Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(99)/2018, с. 63–70

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(99)/2018, pp. 63–70

УДК 519.21

ВИЖИВАННЯ І ВИМИРАННЯ У СТОХАСТИЧНІЙ НЕАВТОНОМНІЙ ЛОГІСТИЧНІЙ МОДЕЛІ ПОПУЛЯЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

О. Д. БОРИСЕНКО, Д. О. БОРИСЕНКО

Анотація. Досліджується неавтономне логістичне диференціальне рівняння зі збуренням коефіцієнта інтенсивності зростання популяції білим шумом та центрованим і нецентрованим пуассонівськими шумами. Одержано достатні умови вимирання популяції майже напевно, невиживання популяції у середньому майже напевно, слабкого та сильного виживання популяції у середньому майже напевно.

Ключові слова і фрази. Стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння, центрований і нецентрований пуассонівський шум, вимирання, невиживання у середньому, слабке виживання у середньому, сильне виживання у середньому.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10; Secondary 60J75, 60G51, 92D25.

1. Вступ

Побудова логістичної моделі та її властивості представлені у роботі [1]. Класичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння має вигляд

$$dN(t) = N(t)(a(t) - b(t)N(t))dt,\ N(0) = N_0 > 0, \tag{1}$$

і моделює розмір N популяції, члени якої конкурують один з одним за обмежену кількість їжі та обмежений життєвий простір. Тут $a(t)$ — це інтенсивність росту популяції і $a(t)/b(t)$ — це місткість середовища у момент часу t. Результати досліджень детермінованої моделі (1) та її узагальнень представлено у роботі [2]. Але у реальному світі на динаміку популяції істотний вплив мають випадкові збурення. У роботі [3] вивчалось, зокрема, стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$dN(t) = N(t)[(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t)],\ N(0) = N_0, \tag{2}$$

де $w(t)$ — це стандартний одновимірний вінерів процес. Оскільки модель (2) описує динаміку популяції, то важливим питанням є визначення умов, при яких популяція вимирає, і умов, при яких виживає. У [3] одержано поріг виживання — вимирання популяції у моделі (2). У роботах [4, 5] вивчалися стохастичні логістичні диференціальні рівняння, які були одержані із класичного логістичного рівняння випадковим збуренням інтенсивності росту популяції білим шумом та центрованим пуассонівським шумом. Як відомо, перманентність означає довготермінове виживання у популяційній динаміці. У [5] вивчалось питання стохастичної перманентності системи стохастичних логістичних диференціальних рівнянь указаного вище типу. У роботі [6] розглядалось стохастичне неавтономне логістичне диференціальне рівняння вигляду

$$\begin{aligned} dN(t) = N(t)\Big[&(a(t) - b(t)N(t))dt + \alpha(t)dw(t) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \gamma_1(t,z)\tilde{\nu}_1(dt,dz) + \int_{\mathbb{R}} \gamma_2(t,z)\nu_2(dt,dz)\Big], N(0) = N_0, \end{aligned} \tag{3}$$

де $w(t)$ — це стандартний одновимірний вінерів процес, $\tilde{\nu}_1(t,A) = \nu_1(t,A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_1(t,A)$ і $\nu_2(t,A)$ — це незалежні міри Пуассона, які є незалежними від $w(t)$ і $N_0 > 0$, $E[\nu_i(t,A)] = t\Pi_i(A), i = 1,2$, $\Pi_i(A), i = 1,2$ — це скінченні міри на борелевих множинах A у $\mathbb{R}$. Коефіцієнти рівняння (3) не задовольняють умову лінійної обмеженості, але задовольняють локальну умову Ліпшиця, тому (див. [7, теорема 6, с. 246]) існує локальний розв'язок рівняння (3). У [6] одержано явний вигляд глобального розв'язку рівняння (3) і отримано достатні умови його стохастичної перманентності.

Як відомо авторам, питання виживання і не виживання у моделі популяційної динаміки, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням вигляду (3), ще не досліджувались. Тому таке дослідження є актуальним.

У цій статті ми використали ідеї і позначення з роботи [3].

