_0^{t_1} \left(w_{2,[0,t_1]}(Q(\tilde{z}, \cdot), r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}\, dr\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq C|t_2 - t_1|^{(1-\lambda_2)\beta(\sigma)} \left(\int_0^{t_1} r^{2\lambda_2\beta(\sigma)-2\alpha-1}\, dr\right)^{1/2} \leq C|t_2 - t_1|^{(1-\lambda_2)\beta(\sigma)},$$

при такому $\alpha \in (1/2, 1)$, що $\lambda_2 \beta(\sigma) > \alpha \Leftrightarrow \lambda_2 > \frac{\alpha}{\beta(\sigma)} > \frac{1}{2\beta(\sigma)}$.

При цьому маємо, що $(1 - \lambda_2)\beta(\sigma) < \beta(\sigma) - 1/2$, оскільки $\lambda_2\beta(\sigma) > \alpha > 1/2$ для відповідного α.

Беручи до уваги (16), ми отримали, що для довільного $\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$ існує таке $\alpha \in (1/2, 1)$, що виконується

$$\|Q(\tilde{z}, \cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t_1])} \leq \|Q(\tilde{z}, \cdot)\|_{L_2([0,t_1])} + C|t_2 - t_1|^{\gamma_1} \leq C|t_2 - t_1|^{\gamma_1}.$$

Крім того, із (16) маємо

$$\int_0^{t_1} |Q(\tilde{z}, t_1) - Q(\tilde{z}, s)|^2\, ds \leq C|t_2 - t_1|^{2\beta(\sigma)},$$

та зі співвідношення (18):

$$\int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1\wedge(T-r)} |Q(\tilde{z}, t_1) - Q(\tilde{z}, s)|^2\, ds\, dr \leq$$
$$\leq C|t_2 - t_1|^{2(1-\lambda_2)\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} r^{-2\alpha-1} \int_{t_1-r}^{t_1} (t_1 - s)^{2\lambda_2\beta(\sigma)}\, ds\, dr \leq$$
$$\leq C|t_2 - t_1|^{2(1-\lambda_2)\beta(\sigma)} \int_0^{t_1} r^{2\lambda_2\beta(\sigma)-2\alpha}\, dr \leq$$
$$\leq C|t_2 - t_1|^{2(1-\lambda_2)\beta(\sigma)}.$$

Враховуючи те, що $C^{\frac{1}{2}}_{t_1} \leq 2$ та $t_1^{-\alpha} \leq \delta^{-\alpha}$, підставивши отримані оцінки у (8) і в (14), одержимо

$$|I_1| \leq C(\omega)|t_2 - t_1|^{\gamma_2}.$$

Розглянемо тепер величину I_2. Покладемо

$$\tilde{q}_n(z_2, s) = \sum_{1\leq k\leq 2^n} \hat{q}\Big(z_2, \big(((k-1)2^{-n}T) \vee t_1\big) \wedge t_2\Big) \mathbb{1}_{\Delta^{(T)}_{kn}}(s), \quad s \in [0, T].$$

За аналогом теореми Лебега про мажоровану збіжність [1, твердження 7.1.1] виконується

$$I_2 = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_{(t_1,t_2]}\tilde q_n(z_2,s)d\mu(s), \quad \forall x, t_1, t_2.$$

Отже, випадкова функція

$$\int_{(t_1,t_2]}\tilde q_0(z_2,s)d\mu(s) + \sum_{n\ge 1}\left(\int_{(t_1,t_2]}\tilde q_n(z_2,s)d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]}\tilde q_{n-1}(z_2,s)d\mu(s)\right)$$

є модифікацією для I_2, яку ми знову позначимо I_2. Тоді аналогічно до (7) одержимо

$$|I_2| \le |\hat q(z_2,t_1)\mu((t_1,t_2])| + \left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n\varepsilon_0}\Big|\hat q\Big(z_2, \big(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1\big)\wedge t_2\Big) - \right.$$
$$\left. - \hat q\Big(z_2, \big(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1\big)\wedge t_2\Big)\Big|^2\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\varepsilon_0}\Big|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\Big)\Big|^2\right)^{1/2},$$

де k' таке, що $\Delta_{kn}^{(T)} \subset \Delta_{k'(n-1)}^{(T)}$ та $\varepsilon_0 > 0$ — довільне.

