Київський національний університет імені Тараса Шевченка

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
“Процеси Маркова в актуарній математиці“

для студентів механіко-математичного факультету

Видавничо-поліграфічний центр
'Київський університет'
2008

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук, проф. Ю.В.Козаченко,
д-р фіз.-мат.наук, проф. Є.О.Лєбєдєв,
д-р фіз.-мат.наук, проф. Ю.С. Мішура

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
протокол N 5 від 10 грудня 2007 року

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК з курсу "Процеси Маркова в актуарній математиці" / Упорядник: М.В.Карташов - К., Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет', 2008 - 56 с.

Навчальне видання

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з курсу
"Процеси Маркова
в актуарній математиці"

для студентів механіко-математичного факультету

Упорядник

Карташов Микола Валентинович

Зміст

Вступ

Посібник містить матеріал спеціального курсу "Процеси Маркова в актуарній математиці", що розрахований на студентів першого курсу магістратури механіко-математичного факультету. Знайомство з поняттями курсу актуарної математики не передбачається. Водночас корисним є розуміння основних положень теорії дискретних ланцюгів Маркова [1, гл.2.14], та необхідне володіння основами теорії ймовірностей та математичної статистики [1].

Перший розділ посібника спирається на результати, що викладені у монографіях [2,3,4,5].

Другий розділ використовує матеріал підручників [6,7].

Посібник публікується за підтримки грантом TEMPUS PROJECT IB-JEP-25054-2004.

Література

1. *Карташов М.В.* Імовірність, процеси, статистика - Київ, ВПЦ Київський університет, 2007.

2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов, т.2. – М., 1973.

3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов, Москва, Наука, 1977.

4. *Скороход А.В.* Вероятность – Москва, ВИНИТИ, 1989.

5. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів – Київ, Либідь, 1990.

6. *Бауєрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж.* Актуарная математика. – М., 2001.

7. *Wolthuis H.* Life Insurance Mathematics. The Markovian Models – CAIRE, 1994.

Розділ 1

Неоднорідні процеси Маркова

Нехай E – довільна множина, а $\mathfrak{E}$ – сигма-алгебра підмножин E така, що $\{x\} \in \mathfrak{E}$. Будемо розглядати процеси зі значеннями у вимірному просторі $(E, \mathfrak{E})$.

Нехай також $T = [t_0, t_1]$ – замкнений підінтервал напівосі $[0, \infty)$ довжини $|T| \equiv t_1 - t_0$, а $T_0 = (t_0, t_1)$ – внутрішність T.

Визначимо символи Кронекера $\delta_{ij} = 1\!\!\mathrm{I}_{i=j}$.

1.1 Марковські процеси у широкому розумінні

Розглянемо набір випадкових величин $(\zeta_t,\ t \in T)$, зі значеннями у E, де індекс t будемо інтерпретувати як час. Тоді події, що відбуваються в моменти $s < t$, можна інтерпретувати як *минуле* відносно *сучасного* моменту t, а події у моменти $s > t$ – як *майбутнє*.

Марковська залежність означає, що *майбутнє умовно не залежить від минулого за умови відомого сучасного* – тобто залежність відбувається виключно через сучасне:

$$\mathbf{P}(\text{Майбутнє} \cap \text{Минуле} \ \mid\ \text{Сучасне}) =$$

$$\mathbf{P}(\text{Майбутнє} \ \mid\ \text{Сучасне}) \cdot \mathbf{P}(\text{Минуле} \ \mid\ \text{Сучасне})$$

З означення умовної ймовірності виводимо, що остання рівність еквівалентна рівності

$$\mathbf{P}(\text{Майбутнє} \mid \text{Минуле} \cap \text{Сучасне}) = \mathbf{P}(\text{Майбутнє} \ \mid \text{Сучасне}).$$

Розглянемо при $s < t$ умовну ймовірність переходу $P(s, x, t, B)$ зі стану x у момент s до множини $B \in \mathfrak{E}$ у момент t :

$$P(s, x, t, B) = \mathbf{P}(\zeta_t \in B \mid \zeta_s = x).$$

Функція $P(s, x, t, B)$ називається *перехідною ймовірністю* процесу, та є при всіх $s < t$ *стохастичним ядром*, тобто для всіх $B \in \mathfrak{E}$ вона є $\mathfrak{E}$-вимірною за x та при кожному x є ймовірнісною мірою як функція $B \in \mathfrak{E}$.

Якщо $s < u < t \in T$, то внаслідок марковської властивості природно припустити, що

$$\mathbf{P}(\zeta_t \in B \mid \zeta_s = y, \zeta_u = x) = P(u, x, t, B).$$

Тому з формули повної ймовірності

$$P(s, x, t, B) = \int_E \mathbf{P}(\zeta_t \in B \mid \zeta_s = x, \zeta_u = y) P(u, y, t, B)$$

виводимо таке означення.

Означення. *Сім'я стохастичних ядер $(P(s, x, t, B), s < t \in T)$ є марковською сім'єю, якщо для всіх $s < u < t \in T$, $x \in E, B \in E$ має місце рівняння Колмогорова-Чепмена:*

$$P(s, x, t, B) = \int_E P(s, x, u, dy) P(u, y, t, B).$$

Означення. *Набір з часового інтервалу T, фазового простору $(E, \mathfrak{E})$, та марковської сім'ї стохастичних ядер $(P(s, x, t, B), s < t \in T)$ називається* марковським процесом у широкому розумінні.

Надалі довизначимо

$$P(t, x, t, B) = 1\!\!1_{x \in B}.$$

Очевидно, що при цьому рівняння Колмогорова-Чепмена матимуть місце для всіх $s \leq u \leq t \in T$.

1.1.1 Породжені сім'ї операторів

Марковський процес у широкому розумінні породжує дві сім'ї лінійних операторів, що є стохастичними еволюціями.

Обернена еволюція

Позначимо через $\mathfrak{N}$ – лінійний банахів простір $\mathfrak{E}$-вимірних обмежених функцій f на E з нормою

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Зокрема, простір $\mathfrak{N}$ містить тотожну одиницю

$$1\!\!1(x) = 1, \ x \in E.$$

Розглянемо при $s \le t$ лінійні відображення $P_{st} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, що задаються рівностями

$$P_{st}f(x) = \int_E P(s,x,t,dy)f(y),\ x \in E.$$

Оскільки $P(s,\cdot,t,\cdot)$ є стохастичним ядром, то оператор P_{st} є стохастичним оператором, тобто

(1) $P_{st}f \in \mathfrak{N}$ при $f \in \mathfrak{N}$,

(2) $P_{st}f \ge 0$ для невід'ємних $f \ge 0$,

(3) $P_{st}\mathbb{1} = \mathbb{1}$.

Зокрема, оператори P_{st} є обмеженими та *стискаючими*:

$$\|P_{st}\| = \sup_{f:\ \|f\|\le 1} \|P_{st}f\| = \sup_{f:\ \|f\|\le 1} \sup_{x\in E} |P_{st}f(x)| \le$$
$$\sup_{x\in E} P_{st}\mathbb{1}(x) = 1.$$

Нехай $s \le u \le t \in T$, а $f \in \mathfrak{N}$. З рівнянь Колмогорова-Чепмена та теореми Фубіні виводимо, що

$$(P_{su}P_{ut})f(x) = P_{su}(P_{ut}f)(x) = \int_E P(s,x,u,dy)\left(\int_E P(u,y,t,dz)f(z)\right) =$$
$$\int_E \left(\int_E P(s,x,u,dy)P(u,y,t,dz)\right) f(z) = \int_E P(s,x,t,dz)f(z) = P_{st}f(x).$$

Отже, сім'я стохастичних операторів (P_{st}) є еволюцією, тобто для всіх $s \le u \le t \in T$

$$P_{st} = P_{su}P_{ut}.$$

Пряма еволюція

Далі, позначимо через $\mathfrak{M}$ лінійний банахів простір скінчених знакозмінних мір на $\mathfrak{E}$ з нормою повної варіації

$$\|\mu\| = |\mu|(E) \equiv \sup_{f\in\mathfrak{N}:\|f\|\le 1} \left|\int f d\mu\right|.$$

Визначимо при $s \le t$ лінійні відображення $P^*_{st} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$, що задаються рівностями

$$\mu P^*_{st}(B) = \int_E \mu(dx)P(s,x,t,B),\ B \in \mathfrak{E}.$$

Оператори P^*_{st} також є обмеженими та *стискаючими*:

$$\|P^*_{st}\| = \sup_{\mu:\ \|\mu\|\le 1} \|\mu P^*_{st}\| \le \sup_{\mu:\ \|\mu\|\le 1} |\mu|\, P^*_{st}(E) =$$
$$\sup_{\mu:\ \|\mu\|\le 1} |\mu|(E) = 1.$$

Нехай $s \le u \le t \in T$, а $\mu \in \mathfrak{M}$. З рівнянь Колмогорова-Чепмена та теореми Фубіні виводимо, що

$$\mu(P^*_{su}P^*_{ut})(B) = (\mu P^*_{su})P^*_{ut}(B) = \int_E \left(\int_E \mu(dx)P(s,x,u,dy) \right) P(u,y,t,B) =$$

$$\int_E \mu(dx) \left(\int_E P(s,x,u,dy)P(u,y,t,B) \right) = \int_E \mu(dx)P(s,x,t,B) = \mu P^*_{st}(B).$$

Отже, сім'я (P^*_{st}) також є **еволюцією**, тобто для всіх $s \le u \le t \in T$

$$P^*_{st} = P^*_{su}P^*_{ut}.$$

1.1.2 Обернені рівняння Колмогорова

Рівняння Колмогорова-Чепмена є нелінійними для перехідної імовірності P. Їх лінеаризацію знайшов А.М. Колмогоров.

Розглянемо лінійний підпростір

$$\mathfrak{D}(A) = \{f \in \mathfrak{N} : \forall s \in T_0, \forall x \in E \quad \exists \lim\nolimits_{h\downarrow 0} \left(P_{s-h,s}f(x) - f(x)\right)/h,$$

$$\text{та } \forall x \in E \quad \exists \lim\nolimits_{h\downarrow 0} P_{s-h,s}f(x) = f(x) \text{ при } s = t_1\}.$$

Визначимо при $s \in T_0$ лінійне відображення простору $\mathfrak{D}(A)$ у клас вимірних функцій на E :

$$A_s f(x) \equiv \lim\nolimits_{h\downarrow 0} \left(P_{s-h,s}f(x) - f(x)\right)/h, \quad x \in E.$$

Означення. *Лінійні оператори $((A_s, \mathfrak{D}(A)), s \in T_0)$ називаються* ***інфінітезимальними операторами*** *процесу у просторі $\mathfrak{N}$.*

Зафіксуємо $t \in T_0$. Припустимо, що для функції $f \in \mathfrak{N}$ має місце включення $P_{st}f \in \mathfrak{D}(A)$ при всіх $s \le t$. Позначимо

$$f_{st}(x) = P_{st}f(x).$$

Тоді з рівнянь Колмогорова-Чепмена випливає існування лівої похідної

$$-\frac{\partial}{\partial s} f_{st}(x) = \lim\nolimits_{h\downarrow 0} \left(P_{s-h,t}f(x) - P_{s,t}f(x)\right)/h =$$

$$\lim\nolimits_{h\downarrow 0} \left(P_{s-h,s}P_{st}f(x) - P_{s,t}f(x)\right)/h =$$

$$\lim\nolimits_{h\downarrow 0} \left(P_{s-h,s}f_{st}(x) - f_{st}(x)\right)/h = A_s f_{st}(x).$$

Отже, за вказаних припущень виконується *обернена система рівнянь Колмогорова*

$$-\frac{\partial}{\partial s} f_{st}(x) = A_s f_{st}(x), \ x \in E,$$

з крайовою умовою

$$\lim\nolimits_{s\uparrow t} f_{st}(x) = f(x), \ x \in E,$$

що є наслідком включення $f = f_{tt} \in \mathfrak{D}(A)$.