Наведемо деякі означення, які потрібні у подальшому.

Означення 1.1. Популяція вимирає (extinction), якщо $\lim_{t\to\infty} N(t) = 0$ майже напевно (м. н.), де $N(t)$ — це розв'язок рівняння (3).

Означення 1.2. Популяція не виживає в середньому (non-persistence in the mean), якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds = 0 \quad \text{м. н.}$$

Означення 1.3. Популяція слабко виживає у середньому (weak persistence in the mean), якщо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds > 0 \quad \text{м. н.}$$

Означення 1.4. Популяція сильно виживає у середньому (strong persistence in the mean), якщо

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds > 0 \quad \text{м. н.}$$

Будемо використовувати такі позначення

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds,\ \ f_* = \liminf_{t\to\infty} f(t),\ \ f^* = \limsup_{t\to\infty} f(t),$$

$$p(t) = a(t) - \frac{\alpha^2(t)}{2} - \int_{\mathbb{R}}[\gamma_1(t,z) - \ln(1+\gamma_1(t,z))]\Pi_1(dz) + \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_2(t,z))\Pi_2(dz).$$

Для неперервної, обмеженої функції $f(t), t \in [0,+\infty)$, будемо позначати

$$f_{\sup} = \sup_{t\in[0,+\infty)} f(t), \qquad f_{\inf} = \inf_{t\in[0,+\infty)} f(t).$$

У цій роботі одержано достатні умови вимирання популяції, невиживання популяції в середньому, слабкого виживання в середньому та сильного виживання в середньому. У другому розділі наведено допоміжні результати. У третьому розділі доведено достатні умови вимирання, невиживання популяції в середньому та різного типу виживання популяції, динаміка якої описується рівнянням (3).

2. Допоміжні результати

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це ймовірнісний простір і $w(t), t \geq 0$ — це стандарнтий одновимірний вінерів процес на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $N_0 > 0$ — це невипадкова початкова умова, $\nu_1(t,A)$ і $\nu_2(t,A)$ — це незалежні міри Пуассона, визначені на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, які не залежать від $w(t)$, $\tilde{\nu}_1(t,A) = \nu_1(t,A) - t\Pi_1(A)$, $E[\nu_i(t,A)] = t\Pi_i(A), i = 1,2$, $\Pi_i(A), i = 1,2$ — це скінченні міри на борелевих множинах A в $\mathbb{R}$. На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ задано потік σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, який задовольняє звичні умови, де $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(s), \nu_i(s, A), i = 1, 2, s \leq t\}$.

Надалі ми будемо використовувати таку умову на коефіцієнти рівняння (3):

(A). Нехай $a(t) > 0, \inf_{t\geq 0} b(t) > 0$, і $a(t), b(t), \alpha(t)$ — це обмежені, неперервні функції, визначені на $[0, +\infty)$. Будемо припускати, що $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$, $\gamma_i(t, z), i = 1, 2$ — це неперервні по t функції, і функції $\ln(1+\gamma_i(t, z))$, $i = 1, 2$, обмежені.

Лема 2.1. [6] *Для довільного початкового значення $N(0) = N_0 > 0$ при виконанні умови (A) існує єдиний додатний розв'язок $N(t)$ рівняння* (3), *який є глобальним і має вигляд*

$$N(t) = \frac{\exp\{\eta(t)\}}{1/N_0 + \int_0^t b(s)\exp\{\eta(s)\}\,ds}, \tag{4}$$

де $t \geq 0$,

$$\eta(t) = \int_0^t [a(s) - \beta(s)]ds + \int_0^t \alpha(s)\,dw(s) + \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_1(s, z))\,\tilde{\nu}_1(ds, dz) +$$

$$+ \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \gamma_2(s, z))\,\nu_2(ds, dz),\ \ \beta(t) = \frac{\alpha^2(t)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_1(t, z) - \ln(1 + \gamma_1(t, z))]\,\Pi_1(dz).$$