Використовуючи припущення A5 та рівність (15), маємо

$$|\hat q(z_2,s)| \le C_\sigma 2\pi a|t_2 - s| \le C|t_2 - t_1|, \quad \text{при} \quad s \in (t_1,t_2]\,.$$

Тоді

$$\Big|\hat q\Big(z_2, \big(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1\big)\wedge t_2\Big) - \hat q\Big(z_2, \big(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1\big)\wedge t_2\Big)\Big| \le C|t_2 - t_1|, \quad (19)$$

де дана величина має вигляд $|\hat q(z_2,s+h) - \hat q(z_2,s)|$ для $s \in [t_1,t_2]$ і такого $h \in [0, 2^{-n}T]$, що $s + h \in (t_1,t_2]$.

З іншого боку, за припущеннями A6, A7 аналогічно до (16)

$$|\hat q(z_2,s+h) - \hat q(z_2,s)| \le C_\sigma 2\pi a h + L_\sigma 2\pi|t_2 - s|h^{\beta(\sigma)}\int_0^a\Big(1 + \sqrt{a^2 - v^2}\Big)dv \le$$
$$\le Ch + C|t_2 - t_1|h^{\beta(\sigma)} \le$$
$$\le C|t_2 - t_1|^{1-\beta(\sigma)}2^{-n\beta(\sigma)},$$

оскільки $h \le |t_2 - t_1|$ та $h \le 2^{-n}T$.

Враховуючи (19), для $\lambda_0 \in (0,1)$ маємо

$$|\hat q(z_2,s+h) - \hat q(z_2,s)| \le C|t_2 - t_1|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}2^{-n\lambda_0\beta(\sigma)}.$$

Отже,

$$|I_2| \le C|t_2 - t_1||\mu((t_1,t_2])| + C|t_2 - t_1|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}\left(\sum_{n\ge 1}2^{n(\varepsilon_0 - 2\lambda_0\beta(\sigma)+1)}\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\varepsilon_0}\Big|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\Big)\Big|^2\right)^{1/2} \le C(\omega)|t_2 - t_1|^{\gamma_1},$$

при $\lambda_0\beta(\sigma) > 1/2$ і відповідному $\varepsilon_0 > 0$.

Таким чином, ми одержали, що

$$|\hat\varphi(t_2) - \hat\varphi(t_1)| \le C(\omega)|t_2 - t_1|^{\gamma_1}. \qquad \square$$

6. Доведення теорем 2.1 та 2.2

6.1. **Доведення теореми 2.1.** 1) Доведення існування та єдиності розв'язку повторює доведення відповідного пункту теореми з [15], із використанням ітераційного процесу, для якого $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n>0$

$$u^{(n+1)}(t,x)=\frac{1}{2a\pi}\int_{B(x,at)}\frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}\,dy\,+\\ +\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a\pi}\int_{B(x,at)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}\,dy\right)+\\ +\frac{1}{2a\pi}\int_0^t ds\int_{B(x,a(t-s))}\frac{f(s,y,u^{(n)}(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\,dy\,+\\ +\frac{1}{2a\pi}\int_{(0,t]}d\mu(s)\int_{B(x,a(t-s))}\frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\,dy\,.$$

Для всіх n,t,x беремо одну й ту саму модифікацію стохастичного інтеграла. Розв'язок будуємо у вигляді рівномірної границі $u^{(n)}(t,x)$ при $n\to\infty$.