Якщо наведені припущення виконуються для функції $f(x) = 1\!\!1_{x \in B}$ при деякій $B \in \mathfrak{E}$, то перехідні ймовірності задовольняють обернені рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial s} P(s, x, t, B) = [A_s P(s, \cdot, t, B)](x), \; x \in E,$$
$$\lim_{s \uparrow t} P(s, x, t, B) = 1\!\!1_{x \in B}, \; x \in E.$$

1.1.3 Прямі рівняння Колмогорова

Розглянемо також лінійний підпростір простору $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{D}(A^*) = \{\mu \in \mathfrak{M} : \forall t \in T_0, \forall B \in \mathfrak{E} \quad \exists \lim_{h \downarrow 0} \left(\mu P^*_{t,t+h}(B) - \mu(B)\right)/h,$$
$$\text{та } \forall B \in \mathfrak{E} \quad \exists \lim_{h \downarrow 0} \mu P^*_{t,t+h}(B) = \mu(B) \text{ при } t = t_0\}.$$

Визначимо при $t \in T_0$ лінійне відображення простору $\mathfrak{D}(A^*)$ у клас скінчених мір на $\mathfrak{E}$:

$$\mu A^*_t(B) \equiv \lim_{h \downarrow 0} \left(\mu P^*_{t,t+h}(B) - \mu(B)\right)/h.$$

Означення. *Лінійні оператори $((A^*_t, \mathfrak{D}(A^*)), t \in T_0)$ називаються* ***інфінітезимальними операторами*** *процесу у просторі $\mathfrak{M}$.*

Права частина у визначенні є скінченою мірою, оскільки простір $\mathfrak{M}$ замкнений відносно збіжності на всіх $B \in \mathfrak{E}$.

Зафіксуємо $s \in T_0$. Припустимо, що для міри $\mu \in \mathfrak{M}$ має місце включення $\mu P^*_{st} \in \mathfrak{D}(A^*)$ для всіх $t \geq s$. Позначимо

$$\mu_{st}(B) = \mu P^*_{st}(B).$$

Тоді з рівнянь Колмогорова-Чепмена випливає існування правої похідної

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_{st}(B) = \lim_{h \downarrow 0} \left(\mu P^*_{s,t+h}(B) - \mu P^*_{s,t}(B)\right)/h =$$
$$\lim_{h \downarrow 0} \left(\mu P^*_{s,t} P^*_{t,t+h}(B) - \mu P^*_{s,t}(B)\right)/h =$$
$$\lim_{h \downarrow 0} (\mu_{st} P^*_{t,t+h}(B) - \mu_{st}(B)/h = \mu_{st} A^*_t(B).$$

Отже, за вказаних припущень виконується *пряма система рівнянь Колмогорова*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_{st}(B) = \mu_{st} A^*_t(B), \; B \in \mathfrak{E},$$

з крайовою умовою

$$\lim_{t \downarrow s} \mu_{st}(B) = \mu(B), \; B \in \mathfrak{E},$$

що є наслідком включення $\mu = \mu_{ss} \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Якщо вказані припущення виконуються для міри $\mu(B) = \mathbb{1}_{x\in B}$ при деякому $x \in E$, то перехідні ймовірності задовольняють прямі рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s,x,t,B) = [P(s,x,t,\cdot)A_t^*](B),\ B \in \mathfrak{E},$$

$$\lim_{t\downarrow s} P(s,x,t,B) = \mathbb{1}_{x\in B},\ B \in \mathfrak{E}.$$

1.2 Дискретні процеси Маркова

Попередні визначення справедливі для процесів з довільним вимірним фазовим простором $(E, \mathfrak{E})$. Для дискретного простору E достатні умови справедливості рівнянь Колмогорова можна конкретизувати.

Нехай $E = \{i, j, k, ...\}$ – скінчена або зліченна множина, а сигма-алгебра $\mathfrak{E} = 2^E$. Тоді:

(а) довільна вимірна функція $f \in \mathfrak{N}$ є числовою послідовністю $f = (f_j, j \in E)$,

(б) скінчена знакозмінна міра $\mu \in \mathfrak{M}$ задається сумованою послідовністю: $\mu = (\mu_i, i \in E)$, $\sum_{i\in E} |\mu_i| < \infty$, причому $\mu(B) = \sum_{i\in B} \mu_i$,

(в) інтеграл дорівнює сумі ряду: $\int f d\mu = \sum_{i\in E} f_i \mu_i$.

(г) лінійні оператори на $\mathfrak{N}$ та $\mathfrak{M}$ визначаються через матриці $A = (a_{ij}, i, j \in E)$:

$$Af(i) = \sum\nolimits_j a_{ij} f_j, \quad \mu A^*(\{j\}) = \sum\nolimits_i \mu_i a_{ij}.$$

Зокрема, визначимо для перехідної ймовірності P марковського процесу у широкому розумінні дискретний розподіл імовірностей за j для кожного s, i, t :

$$p_{ij}(s,t) \equiv P(s,i,t,\{j\}).$$

Тоді

$$P(s,i,t,B) = \sum\nolimits_{j\in B} p_{ij}(s,t),$$

причому

$$p_{ij}(s,t) \geq 0,\ \sum\nolimits_{j\in E} p_{ij}(s,t) = 1, \quad p_{ij}(t,t) = \mathbb{1}_{i=j}.$$

Рівняння Колмогорова-Чепмена зводяться при $s \leq u \leq t$ до вигляду

$$p_{ij}(s,t) = \sum\nolimits_k p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t).$$

Визначені вище лінійні оператори обчислюються з рівнянь

$$P_{st} f(i) = \sum\nolimits_j p_{ij}(s,t) f_j \ \text{ для } f = (f_j),$$

$$\mu P_{st}^*(\{j\}) = \sum\nolimits_i \mu_i p_{ij}(s,t) \text{ для } \mu = (\mu_i).$$

Іншими словами, вектор $P_{st}f$ збігається з добутком матриці

$$P_{st} = (p_{ij}(s,t),\ i,j \in E)$$

та вектора-стовпчика f, а вектор μP^*_{st} дорівнює добуткові вектора-рядка μ та матриці P_{st}.

Відповідно, рівняння Колмогорова-Чепмена містить добуток матриць

$$P_{st} = P_{su}P_{ut},\ s \le u \le t,\quad P_{tt} = I,$$

де I – одинична матриця на E.

1.2.1 Обернені рівняння

За означенням,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A) &= \{f = (f_i) : \forall s \in T_0, \forall i \in E \\ \exists\ A_s f(i) &\equiv \lim\nolimits_{h\downarrow 0} \sum\nolimits_j (p_{ij}(s-h,s) - \delta_{ij}) f_j\ /h \end{aligned}$$

$$\text{та } \forall i \in E\ \ \exists \lim\nolimits_{h\downarrow 0} \sum\nolimits_j p_{ij}(s-h,s) f_j = f_i \text{ при } s = t_1\}.$$

Для справедливості включення $(\delta_{ij}, j \in E) \in \mathfrak{D}(A)$ необхідно припустити, що для всіх $s \in T_0$ виконується умова

$$\forall i,j \in E,\ \exists\ a_{ij}(s) \equiv \lim\nolimits_{h\downarrow 0} (p_{ij}(s-h,s) - \delta_{ij})/h.$$

У цьому випадку інфінітезимальний оператор визначений принаймні за умови сумованості $\sum_j |f_j| < \infty$ за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (внаслідок рівномірності за j збіжності у останньому означенні) та зводиться до інфінітезимальної матриці

$$A_s f(i) = \sum\nolimits_j a_{ij}(s) f_j,\ i \in E.$$

Функції $a_{ij}(s), i \ne j$, називаються інтенсивностями переходів процесу у момент s.

Зауважимо, що послідовність під знаком границі в означенні $a_{ij}(s)$ задовольняє співвідношення $\sum_j (p_{ij}(s-h,s) - \delta_{ij})/h = 0$. Тому можна очікувати, що для інфінітезимальної матриці при $s \in T_0$ виконується умова консервативності

$$\sum\nolimits_j a_{ij}(s) = 0,\ \forall i \in E. \tag{C}$$

Відзначимо також, що за означенням $a_{ii}(s) \le 0$ та $a_{ij}(s) \ge 0$ при всіх $i \ne j$.

Оскільки $\sum_{j \le N} (p_{ij}(u,v) - \delta_{ij}) \le 0$, починаючи з $N > i$, то звідси отримуємо $\sum_{j \le N} a_{ij}(s) \le 0$. Граничним переходом $N \to \infty$ виводимо нерівність та збіжність ряду:

$$\sum\nolimits_{j\neq i} a_{ij}(s) \leq -a_{ii}(s) < \infty,\ s \in T_0.$$

Для розширення області визначення $\mathfrak{D}(A)$ припустимо існування двобічних границь

$$\forall s \in T_0,\ \forall i,j \in E,\ \exists\ a_{ij}(s) \equiv \lim\nolimits_{u\uparrow s,\ v\downarrow s}(p_{ij}(u,v)-\delta_{ij})/(v-u). \qquad (A)$$

Теорема. *Нехай при* $s \in T_0$ *виконуються умови (A) та (C). Тоді для довільної* $f = (f_i)$ *з* $\sup|f_i| < \infty$ *має місце включення* $f \in \mathfrak{D}(A)$, *перехідні ймовірності* $p_{ij}(s,t)$ *є диференційовними за* $s < t \in T_0$ *та задовольняють обернені рівняння Колмогорова*

$$-\frac{\partial}{\partial s}p_{ij}(s,t) = \sum\nolimits_k a_{ik}(s)p_{kj}(s,t)$$

з початковою умовою

$$\lim\nolimits_{s\uparrow t} p_{ij}(s,t) = \delta_{ij}.$$

Доведення спирається на таку лему.

Лема. *В умовах теореми при кожних* $i \in E, s \in T_0$ *ряд*

$$\sum\nolimits_j (p_{ij}(u,v)-\delta_{ij})/(v-u) - a_{ij}(s))$$

збігається до нуля рівномірно за u,v *при* $u < s < v,\ v-u \downarrow 0$.

Доведення

Нехай $N > i$. Тоді

$$\sum\nolimits_{j>N} |(p_{ij}(u,v)-\delta_{ij})/(v-u) - a_{ij}(s)| \leq$$

$$\sum\nolimits_{j>N} |(p_{ij}(u,v)-\delta_{ij})/(v-u)| + \sum\nolimits_{j>N} |a_{ij}(s)| =$$

$$\sum\nolimits_{j>N} (p_{ij}(u,v)-\delta_{ij}))/(v-u) + \sum\nolimits_{j>N} a_{ij}(s) =$$

$$-\sum\nolimits_{j\leq N} (p_{ij}(u,v)-\delta_{ij}))/(v-u) + \sum\nolimits_{j>N} a_{ij}(s) =$$

$$-\sum\nolimits_{j\leq N} ((p_{ij}(u,v)-\delta_{ij})/(v-u) - a_{ij}(s)) + 2\sum\nolimits_{j>N} a_{ij}(s).$$

Звідси з означення (A) виводимо, що

$$\overline{\lim}_{s\uparrow u, t\downarrow u} \sum\nolimits_{j>N} |p_{ij}(u,v)-\delta_{ij})/(v-u) - a_{ij}(s)| \leq$$

$$0 + 2\sum\nolimits_{j>N} a_{ij}(s) \to 0,\ N \to \infty\ \boxdot$$

Для **доведення теореми** залишилося перейти до границі $u \uparrow s, v \downarrow s$ при $s < t \in T_0$ у тотожності

$$(p_{ij}(u,t)-p_{ij}(v,t))/(u-v) + \sum\nolimits_k a_{ik}(s)p_{kj}(s,t) =$$

$$\sum_k (p_{ik}(u,v) - \delta_{ik}) p_{kj}(v,t)/(u-v) + \sum_k a_{ik}(s) p_{kj}(s,t) =$$
$$-\sum_k ((p_{ik}(u,v) - \delta_{ik})/(v-u) - a_{ik}(s)) p_{kj}(u,t) +$$
$$\sum_k a_{ik}(s)(p_{kj}(s,t) - p_{kj}(u,t)).$$

Внаслідок леми та обмеженості $p_{kj}(u,t)$ перший доданок прямує до нуля при $u \uparrow s, v \downarrow s$, а границя другого дорівнює нулю, оскільки

$$|p_{kj}(s,t) - p_{kj}(u,t)| = \left| \sum_l (p_{kl}(s,u) - \delta_{kl}) p_{lj}(u,t) \right| \leq$$
$$\sum_l |p_{kl}(s,u) - \delta_{kl}| = 2(1 - p_{kk}(s,u)) \to 0, \ u \uparrow s \ \boxdot$$

1.2.2 Рівняння Колмогорова для скінчених процесів

Припустимо, що $|E| = N < \infty$.