Лема 2.2. *Нехай $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$, для довільного $T > 0$ і невипадкових функцій $g(t)$, $h_i(t, z), i = 1, 2$, виконуються умови*

$$\int_0^T g^2(t)\,dt < \infty, \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}} h_i^2(t, z)\,\Pi_i(dz)\,dt < \infty, \int_0^T\!\!\int_{\mathbb{R}} \left|e^{h_i(s,z)} - 1\right|^2 \Pi_i(dz)ds < \infty,\ \ i = 1, 2.$$

Тоді для довільних $\delta, \beta > 0$ і випадкового процесу

$$\zeta_\delta(t) = \int_0^t g(s)dw(s) + \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} h_1(s, z)\tilde{\nu}_1(ds, dz) + \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} h_2(s, z)\nu_2(ds, dz) - \frac{\delta}{2}\int_0^t g^2(s)ds -$$

$$-\frac{1}{\delta}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \left[e^{\delta h_1(s,z)} - 1 - \delta h_1(s, z)\right]\Pi_1(dz)ds - \frac{1}{\delta}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \left[e^{\delta h_2(s,z)} - 1\right]\Pi_2(dz)ds$$

маємо експоненційну нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T} \zeta_\delta(t) > \beta\right\} \leq e^{-\delta\beta}.$$

Доведення. Будемо розглядати випадок, коли $\mathsf{P}\{\forall K > 0, \exists t > 0 :\ |\zeta_\delta(t)| > K\} > 0$. Якщо це не так, тоді процес $\zeta_\delta(t)$, $t \geq 0$, буде обмеженим м. н. і наведені нижче аргументи спрощуються.

Для кожного цілого $n \geq 1$, визначимо момент зупинки

$$\tau_n = \inf\left\{t \geq 0 :\ \left|\int_0^t g(s)dw(s)\right| + \left|\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} h_1(s, z)\tilde{\nu}_1(ds, dz)\right| + \right.$$

$$+\left|\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} h_2(s, z)\nu_2(ds, dz)\right| + \frac{\delta}{2}\int_0^t g^2(s)ds + \frac{1}{\delta}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \left[e^{\delta h_1(s,z)} - 1\right]^2 \Pi_1(dz)ds +$$

$$\left. + \frac{1}{\delta}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \left[e^{\delta h_2(s,z)} - 1\right]^2 \Pi_2(dz)ds \geq n\right\}.$$

Зрозуміло, що $\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty$ (м.н.). В означенні процесу $\zeta_\delta(t)$ замінимо функції $g(t), h_i(t, z), i = 1, 2$, відповідно на процеси $g(t)\chi_{[0,\tau_n]}(t), h_i(t, z)\chi_{[0,\tau_n]}(t), i = 1, 2$, й одержаний процесс позначимо $\zeta_\delta^{(n)}(t)$. Застосуємо до процесу $\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}$ формулу Іто і будемо мати:

$$e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)} = 1 + \int_0^t e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(s)}\delta g(s)\chi_{[0,\tau_n]}(s)dw(s) +$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(s)}\Big(e^{\delta h_1(s,z)\chi_{[0,\tau_n]}(s)}-1\Big)\tilde{\nu}_1(ds,dz)+$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^{\delta\zeta_\delta^{(n)}(s)}\Big(e^{\delta h_2(s,z)\chi_{[0,\tau_n]}(s)}-1\Big)\tilde{\nu}_2(ds,dz),$$

де $\tilde{\nu}_2(ds,dz)=\nu_2(ds,dz)-\Pi_2(dz)ds$. Оскільки процес $\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)$ буде обмеженим м.н., то в умовах леми процес $\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}$ є мартингалом, траєкторії якого неперервні справа, мають границю зліва у кожній точці $t\ge 0$ і $\mathbb{E}[\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}]=1$.

Із мартингальної нерівності маємо

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(t)\}\ge e^{\delta\beta}\Big\}\le e^{-\delta\beta}\mathbb{E}[\exp\{\delta\zeta_\delta^{(n)}(T)\}]=e^{-\delta\beta}.$$

Тому

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\zeta_\delta^{(n)}(t)>\beta\Big\}\le e^{-\delta\beta}.$$

Враховуючи, що для $A_n=\Big\{\omega\in\Omega:\ \sup_{0\le t\le T}\zeta_\delta^{(n)}(t)\ge\beta\Big\}$, маємо $\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$, граничним переходом при $n\to\infty$ одержимо твердження леми. □

Лема 2.3. *При виконанні умови (A) маємо*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)}{\ln t}\le 1,\quad \text{м.н.} \tag{5}$$

де $N(t)$ — це розв'язок рівняння (3).