Зауважимо, що цей розв'язок має неперервну модифікацію на множині $[\delta,T]\times\times\bar{B}(0,K)$. Ця властивість обґрунтована для розв'язку рівняння теплопровідності при доведенні пункту (i) теореми з [19]. Аналогічні міркування справедливі й у нашому випадку.

2) *Гельдеровість.* Спочатку покажемо гельдеровість розв'язку задачі (3) за просторовою змінною.

Нехай довільні $t\in[\delta,T]$, $x',x''\in\bar{B}(0,K)$ — фіксовані. Застосуємо процес ітерації та метод математичної індукції. Для $n=0$ виконується

$$\left|u^{(0)}(t,x')-u^{(0)}(t,x'')\right|=0\le C_0(t,\omega)|x'-x''|^\gamma,\quad C_0(t,\omega)=0.$$

Нехай для $n>0$ існує така стала $C_n(t,\omega)\ge 0$ що

$$\left|u^{(n)}(t,x')-u^{(n)}(t,x'')\right|\le C_n(t,\omega)|x'-x''|^\gamma.$$

Тоді, застосовуючи лему 4.1, матимемо для відповідної модифікації $u(t,\cdot)$

$$\left|u^{(n+1)}(t,x')-u^{(n+1)}(t,x'')\right|\le\\ \le\frac{1}{2a\pi}\left|\int_{B(x',at)}\frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x'-y|^2}}\,dy-\int_{B(x'',at)}\frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x''-y|^2}}\,dy\right|+\\ +\frac{1}{2a\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x',at)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x'-y|^2}}\,dy-\int_{B(x'',at)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x''-y|^2}}\,dy\right)\right|+\\ +\frac{1}{2a\pi}\left|\int_0^t ds\int_{B(x',a(t-s))}\frac{f(s,y,u^{(n)}(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x'-y|^2}}\,dy\,-\right.\\ \left.-\int_0^t ds\int_{B(x'',a(t-s))}\frac{f(s,y,u^{(n)}(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x''-y|^2}}\,dy\right|+C(\omega)|x'-x''|^\gamma=\\ =\frac{1}{2a\pi}(B_1+B_2+B_3)+C(\omega)|x'-x''|^\gamma.$$

Аналогічними міркуваннями, що й при отриманні (10), використовуючи припущення A2, приходимо до оцінки

$$B_1\le 2\pi atC_{v_0}(\omega)|x'-x''|^{\beta(v_0)}\le C(\omega)|x'-x''|^{\beta(v_0)}.$$

Для оцінки B_2 спочатку розглянемо похідну першого інтеграла. Оскільки

$$\int_{B(x',at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x'-y|^2}}\,dy = \\ = t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0\Big(x_1 - t\sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_1 - t\sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big)dv\,,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x',at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x'-y|^2}}\,dy\right) = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0\Big(x_1 - t\sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2 - t\sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big)\,dv + \\ + t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial t}\Big(x_1 - t\sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2 - t\sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big)\,dv,$$

і тоді за припущенням A2

$$B_2 \le C(\omega)|x'-x''|^{\beta(u_0)}. \tag{20}$$

Тепер дослідимо доданок B_3. Як і в попередніх оцінках, робимо відповідні заміни змінних і одержимо з урахуванням A4 та припущенням індукції

$$B_3 \le L_f 2\pi a\int_0^t (t-s)\Big(|x'-x''| + \Big|u^{(n)}\Big(s, x_1' - \sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2' - \sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big) - \\ - u^{(n)}\Big(s, x_1'' - \sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2'' - \sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big)\Big|\Big)\,ds \le \\ \le C\left(|x'-x''| + |x'-x''|^\gamma \int_0^t C_n(s,\omega)\,ds\right) \le \\ \le C\left(1 + \int_0^t C_n(s,\omega)\,ds\right)|x'-x''|^\gamma,$$

де $C = L_f 2^{2-\gamma}\pi a T^2 K^{1-\gamma}$, та останній інтеграл скінченний, оскільки $C_0(s,\omega) = 0$.