Нехай $(p_{ij}(s,t), i, j \in E)_{s \leq t \in T}$ – марковський процес у широкому розумінні, та $(P_{st}, s \leq t \in T)$ – породжені ним матриці.

Визначимо для $C = (C_{ij}, i, j \in E)$ матричну норму

$$\|C\| = \sum_i \sum_j |C_{ij}|.$$

Розглянемо при $s < t$ функцію

$$\rho(s,t) = \|I - P_{st}\|/2 = \sum_i (1 - p_{ii}(s,t)).$$

Лема. *Функція ρ задовольняє при $s < r < t \in T$ нерівності:*

$$(1) \quad \rho(s,t) \leq \rho(s,r) + \rho(r,t),$$
$$(2) \quad \rho(s,t) \geq \rho(s,r) + \rho(r,t)(1 - 2\rho(s,r)).$$

Доведення

(1) Оскільки $\|QP\| \leq \|Q\|$ для стохастичної матриці P, то

$$2\rho(s,t) = \|I - P_{st}\| = \|I - P_{sr}P_{rt}\| = \|(I - P_{sr})P_{rt} + I - P_{rt}\| \leq$$
$$\|(I - P_{sr})P_{rt}\| + \|I - P_{rt}\| \leq \|I - P_{sr}\| + \|I - P_{rt}\| =$$
$$2\rho(s,r) + 2\rho(r,t).$$

(2) З рівнянь Колмогорова-Чепмена виводимо:

$$1 - p_{ii}(s,t) = 1 - \sum_k p_{ik}(s,r) p_{ki}(r,t) =$$
$$1 - p_{ii}(s,r) + 1 - p_{ii}(r,t) - (1 - p_{ii}(s,r))(1 - p_{ii}(r,t)) -$$
$$\sum_{k \neq i} p_{ik}(s,r) p_{ki}(r,t),$$

звідки отримуємо шукане:

$$\rho(s,t) = \sum_i (1 - p_{ii}(s,t)) \geq \rho(s,r) + \rho(r,t) - \rho(s,r)\rho(r,t) -$$

$$\sum_i \sum_{k\neq i} p_{ik}(s,r)p_{ki}(r,t) \geq$$
$$\rho(s,r)+\rho(r,t)-\rho(s,r)\rho(r,t)-\sum_i \sum_{k\neq i} p_{ik}(s,r)\sum_{j\neq k} p_{kj}(r,t) =$$
$$\rho(s,r)+\rho(r,t)-\rho(s,r)\rho(r,t)-\rho(s,r)\rho(r,t) \boxdot$$

Теорема. *Нехай процес є стохастично неперервним, тобто:*

$$\sup_{s,t\in T:\ s<t<s+\delta} \max_{i\in E}(1-p_{ii}(s,t)) \to 0,\ \delta \downarrow 0.$$

Тоді:

(а) знайдеться скінченна міра λ на $\mathfrak{B}(T)$ така, що при $t > s \in T_0$ функції $p_{ij}(s,\cdot)$ абсолютно неперервні відносно λ,

(б) для деякої борелевої матричної функції $A_t, t > s$, майже для всіх $t > s$ виконуються прямі рівняння Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial\lambda(t)} P_{st} = P_{st}A_t,$$

(в) єдиний розв'язок цих рівнянь задається сумою рівномірно збіжного ряду

$$P_{st} = I + \sum_{n\geq 1} \int_s^t A_{t_1}\lambda(dt_1) \int_{t_1}^t A_{t_2}\lambda(dt_2) ... \int_{t_{n-1}}^t A_{t_n}\lambda(dt_n).$$

(г) він одночасно задовольняє обернені рівняння Колмогорова,

(д) цей розв'язок є марковським процесом у широкому розумінні.

Доведення

Визначимо при $\delta > 0$ покажчик

$$\varepsilon(\delta) = \sup_{s<t\in T, |t-s|<\delta} \|I - P_{st}\|/2 = \sup_{s<t\in T, |t-s|<\delta} \rho(s,t).$$

За умовою теореми $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

(а) Оберемо сталу $a > 0$ так, щоб $\varepsilon(2a) < 1/3$.

Визначимо на $\mathfrak{B}(T)$ міру λ при $n \geq 0$ та $t_n = t_0 + na$ за монотонно неспадною функцією

$$\lambda([t_n, t_n + r)) = \rho(t_n, t_n + r),\ r \in [0, a].$$

Монотонність правої частини за r та невід'ємність міри λ випливає з такої нерівності при $u < v < u + a$:

$$\rho(u,v) \leq 3\lambda([u,v)).$$

Для її доведення припустимо, що $t_n \leq u < v \leq t_{n+1}$ для деякого n, тоді за означенням a і $\varepsilon(\delta)$ та за нерівністю (2) леми

$$\rho(u,v)/3 \leq \rho(u,v)(1 - 2\rho(t_n,u)) \leq \rho(t_n,v) - \rho(t_n,u) = \lambda([u,v)).$$

Якщо ж $t_{n-1} \leq u \leq t_n \leq v \leq t_{n+1}$, то

$$\rho(u,v) \leq \rho(u,t_n) + \rho(t_n,v) \leq 3\lambda([u,t_n)) + 3\lambda([t_n,v)) = 3\lambda([u,v)).$$

за нерівністю (1) леми та попередньою нерівністю.

Нехай $t > s \in T_0$, та $0 < h < a$. Оскільки для стохастичної матриці P має місце нерівність $\|PQ\| \leq N \|Q\|$, то

$$\|P_{s,t+h} - P_{st}\| = \|P_{st}(P_{t,t+h} - I)\| \leq N \|P_{t,t+h} - I\| = 2N\rho(t, t+h) \leq$$

$$6N\lambda([t, t+h)).$$

(б) Звідси випливає, що кожна з функцій $p_{ij}(s, \cdot)$ має обмежену варіацію та абсолютно неперервна відносно міри λ, тому для майже всіх t існує границя

$$C_{st} \equiv \lim\nolimits_{h\downarrow 0}(P_{s,t+h} - P_{st})/(\lambda([t, t+h)).$$

Оскільки $\|I - P_{st}\| \leq 2/3 < 1$ при $t - s \leq a$, то оператор $P_{st} = I - (I - P_{st})$ має рівномірно обмежений обернений оператор P_{st}^{-1} при $t - s \leq a$. Тому при майже всіх $t \in (t_n, t_{n+1})$ існує також границя

$$A_t \equiv P_{t_n,t}^{-1} \lim\nolimits_{h\downarrow 0}(P_{t_n,t+h} - P_{t_n,t})/(\lambda([t, t+h)) =$$

$$\lim\nolimits_{h\downarrow 0}(P_{t,t+h} - I)/(\lambda([t, t+h)).$$

Внаслідок обмеженості P_{st}

$$\frac{\partial}{\partial\lambda(t)} P_{st} = \lim\nolimits_{h\downarrow 0}(P_{s,t+h} - P_{st})/(\lambda([t, t+h)) =$$

$$P_{st} \lim\nolimits_{h\downarrow 0}(P_{t,t+h} - I)/(\lambda([t, t+h)) = P_{st}A_t.$$

Зображення (в) виводиться інтегруванням рівняння (б) та послідовними ітераціями з урахуванням властивостей рівнянь Вольтерра з обмеженими функціями

$$P_{st} = I + \int_s^t P_{su}A_u\lambda(du).$$

Рівномірна збіжність ряду у (в) є наслідком обмеженості, за якою n-й доданок у сумі не перевищує $C(D)^n/n!$

Диференціюванням за s наведеного рівняння Вольтерра виводимо твердження (г)

З останнього рівняння при $t > r > s$ виводимо, що функція P_{st} є розв'язком при $t \geq r$ рівняння Вольтерра

$$P_{st} = P_{sr} + \int_r^t P_{su}A_u\lambda(du).$$

Множенням рівняння

$$P_{rt} = I + \int_r^t P_{ru}A_u\lambda(du)$$

на P_{sr} переконуємося, що попередні рівняння задовольняє також функція $P^*_{st} = P_{sr}P_{rt}$. Тому з доведеної єдиності розв'язку рівнянь Вольтерра виводимо рівняння Колмогорова-Чепмена $P_{st} = P_{sr}P_{rt}$ $\boxdot$

1.2.3 Невиродженість перехідних імовірностей

Припустимо, що $|E| = N < \infty$ та

$$\|I - P_{st}\| = O(t-s),\ t-s \to 0.$$

Тоді міра λ з попереднього розділу абсолютно неперервна відносно міри Лебега. Оскільки доведення у цьому розділі містять виключно умови щодо абсолютної неперервності певних функцій відносно λ, то можна вважати, що λ збігається з мірою Лебега.

Тому інфінітезимальна матриця дорівнює

$$A_t = (a_{ij}(t)) \equiv \lim_{h\downarrow 0}(P_{t,t+h} - I)/h,$$

задовольняє умову консервативності

$$a_i(t) \equiv -a_{ii}(t) = \sum\nolimits_{j\neq i} a_{ij}(t),$$

та мають місце прямі рівняння Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{st} = P_{st}A_t, \quad P_{st} \to I, t\downarrow s.$$

Теорема. *Справедлива тотожність*

$$\det(P_{st}) = \exp\left(-\int_s^t a(v)dv\right) > 0,$$

де $a(v) = \sum_{i\in E} a_i(v)$.

Доведення. Позначимо для фіксованого s вектор-стовпчик $p_j(t) = (p_{ij}(s,t), i\in E)$. Тоді $P_{st} = (p_1(t), ..., p_N(t))$. Тому за правилом диференціювання визначника та внаслідок рівнянь Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t}\det(P_{st}) = \sum\nolimits_{k=1}^N \det(p_1(t), ..., p_{k-1}(t), \frac{\partial}{\partial t}p_k(t), ..., p_N(t)) =$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^N \det(p_1(t), ..., -p_k(t)a_k(t) + \sum\nolimits_{j\neq k} p_j(t)a_j(t), ..., p_N(t)) =$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^N \det(p_1(t), ..., p_{k-1}(t), -p_k(t)a_k(t), ..., p_N(t)) =$$

$$-\sum\nolimits_{k=1}^N a_k(t)\det(P_{st}) = -\alpha(t)\det(P_{st}).$$

Оскільки $P_{ss} = I$, звідси інтегруванням отримуємо шукане $\boxdot$

1.3 Стрибкоподібні процеси

Траєкторія стрибкоподібного процесу є кусково-сталою, що і мотивує назву.

Припустимо, що одноточкові множини є вимірними: $\{x\} \in \mathfrak{E}$, а функція $P(s,x,t,\{x\})$ є вимірною за x.

Означення. *Марковський процес у широкому розумінні називається* ***регулярним стрибкоподібним,*** *якщо для всіх* $s \in T$, $x \in E$, $B \in \mathfrak{E}$, *існує скінченна границя*

$$\lim_{t \to s}(P(s,x,t,B) - 1\!\!\mathrm{I}_{x \in B})/(t-s) = A_s(x,B),$$

що є рівномірною за $s \in T$, $x \in E, B \in \mathfrak{E}$, *причому граничина функція неперервна за* s *рівномірно за* s, x, B.

Внаслідок рівномірності границі функція $A_s(x,B)$ при кожному s є ***перехідним ядром,*** тобто для всіх $B \in \mathfrak{E}$ вона є $\mathfrak{E}$-вимірною за x та при кожному x є сигма-адитивною мірою як функція $B \in \mathfrak{E}$ – оскільки рівномірна границя зберігає вимірність, адитивність та неперервність у нулі.