Доведення. Застосувавши формулу Іто до процесу $e^t\ln N(t)$, одержимо

$$e^t\ln N(t)-\ln N_0=\int_0^t e^s\Big\{\ln N(s)+a(s)-b(s)N(s)-\frac{\alpha^2(s)}{2}+$$
$$+\int_{\mathbb{R}}[\ln(1+\gamma_1(s,z))-\gamma_1(s,z)]\Pi_1(dz)\Big\}ds+\psi(t), \tag{6}$$

де

$$\psi(t)=\int_0^t e^s\alpha(s)dw(s)+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^s\ln(1+\gamma_1(s,z))\tilde{\nu}_1(ds,dz)+$$
$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} e^s\ln(1+\gamma_2(s,z))\nu_2(ds,dz).$$

Застосуємо до процесу $\zeta_\delta(t)=\psi(t)-\tilde{\psi}_\delta(t)$ лему 2.2, де

$$\tilde{\psi}_\delta(t)=\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{2s}\alpha^2(s)ds+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z))^{\delta e^s}-1-\delta e^s\ln(1+\gamma_1(s,z))\Big]\Pi_1(dz)ds+$$
$$+\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z))^{\delta e^s}-1\Big]\Pi_2(dz)ds,\qquad\forall\delta>0,$$

й одержимо оцінку

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le T}\zeta_\delta(t)>\beta\Big\}\le e^{-\delta\beta},\qquad\forall\delta>0,\beta>0. \tag{7}$$

Покладемо $T=k\sigma, k\in\mathbb{N},\sigma>0$, $\delta=\varepsilon e^{-k\delta}$, $\beta=\theta e^{k\delta}\varepsilon^{-1}\ln k$, $0<\varepsilon<1$, $\theta>1$. Тоді із (7) маємо

$$\mathsf{P}\Big\{\sup_{0\le t\le k\sigma}\Big[\psi(t)-\frac{\varepsilon}{2}e^{-k\delta}\int_0^t e^{2s}\alpha^2(s)ds-\frac{e^{k\delta}}{\varepsilon}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z))^{\varepsilon e^{s-k\delta}}-1-$$
$$-\varepsilon e^{s-k\delta}\ln(1+\gamma_1(s,z))\Big]\Pi_1(dz)ds-$$

$$-\frac{e^{k\delta}}{\varepsilon}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z))^{\varepsilon e^{s-k\delta}}-1\Big]\Pi_2(dz)ds\Big]>\frac{\theta e^{k\delta}\ln k}{\varepsilon}\Big\}\le k^{-\theta}.$$

Тому за лемою Бореля–Кантеллі майже для всіх $\omega\in\Omega$ існує таке $k_0(\omega)$, що для всіх $k\ge k_0(\omega)$ і $0\le t\le k\sigma$ будемо мати

$$\psi(t)\le\frac{\varepsilon}{2}e^{-k\delta}\int_0^t e^{2s}\alpha^2(s)ds+\frac{e^{k\delta}}{\varepsilon}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z))^{\varepsilon e^{s-k\delta}}-1-$$
$$-\ \varepsilon e^{s-k\delta}\ln(1+\gamma_1(s,z))\Big]\Pi_1(dz)ds+$$
$$+\ \frac{e^{k\delta}}{\varepsilon}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z))^{\varepsilon e^{s-k\delta}}-1\Big]\Pi_2(dz)ds\Big]+\frac{\theta e^{k\delta}\ln k}{\varepsilon}.\tag{8}$$