Тобто, твердження індукції виконується зі сталою

$$C_{n+1}(t,\omega) = C(\omega)\left(1 + \int_0^t C_n(s,\omega)\,ds\right),$$

причому,

$$C_{n+1}(t,\omega) \le C(\omega)e^{C(\omega)t} \le C(\omega)e^{C(\omega)T},$$

де $C(\omega)$ не залежить від n, t.

Аналогічно доводиться виконання умови Гельдера за часовою змінною $t \in [\delta, T]$ для стохастичної функції $u(t,x)$.

Таким чином, ми отримали модифікацію $\bar{u}^{(x)}$, неперервну за Гельдером за змінною x при фіксованому t, та модифікацію $\bar{u}^{(t)}$, що задовільняє умову Гельдера за t при кожному фіксованому x. Виключимо всі $\omega \in \Omega$, для яких $\bar{u}^{(x)}(t,x) \ne \bar{u}^{(t)}(t,x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,x) \in [\delta,T] \times \bar{B}(0,K)$. Для всіх інших ω покладемо $\bar{u} = \bar{u}^{(x)} = \bar{u}^{(t)}$ для раціональних (t,x) та довизначимо на всю множину $[\delta,T] \times \bar{B}(0,K)$ за неперервністю. Тобто, ми одержали модифікацію $\bar{u}(t,x)$, яка є неперервною за Гельдером за змінними t та x.

6.2. **Доведення теореми 2.2.** За теоремою 2.1, кожна із задач (3) та (4) має єдиний розв'язок, який можна побудувати за допомогою процесу ітерації (6.1). Нехай $u^{(n)}(t,x)$ та $u_j^{(n)}(t,x)$, $n \ge 0$, — відповідні n-ті наближення розв'язків $u(t,x)$ та $u_j(t,x)$

таким процесом. Зафіксуємо довільні $(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^2$ та $j \geq 1$. Тоді за умовами (5) та припущенням A4 маємо для $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
\left|u_j^{(n)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\right| &\leq \frac{1}{2a\pi}\left|\int_{B(x,at)} \frac{v_{0j}(y) - v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}}\, dy\right| + \\
&+ \frac{1}{2a\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,at)} \frac{u_{0j}(y) - u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}}\, dy\right)\right| + \\
&+ \frac{1}{2a\pi}\int_0^t ds \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\left|f_j(s,y,u_j^{(n-1)}(s,y)) - f(s,y,u_j^{(n-1)}(s,y))\right|}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy + \\
&+ \frac{L_f}{2a\pi}\int_0^t ds \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\left|u_j^{(n-1)}(s,y) - u^{(n-1)}(s,y)\right|}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy + \frac{1}{2a\pi}\left|\int_{(0,t]} G_j(s)\, d\mu(s)\right| \leq \\
&\leq V_j t + U_j + Du_j 4\pi a^2 t + F_j \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2a\pi}\left|\int_{(0,t]} G_j(s)\, d\mu(s)\right| + \\
&+ \frac{L_f}{2a\pi}\int_0^t ds \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\left|u_j^{(n-1)}(s,y) - u^{(n-1)}(s,y)\right|}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy\,.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Тут

$$
\begin{aligned}
G_j(s) = G_j(t,x,s) &= \int_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma_j(s,y) - \sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy = \\
&= (t-s) \times \\
&\times \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma_j\Big(s, x_1 - (t-s)\sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2 - (t-s)\sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big) dv - \right. \\
&\left. - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sigma\Big(s, x_1 - (t-s)\sqrt{a^2-v^2}\cos\varphi, x_2 - (t-s)\sqrt{a^2-v^2}\sin\varphi\Big) dv\right),
\end{aligned}
$$

та для оцінки похідної інтеграла з u_0 ми використали такі ж міркування, що й при отриманні (20).

Розглянемо окремо інтеграл зі стохастичною мірою. Для модифікації (6) випадкової функції $\int_{(0,t]} G_j(s) d\mu(s)$ справедлива нерівність (7). Оцінимо складові її правої частини.