За означенням мають місце такі властивості ядра A_s:

$$(1)\ A_s(x,E) = 0,\ (2)\ A_s(x,B) \ge 0,\ \forall x \notin B,\ (3)\ A_s(x,\{x\}) \le 0. \qquad \text{(A)}$$

З вимірності $P(s,x,t,\{x\})$ виводимо вимірність функцій $A_s(x,\{x\})$.

Визначимо вимірну функцію $\alpha_s(x) = A_s(x, E\backslash\{x\}) = -A_s(x,\{x\})$, та перехідне ядро $\alpha_s(x,B) = A_s(x, B\backslash\{x\})$.

Зауважимо, що за означенням

$$\alpha_s(x,B) \ge 0,\ \alpha_s(x,E) = \alpha_s(x),\ \alpha_s(x,\{x\}) = 0,$$
$$\alpha_.(x),\ \alpha_.(x,B) \in C_b(T),\ \text{рівномірно за}\ \ x, B. \qquad \text{(a)}$$

Внаслідок рівномірної неперервності коректно визначені інтеграли від наведених функції за часовим аргументом s як інтеграли Рімана.

З означення та рівності $B = (B\backslash\{x\}) \cup \{x\}$ при $x \in B$ виводимо зображення

$$A_s(x,B) = \alpha_s(x,B) - \alpha_s(x) 1\!\!\mathrm{I}_{x \in B},\ \forall x \in E, B \in \mathfrak{E}. \qquad \text{(Aa)}$$

Перевіркою встановлюємо, що дане зображення необхідне та достатнє для справедливості наведених вище властивостей (A) ядра $A_s(x,B)$.

Далі, внаслідок рівномірної неперервності функції $\alpha_s(x)$ за аргументом $s \in T$ на компакті T при кожному x вона є обмеженою за s, а з рівномірності вказаної неперервності за x ця функція рівномірно обмежена за s та x. Тому

$$\sup_{s \in T,\ x \in E,\ B \in \mathfrak{E}} |A_s(x,B)| \le \sup_{s \in T,\ x \in E,\ B \in \mathfrak{E}} \alpha_s(x,B) =$$
$$\sup_{s \in T,\ x \in E} \alpha_s(x) < \infty.$$

Визначимо $\delta(x,B) = 1\!\!1_{x\in B}$ – одиничний оператор у просторах $\mathfrak{N}$ та $\mathfrak{M}$. Розглянемо при $u < s < v$ залишок

$$\Delta_s(u,x,v,B) = P(u,x,v,B) - \delta(x,B) - (v-u)A_s(x,B).$$

За означенням регулярного стрибкоподібного процесу при $u \uparrow s, v \downarrow s$ виконуються зображення

$$\Delta_s(u,x,v,B) = o(v-u),\ v-u \to 0,$$

$$P(u,x,v,B) - \delta(x,B) = O(v-u),\ v-u \to 0,$$

де $o()$ та $O()$ є рівномірними за v,u,x,B внаслідок означення та обмеженості $A_s(x,B)$.

1.3.1 Обернені рівняння

Достатні умови

Теорема. *Для марковського регулярного стрибкоподібного процесу має місце рівність $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{N}$, при $t \in T_0$ перехідні ймовірності $P(s,x,t,B)$ є диференційовними за $s < t$ та задовольняють обернені рівняння Колмогорова при $x \in E, B \in \mathfrak{E}$*

$$-\frac{\partial}{\partial s}P(s,x,t,B) = -a_s(x)P(s,x,t,B) + \int_E \alpha_s(x,dy)P(s,y,t,B)$$

з початковою умовою

$$\lim_{s\uparrow t} P(s,x,t,B) = 1\!\!1_{x\in B}.$$

Доведення

Зафіксуємо $t \in T_0$.

Нехай $f \in \mathfrak{N}$. Розглянемо обмежені вимірні функції

$$f_s(x) = \int_E P(s,x,t,dy)f(y).$$

При $u < s < v < t$ з рівнянь Колмогорова-Чепмена отримуємо

$$f_u(x) - f_v(x) = \int_E [P(u,x,v,dy) - \delta(x,dy)]f_v(y).$$

З наведених вище зображення для $P(u,x,v,B)$ і рівнянь для f_u виводимо

$$f_u(x) - f_v(x) = (v-u)\int_E A_s(x,dy)f_v(y) + \int_E \Delta_s(u,x,v,dy)f_v(y).$$

Тут

$$\left|\int_E \Delta_s(u,x,v,dy)f_v(y)\right| \le \sup\nolimits_{x,B} |\Delta_s(u,x,v,B)| \sup\nolimits_{v,y} |f_v(y)| = o(v-u)$$

при $v-u\to 0$, рівномірно за u,v.

Оскільки при $v>s$

$$|f_v(y)-f_s(y)|\le \sup_{x,B}|P(u,x,v,B)-\delta(x,B)|\sup_{v,y}|f_v(y)|=O(v-s),$$

рівномірно за v,s,y при $v-s\to 0$, то внаслідок обмеженості A_s

$$\left|\int_E A_s(x,dy)(f_v(y)-f_s(y))\right|\le$$

$$\sup_{s,x,B}|A_s(x,B)|\sup_y|f_v(y)-f_s(y)|=O(v-s),v\to s.$$

Отже,

$$-\frac{\partial}{\partial s}f_s(x)=\lim_{u\uparrow s,v\downarrow s}(f_u(x)-f_v(x))/(v-u)=\int_E A_s(x,dy)f_s(y)=$$

$$-a_s(x)f_s(x)+\int_E a_s(x,dy)f_s(y).$$

Вибором для заданого $B\in\mathfrak{E}$ функції $f(x)=\delta(x,B)$ отримуємо рівність $f_s(x)=P(s,x,t,B)$ та виводимо твердження теореми з останніх рівнянь $\boxdot$

Єдиність та обчислення

Теорема. *Нехай функція $\alpha_t(x)$ та ядро $\alpha_t(x,B)$ задовольняють наведені вище умови (а).*

(1) Тоді обернені рівняння Колмогорова мають єдиний розв'язок $P(s,x,t,B)$.

(2) Цей розв'язок є марковським регулярним стрибкоподібним процесом та може бути знайдений методом послідовних наближень:

$$P(s,x,t,B)=\sum\nolimits_{n\ge 0}P^{(n)}(s,x,t,B),$$

$$P^{(0)}(s,x,t,B)=p_x(s,t)\mathbb{1}_{x\in B},$$

$$P^{(n+1)}(s,x,t,B)=\int_s^t du\int_E p_x(s,u)\alpha_u(x,dy)P^{(n)}(u,y,t,B),$$

де

$$p_x(s,t)\equiv\exp\left(-\int_s^t\alpha_v(x)dv\right).$$

Доведення

(1) Розглянемо лінійний банахів простір неперервних за t функцій

$$\mathfrak{N}(T)=\left\{\overline{f}=(f_t,t\in T):f_t\in\mathfrak{N},\|f_t-f_s\|\to 0,t\to s\right\}$$

з нормою

$$\|(f_t)\|_T=\sup_{t\in T}\|f_t\|.$$

Нехай $f \in \mathfrak{N}$ та як і вище

$$f_s(x) = \int_E P(s, x, t, dy) f(y), \;\; s \le t.$$

Визначимо $\overline{g} = (g_s) \in \mathfrak{N}(T)$ рівністю

$$g_s(x) = \exp\left(\int_s^t \alpha_v(x) dv\right) f_s(x).$$

Оскільки функції $f_s(x)$ диференційовні за s та задовольняють рівняння, що наведені у попередньому підрозділі, то

$$\frac{\partial}{\partial s} g_s(x) = -\alpha_s(x) \exp\left(\int_s^t \alpha_v(x) dv\right) f_s(x) +$$

$$\exp\left(\int_s^t \alpha_v(x) dv\right) [a_s(x) f_s(x) - \int_E a_s(x, dy) f_s(y)] =$$

$$- \exp\left(\int_s^t \alpha_v(x) dv\right) \int_E a_s(x, dy) f_s(y) =$$

$$- \int_E \beta_s(x, dy) g_s(y),$$

де

$$\beta_s(x, B) = \int_B \exp\left(\int_s^t (\alpha_v(x) - a_v(y)) dv\right) \alpha_s(x, dy).$$

Зауважимо, що функції $\beta_s(x, B)$ рівномірно обмежені за $s \in T$, $x \in E$, $B \in \mathfrak{E}$:

$$\beta_s(x, B) \le \beta(T) \equiv \exp(|T| \sup_{u \in T, x \in E} \alpha_u(x)) \sup_{t \in T, x \in E} \alpha_t(x) < \infty.$$

Інтегруванням останнього рівняння за s з урахуванням крайової умови $g_t(x) = f_t(x) = f(x)$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра, що еквівалентне наведеному вище диференціальному рівнянню Колмогорова для $g_s(x)$:

$$g_s(x) = f(x) + \int_s^t du \int_E \beta_u(x, dy) g_u(y), \;\; s \le t.$$

Розглянемо лінійний обмежений оператор $Q : \mathfrak{N}(T) \to \mathfrak{N}(T)$, що діє при $s \le t = t_1$ за формулою

$$(Q\overline{g})_s(x) = \int_s^t du \int_E \beta_u(x, dy) g_u(y).$$

Рівномірна неперервність та обмеженість $Q\overline{g}$ випливає з обмеженості ядра $\beta_u(x, dy)$ та його рівномірної неперервності за $u \in T$.

Методом ітерування (послідовних наближень) з наведеного рівняння Вольтерра виводимо при $n \geq 1$ рівняння

$$\overline{g} = \overline{f} + Q\overline{f} + Q^2\overline{f} + ... + Q^{n-1}\overline{f} + Q^n\overline{g},$$

де $\overline{f} = (f, s \leq t)$.

З означення Q отримуємо зображення для n-го степеня

$$(Q^n\overline{g})_s(x) =$$

$$\int_s^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 ... \int_{u_{n-1}}^t du_n \int_E \beta_{u_1}(x, dx_1) ... \int_E \beta_{u_n}(x_{n-1}, dx_n) g_{u_n}(x_n).$$

Тому за означенням норми $\|\|_T$ та сталої $\beta(T)$

$$\|Q^n\overline{g}\|_T \leq \|\overline{g}\|_T \ \beta^n(T) \int_s^t du_1 \int_{u_1}^t du_2 ... \int_{u_{n-1}}^t du_n \leq$$

$$\|\overline{g}\|_T \ \beta^n(T) \left|T\right|^n / n! \to 0, n \to \infty.$$

Отже, для деякого n операторна норма задовольняє нерівність

$$|||Q^n||| = \sup(\|Q^n\overline{g}\|_T : \|\overline{g}\|_T \leq 1) < 1$$

і оператор Q^n є стискаючим на $\mathfrak{N}(T)$.

Тому існування та єдиність розв'язку обернених рівнянь Колмогорова випливає з теореми про нерухому точку для стискаючого оператора Q^n.

За цією ж теоремою вказаний розв'язок є сумою сильно збіжного ряду Неймана

$$\overline{g} = \sum\nolimits_{k \geq 0} (\overline{f} + Q\overline{f} + Q^2\overline{f} + ... + Q^{n-1}\overline{f})(Q^n)^k = \sum\nolimits_{k \geq 0} Q^k\overline{f}.$$

Частинні суми останнього ряду можна обчислити рекурентно з системи рівнянь

$$h_s^{(0)}(x) = f(x),$$

$$h_s^{(n+1)}(x) = \int_s^t du \int_E \beta_u(x, dy) h_u^{(n)}(y),$$

$$g_s^{(n)}(x) = \sum\nolimits_{k=0}^n h_s^{(k)}(x).$$

Зі збіжності ряду Неймана виводимо, що

$$g_s(x) = \lim\nolimits_{n \to \infty} g_s^{(n)}(x) = \sum\nolimits_{k=0}^\infty h_s^{(k)}(x),$$

рівномірно за s, x.