Із нерівності $x^r\le 1+(x-1)$ для $x\ge 0, 0\le r\le 1$ одержимо оцінки

$$\frac{e^t}{\varepsilon e^{t-k\delta}}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_1(s,z))^{\varepsilon e^{s-k\delta}}-1-\varepsilon e^{s-k\delta}\ln(1+\gamma_1(s,z))\Big]\Pi_1(dz)ds\le$$
$$\le e^t\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}e^{s-t}[\gamma_1(s,z)-\ln(1+\gamma_1(s,z))]\Pi_1(dz)ds,\tag{9}$$

$$\frac{e^t}{\varepsilon e^{t-k\delta}}\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\Big[(1+\gamma_2(s,z))^{\varepsilon e^{s-k\delta}}-1\Big]\Pi_2(dz)ds\le e^t\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}e^{s-t}\gamma_2(s,z)\Pi_2(dz)ds.\tag{10}$$

Із (6), використавши (8)–(10) і нерівність $\ln x-cx\le-\ln c-1, x>0, c>0$, одержимо для $(k-1)\delta\le t\le k\delta$

$$\frac{\ln N(t)}{\ln t}\le\frac{\ln N_0}{e^t\ln t}+\frac{\theta e^{k\delta}\ln k}{\varepsilon e^{(k-1)\delta}\ln((k-1)\delta)}+\frac{1}{\ln t}\int_0^t e^{s-t}\Big[-1-\ln b(s)+a(s)-$$
$$-\frac{1}{2}\big(1-\varepsilon e^{s-k\delta}\big)\alpha^2(s)\Big]ds+\frac{1}{\ln t}\int_0^t e^{s-t}\gamma_2(s,z)\Pi_2(dz)ds.$$

Звідси, використовуючи обмеженість коефіцієнтів рівняння (3), маємо

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)}{\ln t}\le\frac{\theta e^{\delta}}{\varepsilon}.$$

Покладемо $\theta\downarrow 1$, $\delta\downarrow 0$, $\varepsilon\uparrow 1$ й одержимо твердження леми. □

Наслідок 2.1. *В умовах леми 2.3*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln N(t)}{t}\le 0,\quad \textit{м.н.}\tag{11}$$

3. Основні результати

У подальшому будемо вимагати виконання умови (A).

Теорема 3.1. *Якщо*

$$\overline{p}^*=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds<0,$$

тоді популяція вимирає майже напевно.

Доведення. Із (4) випливає оцінка

$$N(t)\le N_0\exp\Big\{t\Big[\frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds+\frac{1}{t}M(t)\Big]\Big\},\tag{12}$$

де $M(t)=$

$$=\int_0^t\alpha(s)dw(s)+\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\ln(1+\gamma_1(s,z))\tilde\nu_1(ds,dz)+\int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}}\ln(1+\gamma_2(s,z))\tilde\nu_2(ds,dz),\tag{13}$$

яке є квадратично інтегровним мартингалом із квадратичною характеристикою

$$\langle M, M\rangle(t) = \int_0^t \alpha^2(s)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln^2(1+\gamma_1(s,z))\Pi_1(dz)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma_2(s,z))\Pi_2(dz)ds.$$

В умовах теореми $|\langle M, M\rangle(t)| \leq Kt$, тому за посиленним законом великих чисел [8, теорема 10, с. 119] маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}M(t) = 0 \quad \text{м. н.} \tag{14}$$

З означення $\overline{p}^*$ і (14) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ для достатньо великих t маємо

$$\frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds \leq \overline{p}^* + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{1}{t}M(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{м. н.}$$

Тому із (12) одержимо

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) \leq N_0 \limsup_{t\to\infty} \exp\{t[\overline{p}^* + \varepsilon]\} = 0 \quad \text{м. н.}$$

для достатньо малого $\varepsilon > 0$. Отже популяція вимирає, бо $N(t) \geq 0$. □

Теорема 3.2. *Якщо $\overline{p}^* = 0$, тоді популяція не виживає в середньому: $\lim_{t\to\infty} \overline{N}(t) = 0$ м. н.*

Доведення. За формулою Іто маємо

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds - \frac{1}{t}\int_0^t b(s)N(s)ds + \frac{1}{t}M(t), \tag{15}$$