Для довільного $s \in (0,t]$

$$
|G_j(s)| \leq 2\pi a(t-s)\Sigma_j \leq C\Sigma_j\,, \tag{22}
$$

і для $s, s+h \in (0,t]$

$$
|G_j(s+h) - G_j(s)| \leq C\Sigma_j. \tag{23}
$$

З іншого боку, маємо з A5–A6 та A5*–A6*

$$
|G_j(s+h) - G_j(s)| \leq Ch^{\beta(\sigma)}.
$$

Піднесемо цю нерівність до степеня $\tilde{\lambda} \in (0,1)$, а нерівність (23) – до степеня $1-\tilde{\lambda}$ та перемножимо їх. Одержимо

$$
|G_j(s+h) - G_j(s)| < Ch^{\tilde{\lambda}\beta(\sigma)}\Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}.
$$

Тоді, враховуючи (22), можемо записати

$$\|G_j\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])} = \|G_j\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} + \left(\int_0^t \big(w_{2,[0,t]}(G_j,r)\big)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2} \le$$
$$\le C\Sigma_j + C\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\left(\int_0^t r^{2\tilde\lambda\beta(\sigma)-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2} \le C\Big(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\Big),$$

для $\tilde\lambda > 1/(2\beta(\sigma))$ та відповідного α. При цьому $1-\tilde\lambda < 1-1/(2\beta(\sigma))$.

Крім того,

$$\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t\wedge(T-r)} |G_j(t)-G_j(s)|^2\,ds\,dr\right)^{\frac12} \le$$
$$\le C\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\left(\int_0^t r^{-2\alpha-1}\int_{t-r}^{t}(t-s)^{2\tilde\lambda\beta(\sigma)}\,ds\,dr\right)^{\frac12} \le$$
$$\le C\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\left(\int_0^t r^{2\tilde\lambda\beta(\sigma)-2\alpha} dr\right)^{\frac12} \le C\Sigma_j^{1-\tilde\lambda};$$

та із (22)

$$\left(\int_0^t |G_j(t)-G_j(s)|^2\,ds\right)^{\frac12} \le C\Sigma_j.$$

Підставимо отримані оцінки у (8). Беручи до уваги те, що $C_t \le 2$, одержимо

$$\|G_j\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])} \le C\Big(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\Big)(1+t^{-\alpha}).$$

Такими ж міркуваннями, як і при обґрунтуванні (14), з урахуванням A7, зі співвідношення (7) приходимо до нерівності

$$\left|\int_{(0,t]} G_j(s)d\mu(s)\right| \le |G_j(0)\mu((0,t])| +$$
$$+ C\|G_j\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\Big|\mu(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(0,t])\Big|^2\right\}^{1/2} \le$$
$$\le C\Big(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\Big)\big(1+t^{-\alpha}\big)\left(C(\omega) + \left\{\sum_{n\ge1}2^{-n\varepsilon}\sum_{1\le k\le 2^n}\Big|\mu(\Delta_{kn}^{(T)})\Big|^2 + C(\omega)\right\}^{1/2}\right) \le$$
$$\le C_1(\omega)\Big(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\Big)\big(1+t^{-\alpha}\big).$$

Оскільки $t \le T$, то з останньої оцінки та (21) маємо

$$\Big|u_j^{(n)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\Big| \le$$
$$\le \left(V_jT + U_j + C_0Du_jT + F_j\frac{T^2}{2} + C_1(\omega)\Big(\Sigma_j+\Sigma_j^{1-\tilde\lambda}\Big)\right)\big(1+t^{-\alpha}\big) +$$
$$+ C_2\int_0^t ds\int_{B(x,a(t-s))}\frac{\Big|u_j^{(n-1)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\Big|}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\,dy\,. \qquad (24)$$

Доведемо, що $\forall n \ge 0$

$$\Big|u_j^{(n)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\Big| \le S_j\left(t^{-\alpha} + \exp\{\widetilde{C}t\}\left(1+\frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right), \qquad (25)$$

де $S_j = V_jT + U_j + C_0Du_jT + F_j\frac{T^2}{2} + C_1(\omega)\Big(\Sigma_j + \Sigma_j^{1-\tilde{\lambda}}\Big)$, $\widetilde{C} = C_2 2\pi aT$.