Остаточно за означенням g_s обчислюємо

$$f_s(x) = \exp\left(- \int_s^t \alpha_v(x) dv \right) g_s(x) = p_x(s, t) g_s(x).$$

Множенням на $p_x(s,t)$ аналогічну рекурентну систему можна записати для функцій, що наближують $f_s(x)$:

$$q_s^{(0)}(x) = p_x(s,t)f(x),$$
$$q_s^{(n+1)}(x) = \int_s^t du \int_E p_x(s,u)\alpha_u(x,dy)q_u^{(n)}(y),$$
$$f_s^{(n)}(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} q_s^{(k)}(x),$$
$$f_s(x) = \lim\nolimits_{n\to\infty} f_s^{(n)}(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} q_s^{(k)}(x)$$

рівномірно за s, x.

Зауважимо, що за припущення невід'ємності: $f \geq 0$ послідовність $f_s^{(n)}(x)$ не спадає за n. Дійсно, у цьому випадку за індукцією виводимо, що $q_s^{(n)}(x) \geq 0$ внаслідок невід'ємності ядра $\alpha_u(x,dy)$.

(2) Зокрема, вибором $f(x) = 1\!\!1_{x\in B}$ для фіксованої $B \in \mathfrak{E}$ отримуємо $f_s(x) = P(s,x,t,B)$. Тому має місце монотонна та рівномірна за s,t,x,B збіжність ряду

$$P(s,x,t,B) = \sum\nolimits_{n\geq 0} P^{(n)}(s,x,t,B),$$

де

$$P^{(0)}(s,x,t,B) = p_x(s,t)1\!\!1_{x\in B},$$
$$P^{(n+1)}(s,x,t,B) = \int_s^t du \int_E p_x(s,u)\alpha_u(x,dy)P^{(n)}(u,y,t,B).$$

З рівномірності збіжності виводимо, що $P(s,x,t,B)$ вимірна, є стохастичним перехідним ядром, та задовольняє умови щодо регулярного стрибкоподібного марковського процесу, оскільки

$$\lim\nolimits_{t\to s}(P^{(0)}(s,x,t,B) - 1\!\!1_{x\in B})/(t-s) = -\alpha_s(x)1\!\!1_{x\in B},$$
$$\lim\nolimits_{t\to s} P^{(1)}(s,x,t,B)/(t-s) = \alpha_s(x,B),$$
$$\lim\nolimits_{t\to s} P^{(n)}(s,x,t,B)/(t-s) = 0,\ n > 1.$$

Далі, диференціюванням за s вказаного ряду з урахуванням рівномірності виводимо, що функція $P(s,x,t,B)$ є розв'язком оберненої системи

$$-\frac{\partial}{\partial s}P(s,x,t,B) = \int_E A_s(x,dy)P(s,y,t,B), \quad P(s,x,t,B) \to 1\!\!1_{x\in B}, s\uparrow t,$$

з обмеженим інфінітезимальним оператором A_s, що задовольняє зображення *(Aa)* попереднього розділу.

Нехай $s \leq r < t$. Підставимо у останнє рівняння $t = r$ та проінтегруємо за відповідними мірами від B вимірну функцію $P(r,z,t,C)$ за аргументом z. Отримаємо таке саме рівняння при $s \leq r$ для функції $P^*(s,y,t,C) \equiv \int_E P(s,y,r,dz)P(r,z,t,C)$. Оскільки $P^*(r,y,t,C) =$

$P(r, y, t, C)$, то з доведеної вище єдиності розв'язку виводимо тотожність $P^*(s, y, t, C) = P(s, y, t, C)$ при $s \leq r$. Отже, функція $P(s, x, t, B)$ задовольняє рівняння Колмогорова-Чепмена і є марковським процесом у широкому розумінні $\boxdot$

1.3.2 Прямі рівняння

Достатні умови

Теорема. *Для марковського регулярного стрибкоподібного процесу має місце рівність $\mathfrak{D}(A^*) = \mathfrak{M}$, при $s \in T_0$ перехідні ймовірності $P(s, x, t, B)$ є диференційовними за $t > s$ та задовольняють прямі рівняння Колмогорова при $x \in E, B \in \mathfrak{E}$*

$$\frac{\partial}{\partial t} P(s, x, t, B) = -\int_B P(s, x, t, dy)\alpha_t(y) + \int_E P(s, x, t, dy)\alpha_t(y, B)$$

з початковою умовою

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, B) = \mathbb{1}_{x \in B}.$$

Доведення

Зафіксуємо $s \in T_0$.

Нехай $\mu \in \mathfrak{M}$. Розглянемо обмежену за нормою сім'ю знакозмінних мір вигляду:

$$\mu_t(B) = \int_E \mu(dx) P(s, x, t, B),\ t \geq s.$$

При $v > t > u > s$ з рівнянь Колмогорова-Чепмена отримуємо

$$\mu_v(B) - \mu_u(B) = \int_E \mu_u(dx)[P(u, x, v, B) - \delta(x, B)].$$

З наведених вище зображення для $P(u, x, v, B)$ і рівнянь для μ_u виводимо, що

$$\left|\mu_v(B) - \mu_u(B) - \int_E \mu_t(dx)[P(u, x, v, B) - \delta(x, B)]\right| \leq$$

$$\int_E |P(u, x, v, B) - \delta(x, B)| \, |\mu_u - \mu_t| \, (dx) \leq$$

$$\int_E O(v - u) \, |\mu_u - \mu_t| \, (dx) = o(v - u),$$

при $u \uparrow t, v \downarrow t$, оскільки

$$\int_E |\mu_u - \mu_t| \, (dx) \leq \sup_{B \in \mathfrak{E}} \int_E |\mu_t| \, (dx) \, |P(t, x, u, B) - \delta(x, B)| =$$

$$O(u - t) \to 0,\ u \to t.$$

Тому для всіх $B \in \mathfrak{E}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t(B) = \lim_{u\uparrow t, v\downarrow t}(\mu_v(B) - \mu_u(B))/(v-u) =$$

$$\lim_{u\uparrow t, v\downarrow t}\left(\int_E \mu_t(dx)[P(u,x,v,B) - \delta(x,B)]\right)/(v-u) =$$

$$\lim_{u\uparrow t, v\downarrow t}\left(\int_E \mu_t(dx)[(v-u)A_t(x,B) + o(v-u)]\right)/(v-u) =$$

$$\int_E \mu_t(dx)A_t(x,B) = -\int_B \mu_t(dy)\alpha_t(y) + \int_E \mu_t(dy)\alpha_t(y,B).$$

Вибором для заданого $x \in E$ міри $\mu(B) = \delta(x,B)$ отримуємо $\mu_t(B) = P(s,x,t,B)$ та виводимо твердження теореми з останніх рівнянь $\boxdot$

Єдиність та обчислення

Теорема. *Нехай функція $\alpha_t(x)$ та ядро $\alpha_t(x,B)$ задовольняють наведені вище умови (а).*

(1) Тоді прямі рівняння Колмогорова мають єдиний розв'язок $P(s,x,t,B)$.

(2) Цей розв'язок може бути знайдений методом послідовних наближень та є марковським регулярним стрибкоподібним процесом

Доведення

(1) Розглянемо лінійний простір неперервних мірозначних функцій

$$\mathfrak{M}(T) = \{\overline{\mu} = (\mu_t, t \in T) : \mu_t \in \mathfrak{M}, \|\mu_t - \mu_s\| \to 0, t \to s\}$$

з нормою

$$\|(\mu_t)\|_T = \sup_{t\in T}\|\mu_t\|.$$

Нехай $\mu \in \mathfrak{M}$ та як і вище

$$\mu_t(B) = \int_E \mu(dx)P(s,x,t,B).$$

Визначимо $\overline{\nu} \in \mathfrak{M}(T)$ рівністю

$$\nu_t(B) = \int_B \exp\left(\int_s^t \alpha_v(x)dv\right)\mu_t(dx).$$

Оскільки функції $\mu_t(B)$ диференційовні за t та задовольняють рівняння, що наведені у попередньому підрозділі, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\nu_t(B) = \int_B \alpha_t(x)\exp\left(\int_s^t \alpha_v(x)dv\right)\mu_t(dx) +$$

$$\int_B \exp\left(\int_s^t \alpha_v(x)dv\right)\left[-\mu_t(dx)\alpha_t(x) + \int_E \mu_t(dy)\alpha_t(y,dx)\right] =$$

$$\int_B \exp\left(\int_s^t \alpha_v(x)dv\right) \int_E \exp\left(-\int_s^t \alpha_v(y)dv\right) \nu_t(dy)\alpha_t(y,dx) =$$
$$\int_E \nu_t(dy)\beta_t(y,B),$$
де
$$\beta_t(y,B) = \int_B \exp\left(\int_s^t (\alpha_v(x) - a_v(y))dv\right) \alpha_t(y,dx).$$

Зауважимо, що функції $\beta_t(y,B)$ рівномірно обмеженими за $t \in T$, $y \in E$, $B \in \mathfrak{E}$:

$$\beta_t(y,B) \leq \beta(T) \equiv \exp(|T| \sup_{u\in T, x\in E} \alpha_u(x)) \sup_{t\in T, y\in E} \alpha_t(y) < \infty.$$

Інтегруванням останнього рівняння за t з урахуванням крайової умови $\nu_s(B) = \mu_s(B) = \mu(B)$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтерра

$$\nu_t(B) = \mu(B) + \int_s^t du \int_E \nu_u(dy)\beta_u(y,B).$$

Розглянемо лінійний обмежений оператор $Q : \mathfrak{M}(T) \to \mathfrak{M}(T)$, що діє при $s = t_0$ за формулою

$$(\overline{\nu}Q)_t(B) = \int_s^t du \int_E \nu_u(dy)\beta_u(y,B).$$

Методом ітерування (послідовних наближень) з наведеного рівняння Вольтерра виводимо при $n \geq 1$ рівняння

$$\overline{\nu} = \overline{\mu} + \overline{\mu}Q + \overline{\mu}Q^2 + ... + \overline{\mu}Q^{n-1} + \overline{\nu}Q^n,$$

де $\overline{\mu} = (\mu, t \geq s)$.

З означення Q отримуємо зображення для n-го степеня

$$(\overline{\nu}Q^n)_t(B) =$$
$$\int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2 ... \int_s^{u_{n-1}} du_n \int_E \nu_{u_1}(dy_1)\beta_{u_1}(y_1,dy_2)... \int_E \beta_{u_n}(y_n,B).$$

Тому за означенням норми $\|\|_T$ та сталої $\beta(T)$

$$\|\overline{\nu}Q^n\|_T \leq \|\overline{\nu}\|_T \ \beta^n(T) \int_s^t du_1 \int_s^{u_1} du_2 ... \int_s^{u_{n-1}} du_n \leq$$
$$\|\overline{\nu}\|_T \ \beta^n(T) \, |T|^n /n! \to 0, n \to \infty.$$

Отже, для деякого n операторна норма задовольняє нерівність

$$|||Q^n||| = \sup(\|\overline{\nu}Q^n\|_T : \|\overline{\nu}\|_T \leq 1) < 1$$

для деякого n і оператор Q^n є стискаючим на $\mathfrak{M}(T)$.

Тому існування та єдиність розв'язку рівнянь прямих рівнянь Колмогорова випливає з теореми про нерухому точку при стискаючому відображенні Q^n.

За цією ж теоремою вказаний розв'язок є сумою сильно збіжного ряду Неймана

$$\overline{\nu} = \sum\nolimits_{k\geq 0}(\overline{\mu} + \overline{\mu}Q + \overline{\mu}Q^2 + ... + \overline{\mu}Q^{n-1})(Q^n)^k = \sum\nolimits_{k\geq 0}\overline{\mu}Q^k.$$

Частинні суми останнього ряду можна обчислити рекурентно з системи рівнянь

$$\nu_t^{(0)}(B) = \mu(B),$$
$$\nu_t^{(n+1)}(B) = \int_s^t du \int_E \nu_u^{(n)}(dy)\beta_u(y,B).$$

Зі збіжності ряду Неймана виводимо, що

$$\nu_t(B) = \lim\nolimits_{n\to\infty}\sum\nolimits_{k=0}^{n}\nu_t^{(k)}(B)$$

рівномірно за t, B. Остаточно за означенням ν_t обчислюємо

$$\mu_t(B) = \int_B \exp\left(-\int_s^t \alpha_v(x)dv\right)\nu_t(dx).$$

(2) Властивості $P(s,x,t,B)$ як регулярного стрибкоподібного марковського процесу у широкому розумінні з інфінітезимальним оператором A^* перевіряються вибором $\mu(B) = 1\!\!1_{x\in B}$ для фіксованого x, звідки $\mu_t(B) = P(s,x,t,B)$ $\boxdot$

1.3.3 Стрибкоподібні дискретні процеси

Припустимо, що $E = \{i, j, ...\}$ – дискретний простір.