де мартингал $M(t)$ визначено в (13). Із означення $\overline{p}^*$ і (14) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке достатньо велике t_0, що

$$\frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds \leq \overline{p}^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{t}M(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{м. н.}$$

Використавши ці нерівності, ми одержимо із (15)

$$\ln N(t) - \ln N_0 \leq t(\overline{p}^* + \varepsilon) - b_{\inf}\int_0^t N(s)ds = \varepsilon t - b_{\inf}\int_0^t N(s)ds, \ \forall t \geq t_0, \quad \text{м. н.} \tag{16}$$

Нехай $n(t) = \int_0^t N(s)ds$, тоді із (16) отримаємо

$$\ln\left(\frac{dn(t)}{dt}\right) \leq \varepsilon t - b_{\inf}n(t) + \ln N_0 \Rightarrow \exp\{b_{\inf}n(t)\}\frac{dn(t)}{dt} \leq N_0 e^{\varepsilon t} \ \forall t \geq t_0, \ \text{м. н.}$$

Тому

$$\int_{t_0}^t e^{b_{\inf}n(s)}\frac{dn(s)}{ds}ds \leq \frac{N_0}{\varepsilon}\left(e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t_0}\right), \ \forall t \geq t_0, \ \text{м. н.}$$

а значить

$$n(t) \leq \frac{1}{b_{\inf}}\ln\left[e^{b_{\inf}n(t_0)} + \frac{b_{\inf}N_0}{\varepsilon}(e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t_0})\right], \ \forall t \geq t_0, \ \text{м. н.} \tag{17}$$

Із (17) маємо

$$\overline{N}^* = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds \leq \frac{\varepsilon}{b_{\inf}}, \qquad \text{м. н.}$$

Із довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що $\overline{N}^* \leq 0$, а оскільки $N(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$, то маємо невиживання популяції $N(t)$ у середньому м. н. □

Теорема 3.3. *Якщо $\overline{p}^* > 0$, тоді популяція слабко виживає в середньому: $\overline{N}^* = \limsup_{t\to\infty} \overline{N}(t) > 0$ м. н.*

Доведення. Покажемо від супротивного, що $\mathsf{P}\{\overline{N}^* = 0\} = 0$. Нехай $\mathsf{P}\{\overline{N}^* = 0\} > 0$. Із (15) маємо

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = \overline{p}(t) - \overline{bN}(t) + \frac{1}{t}M(t), \tag{18}$$

де мартингал $M(t)$ визначено у (13). Для $\forall\omega \in \left\{\omega \in \Omega: \ \overline{N}^* = 0\right\}$ випливає, що

$$\limsup_{t\to\infty} \overline{bN}(t) \le b_{\sup}\overline{N}^* = 0.$$

Тому, використовуючи посилений закон великих чисел (14) для мартингалу $M(t)$, маємо із (18) для вибраних ω

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds = \overline{p}^* > 0.$$

Таким чином

$$\mathsf{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| \ \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} > 0\right\} > 0.$$

Але за наслідком 2.1 маємо

$$\mathsf{P}\left\{\omega \in \Omega \middle| \ \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln N(t)}{t} \le 0\right\} = 1.$$

Отже ми одержали суперечність. □

Теорема 3.4. *Якщо $\overline{p}_* > 0$, тоді*

$$\overline{N}_* = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds \ge \frac{\overline{p}_*}{b_{\sup}} \quad \text{м. н.},$$

а значить популяція $N(t)$ сильно виживає у середньому.

Доведення. Із означення $\overline{p}_*$ і посиленого закону великих чисел (14) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке достатньо велике t_0, що

$$\frac{1}{t}\int_0^t p(s)\,ds > \overline{p}_* - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{1}{t}M(t) > -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \ge t_0, \quad \text{м. н.}$$

Використавши ці нерівності, ми одержимо із (15)

$$\ln N(t) - \ln N_0 > t(\overline{p}_* - \varepsilon) - b_{\sup}\int_0^t N(s)\,ds, \ \forall t \ge t_0, \quad \text{м. н.} \tag{19}$$