Для $n = 0$: $\Big|u_j^{(0)}(t,x) - u^{(0)}(t,x)\Big| = 0$ і співвідношення (25) справджується. Припустимо, що (25) виконується. Покажемо, що ця оцінка справедлива для $n+1$.

Враховуючи (24), маємо

$$\Big|u_j^{(n+1)}(t,x) - u^{(n+1)}(t,x)\Big| \le S_j\big(1 + t^{-\alpha}\big) +$$
$$+ S_jC_2\int_0^t\left(s^{-\alpha} + \exp\{\widetilde{C}s\}\left(1 + \frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right)ds\int_{B(x,a(t-s))}\frac{dy}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}} \le$$
$$\le S_j\left(1 + t^{-\alpha} + \widetilde{C}\int_0^t\left(s^{-\alpha} + \exp\{\widetilde{C}s\}\left(1 + \frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right)ds\right) =$$
$$= S_j\left(1 + t^{-\alpha} + \frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \Big(\exp\{\widetilde{C}t\} - 1\Big)\left(1 + \frac{\widetilde{C}t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),$$

що збігається із шуканим виразом.

Отже, за методом математичної індукції ми довели виконання (25) $\forall n \ge 0$.

Тоді $\forall\,\delta > 0$ та $\forall\,(t,x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}^2$, маємо

$$\Big|u_j^{(n)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\Big| \le S_j\left(\delta^{-\alpha} + \exp\{\widetilde{C}T\}\left(1 + \frac{\widetilde{C}T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right),$$

де S_j не залежить від n, t, x.

Перейдемо в нерівності (25) до границі спочатку при $n \to \infty$, а потім при $j \to \infty$. Враховуючи умови (5), одержимо, що $\forall\,(t,x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}^2$

$$|u_j(t,x) - u(t,x)| \to 0, \quad j \to \infty \quad \text{м. н.}$$

7. Висновки

Розглянуто задачу Коші для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою $d\mu(t)$, на множині $[0,T] \times \mathbb{R}^2$. Доведено, що існує єдиний м'який розв'язок, неперервно залежний від даних задачі. Крім того, установлено неперервність цього розв'язку за Гельдером за сукупністю змінних із показником $\gamma \in [0, \beta(v_0) \wedge \beta(u_0)]$, $\gamma < \beta(\sigma) - 1/2$. При цьому, для аналогічної задачі на прямій у [17] встановлено виконання умови Гельдера з показниками γ_1, $\gamma_2 \in [0, \beta(u_0)]$ такими, що $\gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ та $\gamma_2 < 1/2$, для просторової та часової змінних відповідно.

Список літератури

1. S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
2. A. Millet, P.-L. Morien, *On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density*, Stochastic Process. Appl., **86** (2000), 141–162.
3. R. Serrano, *A note on space-time Hölder regularity of mild solutions to stochastic Cauchy problems in L^p-spaces*, Braz. J. Probab. Stat., **29** (2015), no. 4, 767–777.
4. V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro, *Stochastic wave equations with dissipative damping*, Stochastic Process. Appl., **117** (2007), no. 8, 1001–1013.
5. C. I. Prévôt *Existence, uniqueness and regularity w.r.t. the initial condition of mild solutions of SPDEs driven by Poisson noise*, Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probab. Relat. Top., **13** (2010), no. 1, 133–163.
6. L. Quer-Sardanyons, S. Tindel, *The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet*, Stochastic Process. Appl., **117** (2007), no. 10, 1448–1472.
7. R. C. Dalang, M. Sanz-Solé, *Regularity of the sample paths of a class of second-order spde's* J. Func. Anal., **227** (2005), 304–337.