Тоді перехідна ймовірність має вигляд

$$P(s,i,t,B) = \sum\nolimits_{j\in B} p_{ij}(s,t).$$

Теорема. *Нехай існує рівномірна за i, j, s скінченна границя:*

$$\lim\nolimits_{t\to s}(p_{ij}(s,t) - \delta_{ij})/(t-s) = a_{ij}(s),$$

причому гранична функція рівномірно за $s \in T$, $i, j \in E$ неперервна за s, та задовольняє умову консервативності:

$$-a_{ii}(s) = \sum\nolimits_{j\neq i} a_{ij}(s),$$

з рівномірно збіжним рядом, а функція $a_i(s) \equiv -a_{ii}(s)$.

(1) Тоді марковський процес у широкому розумінні $P(s,i,t,B)$ є регулярним стрибкоподібним, задовольняє пряму систему

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{ij}(s,t) = -p_{ij}(s,t)a_j(t) + \sum\nolimits_{k\neq j} p_{ik}(s,t)a_{kj}(t), \quad p_{ij}(s,t) \to \delta_{ij}, t \downarrow s,$$

та обернену систему рівнянь Колмогорова

$$-\frac{\partial}{\partial s}p_{ij}(s,t) = -a_i(s)p_{ij}(s,t) + \sum\nolimits_{k\neq i} a_{ik}(s)p_{kj}(s,t), \quad p_{ij}(s,t) \to \delta_{ij}, s \uparrow t.$$

(2) Розв'язок цих систем є єдиним, є регулярним стрибкоподібним марковським процесом у широкому розумінні та збігається з рівномірно збіжною сумою ряду

$$P(s,i,t,B) = \sum\nolimits_{n\geq 0} \sum\nolimits_{j\in B} p_{ij}^{(n)}(s,t),$$

де

$$p_{ij}^{(0)}(s,t) = \delta_{ij}p_i(s,t),$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(s,t) = \int_s^t \sum\nolimits_{k\neq i} p_i(s,u)a_{ik}(u)p_{kj}^{(n)}(u,t)du,$$

$$p_i(s,t) \equiv \exp\left(-\int_s^t a_i(v)dv\right).$$

Доведення

(1) Розглянемо для фіксованих i,s послідовності $v_j = a_{ij}(s)$ та $u_j = (p_{ij}(s,t)-\delta_{ij})/(t-s)$. За означенням $u_j \geq 0, v_j \geq 0$ при $j \neq i$ та за умовою $\sum_j u_j = 0 = \sum_j v_j$. Тому

$$\sum\nolimits_j |u_j - v_j| \leq |u_i - v_i| + \sum\nolimits_{j\neq i, j\leq N} |u_j - v_j| +$$

$$\sum\nolimits_{j\neq i, j>N} u_j + \sum\nolimits_{j\neq i, j>N} v_j =$$

$$|u_i - v_i| + \sum\nolimits_{j\neq i, j\leq N} |u_j - v_j| - \sum\nolimits_{j\neq i, j\leq N} u_j - u_i + \sum\nolimits_{j\neq i, j>N} v_j \leq$$

$$|u_i - v_i| + \sum\nolimits_{j\leq N} |u_j - v_j| - \sum\nolimits_{j\neq i, j\leq N} u_j - u_i + \sum\nolimits_{j\neq i, j>N} v_j =$$

$$|u_i - v_i| + \sum\nolimits_{j\leq N} |u_j - v_j| - \sum\nolimits_{j\neq i, j\leq N} (u_j - v_j) - u_i + v_i + 2\sum\nolimits_{j\neq i, j>N} v_j \leq$$

$$2|u_i - v_i| + 2\sum\nolimits_{j\leq N} |u_j - v_j| + 2\sum\nolimits_{j\neq i, j>N} v_j.$$

Отже, для довільної $B \subset E$

$$\left|(P(s,i,t,B) - 1\!\!\mathrm{I}_{i\in B})/(t-s) - \sum\nolimits_{j\in B} a_{ij}(s)\right| \leq$$

$$\sum\nolimits_j |(p_{ij}(s,t) - \delta_{ij})/(t-s) - a_{ij}(s)| \leq$$

$$2\left|(p_{ii}(s,t)-1)/(t-s)-a_{ii}(s)\right|+$$
$$2\sum\nolimits_{j\le N}\left|(p_{ij}(s,t)-\delta_{ij})/(t-s)-a_{ij}(s)\right|+2\sum\nolimits_{j\ne i,j>N}a_{ij}(s).$$

Перший доданок у правій частині прямує до нуля при $t\to s$ рівномірно за s,i. Останній доданок може бути зроблений як завгодно малим вибором N рівномірно за s,i. Нарешті, при заданому N другий доданок прямує до нуля при $t\to s$ рівномірно за s,i. Тому

$$\sup_{s\le t\le s+\varepsilon}\ \sup_{i,B}\left|(P(s,i,t,B)-1\!\!\mathrm{I}_{i\in B})/(t-s)-\sum\nolimits_{j\in B}a_{ij}(s)\right|\to 0,\varepsilon\to 0,$$

і процес є регулярним стрибкоподібним з граничною мірою

$$\alpha(s,i,B)=\sum\nolimits_{j\in B,j\ne i}a_{ij}(s),$$

та функцією

$$\alpha(s,i)=\sum\nolimits_{j\ne i}a_{ij}(s)=a_i(s).$$

(2) Доведення єдиності розв'язку оберненого рівняння та властивості регулярності і стрибкоподібності доведені у розділі про існування та єдиність розв'язку обернених рівнянь Колмогорова для стрибкоподібних процесів. Там же встановлені рівняння Колмогорова-Чепмена та доведене твердження про апроксимацію методом послідовних наближень, де

$$P^{(n+1)}(s,i,t,\{j\})=$$
$$\int_s^t du\int_E p_i(s,u)\alpha_u(i,dy)P^{(n)}(u,y,t,\{j\})=$$
$$\int_s^t\sum\nolimits_{k\ne i}p_i(s,u)a_{ik}(u)p_{kj}^{(n)}(u,t)du\ \boxdot$$

1.4 Неоднорідні процеси Маркова

Марковський процес у точному розумінні має бути випадковим процесом, тобто включати у своє означення відповідні траєкторії - випадкові функції.

1.4.1 Означення та побудова

Означення. Марковським процесом *називається система об'єктів:*

(1) часовий інтервал $T\subset\mathbb{R}_+$,

(2) вимірний простір $(E,\mathfrak{E})$ *– фазовий простір процесу такий, що* $\{x\}\in\mathfrak{E}$ *при* $x\in E$,

(3) імовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ *з* σ*-алгебрами* $(\mathfrak{F}_s^t, s \le t \in T) \subset \mathfrak{F}$ *такими, що* $\mathfrak{F}_s^t \subset \mathfrak{F}_u^v$ *при* $(s,t) \subset (u,v)$,

(4) імовірнісні розподіли P_{sx} *на* $\mathfrak{F}_s \equiv \sigma[\cup_{t \ge s} \mathfrak{F}_s^t]$ *для* $s \in T, x \in E$,

(5) для кожних $s \in T_0$, *та* $x \in E$ *функція* $\zeta_t(\omega) = \zeta_t^{(s,x)}(\omega), t \ge s :$ $\Omega \to E$, *що є вимірною відносно сигма-алгебри* $\mathfrak{F}_s^t$,

які задовольняють наступні умови:

(a) для всіх $s \le t \in T$ *перехідна функція*

$$P(s,x,t,B) \equiv P_{sx}(\zeta_t \in B), \ x \in E, B \in \mathfrak{E},$$

є стохастичним ядром від $(x,B) \in E \times \mathfrak{E}$, *тобто вимірна за* x *та є ймовірністю за* B,

(б) $P(t,x,t,B) = 1\!\!1_{x \in B}$, $t \in T$,

(в) для всіх $s \le r \le t \in T$ *та* $(x,B) \in E \times \mathfrak{E}$

$$P_{sx}(\zeta_t \in B \mid \mathfrak{F}_s^r) = P_{r,\zeta_r}(\zeta_t \in B) \text{ м.н.}$$

Надалі символом $E_{sx}\xi$ для $\mathfrak{F}_s$-вимірної величини ξ будемо позначати інтеграл $E_{sx}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P_{st}(d\omega)$.

З наведеного означення випливає, що набір $(T,(E,\mathfrak{E}),P(s,x,t,B))$ є марковським процесом у широкому розумінні. Дійсно, внаслідок марковської властивості для всіх $s < r < t \in T$

$$P(s,x,t,B) = E_{sx} 1\!\!1_{\zeta_t \in B} = E_{sx} E_{sx}(1\!\!1_{\zeta_t \in B} \mid \mathfrak{F}_s^r) =$$
$$E_{sx} P_{sx}(\zeta_t \in B \mid \mathfrak{F}_s^r) = E_{sx} P_{r,\zeta_r}(\zeta_t \in B) = E_{sx} P(r,\zeta_r,t,B) =$$
$$\int_E P(s,x,r,dy) P(r,y,t,B).$$

Виникає питання: коли за марковським процесом у широкому розумінні $(T,(E,\mathfrak{E}),P(s,x,t,B))$ можна побудувати марковський процес ?

Означення. *Законом входу для процесу* $(T,(E,\mathfrak{E}),P(s,x,t,B))$ *називається сім'я ймовірнісних розподілів* $(q_t(B), t \in T, B \in \mathfrak{E})$ *така, що при* $s < t \in T$

$$q_t(B) = \int_E q_s(dx) P(s,x,t,B).$$

Теорема. *Нехай* $(E,\mathfrak{E})$ *– польський простір з борелевою сигма-алгеброю,* $(T,(E,\mathfrak{E}),P(s,x,t,B))$ *– марковський процес у широкому розумінні з законом входу* $(q_t(B), t \in T, B \in \mathfrak{E})$.

Тоді на просторі $\Omega = E^T$ *існує марковський процес з перехідною функцією* $P(s,x,t,B)$ *такий, що* $\mathbf{P}(\zeta_t \in B) = q_t(B)$.

Доведення теореми спирається на теорему Колмогорова про побудову міри на $\mathbb{R}^\infty$. Значення міри $\mathbf{P}$ на циліндричних множинах задаються рівністю

$$\mathbf{P}(\zeta_{t_1} \in B_1, \zeta_{t_2} \in B_2, ..., \zeta_{t_n} \in B_n) =$$

$$\int_{B_1} q_{t_1}(dx_1) \int_{B_2} P(t_1, x_1, t_1, dx_2) ... \int_{B_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \boxdot$$

1.4.2 Строго марковські процеси

Нехай для даного $s \in T_0$ $((\zeta_t, t \geq s), \mathfrak{F}_s^t, P_{sx})$ – марковський процес, а $T_s = T \cap [s, \infty)$.

Означення. *Марковським моментом для даного процесу називається випадкова величина τ зі значеннями у множині $T_s \cup \{\infty\}$ така, що $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_s^t$ для всіх $t \geq s$. Моментом зупинки називається скінчений м.н. марковський момент.*

Означення. *Сигма-алгеброю подій, що передують марковському моменту τ, називається клас*

$$\mathfrak{F}_s^\tau = \{A \in \mathfrak{F}_s : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_s^t, \ \forall t \geq s\}.$$

Теорема. *Нехай $(E, \mathfrak{E})$ – метричний простір з берівською сигма-алгеброю, траєкторії марковського процесу $(\zeta_t, t \geq s)$ неперервні справа, а τ – момент зупинки.*

Тоді функція

$$\zeta_{\tau(\omega)}(\omega) \equiv \sum\nolimits_{n \geq 0} \zeta_n(\omega) 1\!\!1_{\tau(\omega)=n}$$

є випадковою величиною та є $\mathfrak{F}_s^\tau$-вимірною.