Нехай $n(t) = \int_0^t N(s)\,ds$, тоді з (19) будемо мати

$$\ln\left(\frac{dn(t)}{dt}\right) > t(\overline{p}_* - \varepsilon) - b_{\sup}n(t) + \ln N_0, \ \forall t \ge t_0, \quad \text{м. н.}$$

Отже

$$e^{b_{\sup}n(t)}\frac{dn(t)}{dt} > N_0 e^{t(\overline{p}_* - \varepsilon)}, \ \forall t \ge t_0, \quad \text{м. н.}$$

Тому, зінтегрувавши одержану нерівність на проміжку від t_0 до t, одержимо

$$e^{b_{\sup}n(t)} > e^{b_{\sup}n(t_0)} + \frac{b_{\sup}N_0}{\overline{p}_* - \varepsilon}e^{t(\overline{p}_* - \varepsilon)} - \frac{b_{\sup}N_0}{\overline{p}_* - \varepsilon}e^{t_0(\overline{p}_* - \varepsilon)}. \ \forall t \ge t_0, \quad \text{м. н.}$$

Позначимо $\lambda = \overline{p}_* - \varepsilon$, і з останньої нерівності маємо

$$n(t) > \frac{1}{b_{\sup}}\ln\left[\frac{b_{\sup}N_0}{\lambda}e^{\lambda t} + e^{b_{\sup}n(t_0)} - \frac{b_{\sup}N_0}{\lambda}e^{\lambda t_0}\right], \ \forall t \ge t_0, \quad \text{м. н.}$$

Тому

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds \ge \frac{\lambda}{b_{\sup}} = \frac{\overline{p}_* - \varepsilon}{b_{\sup}}, \quad \text{м. н.}$$

А значить $\overline{N}_* \ge (\overline{p}_*/b_{\sup}) > 0$. □

Подяка

Автори щиро вдячні анонімному рецензенту за дуже слушні зауваження, які покращили як зміст статті, так і її стилістику.

Список літератури

1. M. Iannelli, and A. Pugliese, *An Introduction to Mathematical Population Dynamics*, Springer, 2014.
2. K. Golpalsamy, *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
3. Meng Liu, Ke Wanga, *Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **375** (2011), 443–457.
4. J. Bao, Ch. Yuan, *Stochastic population dynamics driven by Levy noise*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **391** (2012), 363–375.
5. S. Wang, L. Wang, and T. Wei, *A Note on a Competitive Lotka-Volterra Model with Levy Noise*, Filomat, **31** (2017), no. 12, 3741–3748.
6. O.D. Borysenko, D.O. Borysenko, *Non-autonomous stochastic logistic differential equation with non-centered Poisson measure*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics, (2017), no. 4.
7. I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *Stochastic Differential Equations and their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 1982. (in Russian)
8. R. Sh. Liptser, A.N. Shiryayev, *Theory of Martingales*, Nauka, Moscow, 1986. (in Russian)

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, м. Київ, Україна, 03127
Адреса електронної пошти: odb@univ.kiev.ua

Кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 6, м. Київ, Україна, 03127
Адреса електронної пошти: dima.borisenko.wrk@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 20.08.2018

PERSISTENCE AND EXTINCTION IN STOCHASTIC NONAUTONOMOUS LOGISTIC MODEL OF POPULATION DYNAMICS

O. D. BORYSENKO, D. O. BORYSENKO

Abstract. It is investigated the non-autonomous logistic differential equation with disturbance of rate of population growth coefficient by white noise, centered and non-centered Poisson noises. The sufficient conditions for the population extinction a. s., non-persistence of the population in the mean a. s., weak persistence of the population in the mean a. s., strong persistence of the population in the mean a. s. are obtained.

ВЫЖИВАНИЕ И ВЫМИРАНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕАВТОНОМНОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

А. Д. БОРИСЕНКО, Д. А. БОРИСЕНКО

Аннотация. Исследуется неавтономное логистическое дифференциальное уравнение с возмущением коэффициента интенсивности роста популяции белым шумом, центрированным и нецентрированным пуассоновскими шумами. Получены достаточные условия вымирания популяции почти наверное, невыживания популяции в среднем почти наверное, слабого и сильного выживания популяции почти наверное.