8. R. C. Dalang, M. Sanz-Solé, *Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 199 (931), AMS, Providence, 2009.
9. M. Sanz-Solé, A. Süß, *Absolute continuity for SPDEs with irregular fundamental solution*, Electron. Commun. Probab., **20** (2015), no. 14, 1–11.
10. M. Sanz-Solé, A. Süß, *The stochastic wave equation in high dimensions: Malliavin differentiability and absolute continuity*, Electron. J. Probab., **18** (2013), no. 64, 1–28.
11. F. J. Delgado-Vences, M. Sanz-Solé, *Approximation of a stochastic wave equation in dimension three, with application to a support theorem in Hölder norm*, Bernoulli, **20** (2014), 2169–2216.
12. F. J. Delgado-Vences, M. Sanz-Solé, *Approximation of a stochastic wave equation in dimension three, with application to a support theorem in Hőlder norm: The non-stationary case*, Bernoulli, **22** (2016), no. 3, 1572–1597.
13. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise*, Mod. Stoch. Theory Appl., **3** (2016), no. 3, 237–248.
14. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Wave equation with stable noise*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **96** (2017), 142–154. (Ukrainian)
15. I. Bodnarchuk, *Mild solution of the wave equation with a general random measure*, Visnyk Kyiv University. Mathematics. Mechanics, **24** (2010), 28–33. (Ukrainian)
16. I. M. Bodnarchuk, *Regularity of the mild solution of a parabolic equation with stochastic measure*, Ukrainian Math. J., **69** (2017), no. 1, 1–18.
17. I. M. Bodnarchuk, *Wave equation with a stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 1–16.
18. I. M. Bodnarchuk, G. M. Shevchenko, *Heat equation in a multidimensional domain with a general stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **93** (2016), 1–17.
19. V. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Math., **194** (2009), no. 3, 231–251.
20. V. Radchenko *Heat equation with general stochastic measure colored in time*, Mod. Stoch. Theory Appl., **1** (2014), no. 2, 129–138.
21. V. N. Radchenko, *Evolution equations with general stochastic measures in Hilbert space*, Theory Probab. Appl., **59** (2015), no. 2, 328–339.
22. O. O. Vertsimakha, V. M. Radchenko, *Mild solution of a parabolic equation driven by a σ-finite stochastic measure*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **97** (2017), 24–37. (Ukrainian)
23. V. M. Radchenko, *Integral equations with respect to a general stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **91** (2015), 169–179.
24. V. N. Radchenko, *On a definition of the integral of a random function*, Teor. Veroyatnost. i Primenen., **41** (1996), no. 3, 677–682; English transl. in Theory Probab. Appl., **41** (1997), no. 3, 597–601.
25. V. N. Radchenko, *Integrals with respect to general stochastic measures*, Proceedings of Institute of Mathematics, National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, 1999. (Russian)
26. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl., **13** (1997), no. 2, 63–77.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: ibodnarchuk@univ.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 22.02.2018

WAVE EQUATION IN A PLANE DRIVEN BY A GENERAL STOCHASTIC MEASURE

I. M. BODNARCHUK, V. M. RADCHENKO

Abstract. The Cauchy problem for a wave equation on the plain, driven by a general stochastic measure is investigated. The existence and uniqueness of the mild solution are proved. Hölder regularity of its paths in time and spatial variables is obtained. Continuous dependence of the solution on data is established.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ, УПРАВЛЯЕМОЕ ОБЩЕЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

И. Н. БОДНАРЧУК, В. Н. РАДЧЕНКО

Аннотация. Исследуется задача Коши для волнового уравнения на плоскости, управляемого общей стохастической мерой. Доказано существование и единственность мягкого решения. Получено непрерывность по Гельдеру его траекторий по временной и пространственной переменным. Установлено непрерывную зависимость решения от данных задачи.