Доведення випливає з тотожності для довільної неперервної обмеженої функції g :

$$g(\zeta_\tau) = \lim\nolimits_{n \to \infty} \sum\nolimits_{k: t_{kn} \in T_s} g(\zeta_{t_{kn}}) 1\!\!1_{t_{k-1,n} < \tau \leq t_{kn}},$$

де $t_{kn} = k2^{-n}$, причому доданки у сумі є $\mathfrak{F}_s^\tau$-вимірними $\boxdot$

Означення. *Марковський процес $((\zeta_t, t \geq s), \mathfrak{F}_s^t, P_{sx})$ називається строго марковським, якщо для довільного моменту зупинки $\tau \in T_s$ величина ζ_τ є $\mathfrak{F}_s^\tau$-вимірною та для всіх $t \geq 0$, $(x, B) \in E \times \mathfrak{E}$*

$$P_{sx}(\zeta_{t+\tau} \in B \mid \mathfrak{F}_s^\tau) = P_{\tau, \zeta_\tau}(\zeta_t \in B) \text{ м.н.}$$

Теорема. *Нехай $(E, \mathfrak{E})$ – метричний простір з берівською сигма-алгеброю, траєкторії марковського процесу $(\zeta_t, t \geq s)$ неперервні справа, причому для довільної $g \in C_b(T \times E)$ функція*

$$R_\lambda g(s, x) = \int_s^\infty \exp(-\lambda t) dt \int_E P(s, x, t, dy) g(t, y)$$

неперервна за x та неперервна справа за s.

Тоді даний процес є строго марковським.

Доведення, як і для попередньої теореми, спирається на апроксимацію моменту τ величинами t_{kn}.

Зокрема, всі стохастично неперервні та неперервні справа дискретні марковські процеси є строго марковськими.

1.4.3 Моменти перебування стрибкоподібного процесу та вкладений ланцюг Маркова

На відміну від попереднього, будемо розглядати також процеси, що задані на часовому інтервалі $T = [t_0, \infty)$. Для справедливості в цьому випадку наведених вище тверджень слід припустити, що відповідні умови справджуються для кожного інтервалу $[t_0, t]$ з $t > t_0$.

Нехай простір $E = \{i, j, ...\}$ є дискретним, а $((\zeta_t, t \geq s), \mathfrak{F}_s^t, P_{sx})$ – регулярний стрибкоподібний марковський процес, що має неперервні справа траєкторії.

Позначимо через $(a_{ij}(s), i, j \in E)$ відповідні елементи інфінітезимальної матриці A_s, що є неперервними функціями від $s \in T = [t_0, t_1]$ та задовольняють умови

$$a_i(s) \equiv -a_{ii}(s) \geq 0,\ a_{ij}(s) \geq 0, i \neq j,\ a_i(s) = \sum\nolimits_{j \neq i} a_{ij}(s). \qquad \text{(a)}$$

Нагадаємо, що з означення стрибкоподібного процесу випливає обмеженість

$$\sup\nolimits_{s,i} a_i(s) < \infty.$$

Визначимо при $s \in T_0$ такі марковські моменти – *моменти стрибків* процесу:

$$\tau_1 = \inf(t > s, t \in T : \zeta_t \neq \zeta_s),$$

$$\tau_k = \inf(t > \tau_{k-1}, t \in T : \zeta_t \neq \zeta_{\tau_{k-1}}),\ k > 1,$$

де за означенням $\inf \varnothing = \infty$.

Теорема. *Для неперервного справа регулярного стрибкоподібного дискретного марковського процесу послідовність випадкових величин* $(\tau_k, \zeta_{\tau_k}, k \geq 0)$ *з* $\tau_0 = s, \zeta_{\tau_0} = i$ *утворює однорідний ланцюг Маркова на* $T \times E$ *з перехідною ймовірністю, що визначається при* $s < t$ *з рівностей*

$$P_{si}(\tau_1 > t) = p_i(s,t) \equiv \exp\left(-\int_s^t a_i(v)dv\right),$$

$$P_{si}(\tau_1 \in dt) = f_i(s,t)dt \equiv p_i(s,t)a_i(t)dt,$$

$$P_{si}(\tau_1 \in dt, \zeta_{\tau_1} = j) = p_i(s,t)a_{ij}(t)dt = f_i(s,t)\pi_{ij}(t)dt,\ j \neq i,$$

$$P_{si}(\zeta_{\tau_1} = j \mid \tau_1 = t) = \pi_{ij}(t) \equiv a_{ij}(t)/a_i(t),\ j \neq i.$$

Зауваження. Ймовірності невиходу задовольняють умову мультиплікативності при $s < u < t$:

$$p_i(s,t) = p_i(s,u)p_i(u,t).$$

Доведення

Оскільки стрибкоподібний процес є стохастично неперервним, то дискретний неперервний справа марковський процес $((\zeta_t, t \geq s), \mathfrak{F}_s^t, P_{sx})$ є строго марковським.

Визначимо при $n \geq 1$ підмножину T_n множини T, що містить числа вигляду $t_{nl} = l2^{-n}, l \in \mathbb{Z}$.

Нехай моменти $\tau_k(n)$ визначаються аналогічно τ_k з заміною T на T_n.

Тоді внаслідок включень $T_n \subset T_{n+1} \subset T$ та неперервності траєкторій процесу справа $\zeta_t = \zeta_{t+0}$ має місце монотонна збіжність $\tau_k(n) \downarrow \tau_k$ та збіжність $\zeta_{\tau_k(n)} \to \zeta_{\tau_k}$ м.н. при $n \to \infty$. Отже,

$$P_{si}(\tau_k < a, \zeta_{\tau_k} = j \mid \mathfrak{F}_s^{\tau_{k-1}}) = \lim_{n\to\infty} P_{si}(\tau_k(n) < a, \zeta_{\tau_k(n)} = j \mid \mathfrak{F}_s^{\tau_{k-1}}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{l: t_{nl} < a} P_{si}(\tau_k(n) = t_{nl}, \zeta_{t_{nl}} = j, t_{nl} > \tau_{k-1} \mid \mathfrak{F}_s^{\tau_{k-1}}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l:\ t_{nl}<a} P_{si}(\bigcap_{m<l: \tau_{k-1} < t_{nm}} \{\zeta_{t_{nm}} = \zeta_{\tau_{k-1}}\}, \zeta_{t_{nl}} = j, t_{nl} > \tau_{k-1} \mid \mathfrak{F}_s^{\tau_{k-1}}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{l:\ t_{nl}<a} P_{rv}(\bigcap_{m<l:\ r<t_{nm}} \{\zeta_{t_{nm}} = v\},\ \zeta_{t_{nl}} = j, t_{nl} > r) \mid_{r=\tau_{k-1}, v=\zeta_{\tau_{k-1}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{rv}(\tau_1(n) < a, \zeta_{\tau_1(n)} = j) \mid_{r=\tau_{k-1}, v=\zeta_{\tau_{k-1}}} =$$

$$P_{rv}(\tau_1 < a, \zeta_{\tau_1} = j) \mid_{r=\tau_{k-1}, v=\zeta_{\tau_{k-1}}}$$

внаслідок строгої марковості процесу.

Оскільки пара $(\tau_{k-1}, \zeta_{\tau_{k-1}})$ вимірна відносно $\mathfrak{F}_s^{\tau_{k-1}}$, з останньої рівності випливає марковська властивість для (τ_k, ζ_{τ_k}).

Далі, позначимо $k_n(t) = [2^{-n}t] = \sup(k : t_{nk} < t)$.

Обчислимо

$$P_{si}(\tau_1(n) > t) = P_{si}\left(\bigcap\nolimits_{k>k_n(s)}^{k_n(t)} \{\zeta_{t_{nk}} = i\}\right) =$$

$$p_{ii}(s, t_{n,k_n(s)+1}) \prod\nolimits_{k>k_n(s)}^{k_n(t)} p_{ii}(t_{nk}, t_{n,k+1}).$$

З означення стрибкоподібного процесу виводимо, що

$$p_{ii}(s, s+h) = 1 - a_i(s)h + o(h), h \to 0,$$

рівномірно за $s \in T$. Тому

$$\ln P_{si}(\tau_1 > t) = \lim_{n\to\infty} \ln P_{si}(\tau_1(n) > t) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln p_{ii}(s,t_{n,k_n(s)+1})+\sum\nolimits_{k>k_n(s)}^{k_n(t)}\ln p_{ii}(t_{nk},t_{n,k+1})\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_{k>k_n(s)}^{k_n(t)}\ln\left(1-a_i(t_{nk})2^{-n}+o(2^{-n})\right)=$$
$$-\lim_{n\to\infty}\sum\nolimits_{k>k_n(s)}^{k_n(t)}a_i(t_{nk})2^{-n}=-\int_s^t a_i(v)dv.$$

Це доводить перші рівності щодо розподілу τ_1.

Далі, обчислимо при $j\neq i$

$$P_{si}(\tau_1(n)<t,\zeta_{\tau_1(n)}=j)=\sum\nolimits_{k:t_{nk}<t}P_{si}(\tau_1(n)=t_{nk},\zeta_{t_{nk}}=j)=$$
$$\sum\nolimits_{k:t_{nk}<t}P_{si}\left(\bigcap\nolimits_{l>k_n(s)}^{k-1}\{\zeta_{t_{nl}}=i\},\ \zeta_{t_{nk}}=j\right)=$$
$$\sum\nolimits_{k:t_{nk}<t}2^{-n}p_{ii}(s,t_{n,k_n(s)+1})\times$$
$$\left(\prod\nolimits_{l=k_n(s)+2}^{k-1}p_{ii}(t_{n,l-1},t_{n,l})\right)2^np_{ij}(t_{n,k-1},t_{nk}).$$

Остання сума є інтегральною при $u=t_{n,k-1}$, оскільки

$$2^np_{ij}(t_{n,k-1},t_{nk})-a_{ij}(t_{n,k-1})=o(1),\ n\to\infty,$$

рівномірно за k. Тому

$$P_{si}(\tau_1<t,\zeta_{\tau_1}=j)=\lim_{n\to\infty}P_{si}(\tau_1(n)<t,\zeta_{\tau_1(n)}=j)=$$
$$\int_s^t\exp\left(-\int_s^u a_i(v)dv\right)a_{ij}(u)du.$$

Отже, сумісна щільність(ζ_{τ_1},τ_1) дорівнює

$$P_{si}(\tau_1\in dt,\zeta_{\tau_1}=j)=a_i(t)\exp\left(-\int_s^t a_i(v)dv\right)(a_{ij}(t)/a_i(t))dt, j\neq i,$$

звідки діленням на щільність τ_1 отримуємо шукане $\boxdot$

1.4.4 Побудова стрибкоподібного процесу

Справедливе також твердження, що є оберненим до попереднього.

Теорема. *Нехай матрична функція $A_s=(a_{ij}(s),i,j\in T)$ неперервна за s рівномірно за s,i, задовольняє (а) та умову консервативності*

$$a_i(s)\equiv -a_{ii}(s)=\sum\nolimits_{j\neq i}a_{ij}(s),$$

де ряд збігається рівномірно.

(a) Тоді сума рівномірно збіжного ряду

$$P(s,i,t,B)=\sum\nolimits_{n\geq 0}\sum\nolimits_{j\in B}p_{ij}^{(n)}(s,t),$$

є марковським регулярним стрибкоподібним процесом у широкому розумінні з інфінітезимальною матрицею A_s. Тут при $s \le t$

$$p_{ij}^{(0)}(s,t) = p_i(s,t)\delta_{ij},$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(s,t) = \int_s^t \sum\nolimits_{k\neq i} p_i(s,u)a_{ik}(u)p_{kj}^{(n)}(u,t)du,$$

$$p_i(s,u) \equiv \exp\left(-\int_s^u a_i(v)dv\right) 1\!\!\mathrm{I}_{s\le u}.$$

(б) Нехай випадкові величини $(\tau_k, \xi_k, k \ge 0)$ з $\tau_0 = s \in T_0$, та $\xi_0 = i \in E$ утворюють однорідний ланцюг Маркова на $T \times E$ з перехідною ймовірністю за один крок

$$P_{si}(\xi_1 = j, \tau_1 \in B) = \int_B p_i(s,u)a_{ij}(u)du, \ j \neq i,$$

$$P_{si}(\tau_1 \in B) = \int_B p_i(s,u)a_i(u)du.$$

Визначимо випадковий процес

$$\zeta_t = \sum\nolimits_{n\ge 0} \xi_n 1\!\!\mathrm{I}_{t\in[\tau_n,\tau_{n+1})}, \ t \ge s,$$

та кількості його стрибків ν_{st} на (s,t) з рівняння

$$\{\nu_{st} = n\} = \{s < \tau_1 < ... < \tau_n < t < \tau_{n+1}\}, \ n \ge 0,$$

де τ_k збігаються з визначеними вище моментами стрибків процесу $(\zeta_t, t \ge s)$.

Тоді апроксимуючі функції з (а) дорівнюють

$$p_{ij}^{(n)}(s,t) = P_{si}(\zeta_t = j, \ \nu_{st} = n).$$

(в) Процес $(\zeta_t, t \ge s)$ є стрибкоподібним регулярним процесом Маркова з перехідною функцією $P(s,i,t,B)$, що визначається сумою ряду з твердження (а).

Доведення

(а) Рівномірна збіжність ряду та рівняння Колмогорова для його суми $P(s,i,t,B)$ доведені у розділі про стрибкоподібні процеси та переформульовані у розділі про дискретні стрибкоподібні процеси.

Там же доведено, що інфінітезимальна матриця процесу дорівнює A_s.

(б) За означенням

$$P_{si}(\zeta_t = j, \ \nu_{st} = 0) = P_{si}(t < \tau_1, \xi_0 = j) =$$

$$\int_{(t,\infty)} \delta_{ij} p_i(s,u)a_i(u)du = \delta_{ij}p_i(s,t) = p_{ij}^{(0)}(s,t).$$

Далі, внаслідок марковської властивості та за індуктивним припущенням

$$P_{si}(\zeta_t = j,\ \nu_{st} = n+1) = P_{si}(\xi_{n+1} = j, \tau_{n+1} \le t < \tau_{n+2}) =$$

$$\sum\nolimits_{k\neq i} \int_s^t P_{si}(\xi_1 = k, \tau_1 \in du) \times$$

$$P(\xi_{n+1} = j, \tau_{n+1} \le t < \tau_{n+2} \mid \tau_0 = s, \xi_0 = i, \xi_1 = k, \tau_1 = u) =$$

$$\sum\nolimits_{k\neq i} \int_s^t P_{si}(\xi_1 = k, \tau_1 \in du) P_{uk}(\xi_n = j, \tau_n \le t < \tau_{n+1}) =$$

$$\sum\nolimits_{k\neq i} \int_s^t p_i(s,u) a_{ik}(u) p_{kj}^{(n)}(u,t) du = p_{ij}^{(n+1)}(s,t),$$

що доводить твердження (б) за індукцією.

(в) З рівномірної збіжності при $B = E$ ряду

$$P(s,i,t,E) = \sum\nolimits_{n\ge 0} \sum\nolimits_{j\in E} p_{ij}^{(n)}(s,t) = \sum\nolimits_{n\ge 0} P_{si}(\nu_{st} = n)$$

виводимо, що залишок $P_{si}(\nu_{st} > n) \to 0, n \to \infty$, рівномірно за s, i. Отже, $P_{si}(\nu_{st} = \infty) = 0$, та $\tau_n \uparrow \infty, n \to \infty$, P_{si}-м.н.

Розглянемо перехідну ймовірність за один крок ланцюга Маркова (τ_k, ξ_k) :

$$Q_{ik}(s, du) = p_i(s,u) a_{ik}(u) du\ \mathbb{1}_{i\neq k},\ u \ge s,\ i,k \in E.$$

За означенням

$$p_{ij}^{(n+1)}(s,t) = \sum\nolimits_k \int_s^t Q_{ik}(s,du) p_{kj}^{(n)}(u,t),$$

звідки за індукцією виводимо, що

$$p_{ij}^{(n)}(s,t) = \int_s^t Q_{ij}^{(n)}(s,du) p_j(u,t),$$

де $Q_{ij}^{(0)}(t,A) \equiv \delta_{ij} \mathbb{1}_{t\in A}$, а $Q_{ij}^{(n)}(s,du)$ – перехідна імовірність за n кроків. Звідси

$$P(s,i,t,\{j\}) \equiv \sum\nolimits_{n\ge 0} p_{ij}^{(n)}(s,t) = \sum\nolimits_{n\ge 0} \int_s^t Q_{ij}^{(n)}(s,du) p_j(u,t).$$

Позначимо $\varkappa_n(t) = \mathbb{1}_{\tau_n \le t < \tau_{n+1}}$. За означенням $\zeta_t = \sum_{n\ge 0} \xi_n \varkappa_n(t)$.

Тому для довільної функції $f = (f(j))$ за марковською властивістю ланцюга (ξ_k, τ_k)

$$E_{si} f(\zeta_t) = \sum\nolimits_{n\ge 0} E_{si} f(\xi_n) \varkappa_n(t) =$$

$$\sum\nolimits_{n\ge 0} E_{si} (f(\xi_n) E_{si}(\mathbb{1}_{\tau_n \le t < \tau_{n+1}} \mid \xi_n, \tau_n)) =$$

$$\sum\nolimits_{n\ge 0} E_{si}(f(\xi_n)1\!\!1_{\tau_n\le t} E_{uj}(1\!\!1_{t<\tau_1})\mid_{u=\tau_n,\ j=\xi_n}) =$$

$$\sum\nolimits_{n\ge 0}\sum\nolimits_j \int_s^t Q_{ij}^{(n)}(s,du)f(j)p_j(u,t) = \sum\nolimits_j P(s,i,t,\{j\})f(j),$$

тобто $P(s,i,t,B)$ є перехідною ймовірністю для (ζ_t).

Нехай $s<r<t$, а функції $f=(f(j)), g=(g(j))$. Тоді внаслідок марковської властивості

$$E_{si}f(\zeta_r)g(\zeta_t) = \sum\nolimits_{0\le n\le m} E_{si}f(\xi_n)\varkappa_n(r)g(\xi_m)\varkappa_m(t) =$$

$$\sum\nolimits_{0\le n\le m} E_{si}\left[f(\xi_n)\ E_{si}(\varkappa_n(r)g(\xi_m)\varkappa_m(t)\mid \xi_n,\tau_n)\right] =$$

$$\sum\nolimits_{0\le n\le m} E_{si}\left[f(\xi_n)\ 1\!\!1_{\tau_n\le r}E_{uj}(1\!\!1_{r<\tau_1}g(\xi_{m-n})\varkappa_{m-n}(t))\mid_{u=\tau_n,\ j=\xi_n}\right] =$$

$$\sum\nolimits_{0\le n\le m}\sum\nolimits_j \int_s^r Q_{ij}^{(n)}(s,du)f(j)[p_j(u,r)\sum\nolimits_k \int_r^t Q_{jk}^{(m-n)}(r,dv)p_k(v,t)g(k)]$$

$$= \sum\nolimits_{0\le n}\sum\nolimits_j \int_s^r Q_{ij}^{(n)}(s,du)f(j)\left[p_j(u,r)\sum\nolimits_k P(r,j,t,\{k\})g(k)\right] =$$

$$\sum\nolimits_j P(s,i,r,\{j\})f(j)\sum\nolimits_k P(r,j,t,\{k\})g(k).$$

При $f\equiv 1$ звідси виводимо рівняння Колмогорова-Чепмена для перехідної імовірності $P(s,i,t,\{j\})$.

Вибором індикаторних функцій f,g знаходимо також

$$P_{si}(\zeta_r=j,\zeta_t=k) = P(s,i,r,\{j\})P(r,j,t,\{k\}) = P_{si}(\zeta_r=j)P(r,j,t,\{k\}),$$

звідки випливає спеціальна марковська властивість

$$P_{si}(\zeta_t=k\mid\zeta_r=j) = P(r,j,t,\{k\}).$$

Аналогічно за індукцією обчислюємо при $s<t_1<...<t_m$ для функцій $(f_l, l=\overline{1,m})$

$$E_{si}\prod\nolimits_{l=1}^m f_l(\zeta_{t_l}) =$$

$$\sum\nolimits_{n_1,...n_l\ge 0}\int_s^{t_1}\sum\nolimits_{j_1} Q_{ij_1}^{(n_1)}(s,dt_1)f_1(j_1)p_{j_1}(t_1,t_2)\times$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum\nolimits_{j_2} Q_{j_1j_2}^{(n_2)}(t_1,dt_2)f_2(j_2)p_{j_2}(t_2,t_3)...\times$$

$$...\int_{t_{l-1}}^{t_l}\sum\nolimits_{j_l} Q_{j_{l-1}j_l}^{(n_l)}(t_{l-1},dt_l)f_l(j_l) =$$

$$\int_s^{t_1}\sum\nolimits_{j_1} P_{ij_1}(s,i,dt_1,\{j_1\})f_1(j_1)...\int_{t_{l-1}}^{t_l}\sum\nolimits_{j_l} P(t_{l-1},j_{l-1},dt_l,\{j_l\})f_l(j_l),$$

звідки виводимо марковську властивість при $s<t_1<...<t_m$

$$P_{si}(\zeta_{t_m}=j_m\mid\zeta_{t_1}=j_1,...,\zeta_{t_{m-1}}=j_{m-1}) = P(t_{m-1},j_{m-1},t_m,\{j_m\})\ \boxdot$$

1.4.5 Класифікація станів стрибкоподібного процесу

Нехай $(\zeta_t, t \geq s)$ – регулярний дискретний стрибкоподібний процес з моментами стрибків $(\tau_k, k \geq 1)$, інтенсивностями переходів $a_{ij}(s)$, інтенсивністю та функцією невиходу зі стану $a_i(s)$ і $p_i(s,t)$, що визначені вище.

Означення. *Стан $i \in E$ назвемо* ***транзієнтним****, якщо*

$$P_{si}(\tau_1 < \infty) = 1.$$

Заміною змінної u на $r = \int_s^u a_i(v)dv$ виводиться при $s < t < t_1$ така тотожність

$$P_{si}(t < \tau_1 < t_1) = \int_{(t,t_1)} p_i(s,u)a_i(u)du = p_i(s,t) - p_i(s,t_1).$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$P_{si}(\tau_1 < \infty) = \sum\nolimits_{j \in E} P_{si}(\zeta_{\tau_1} = j, \tau_1 < \infty) =$$

$$\sum\nolimits_{j \neq i} \int_{(s,\infty)} p_i(s,u)a_{ij}(u)du =$$

$$\int_{(s,\infty)} p_i(s,u)a_i(u)du = p_i(s,s) - p_i(s,\infty) = 1 - p_i(s,\infty).$$

Отже, стан i є транзієнтним тоді і тільки тоді, коли $p_i(s,\infty) = 0$, тобто за умови

$$\int_{(s,\infty)} a_i(v)dv = \infty.$$

За збіжності цього інтегралу з імовірністю $p_i(s,\infty)$ процес ніколи не залишить стан i.

Властивість транзієнтності не виключає, що після виходу зі стану повернення в нього є можливим з додатною імовірністю.

Означення. *Стан $i \in E$ назвемо* ***строго транзієнтним****, якщо*

$$p_{ii}(s,t) = p_i(s,t), \ \forall t > s.$$

Для таких станів для всіх t

$$P_{si}(\{t \geq \tau_1, \ \zeta_t = i\}) = p_{ii}(s,t) - p_i(s,t) = 0.$$

Означення. *Стан $i \in E$ назвемо* ***поглинаючим****, якщо*

$$P_{si}(\tau_1 = \infty) = 1.$$

Потрапивши у поглинаючий стан, процес ніколи з нього не виходить.

Оскільки $P_{si}(\tau_1 = \infty) = p_i(s,\infty)$, то стан i є поглинаючим тоді і тільки тоді, коли

$$a_i(v) = 0, \ \forall v > t.$$

1.4.6 Процеси Пуассона, народження та загибелі

Для моделювання неоднорідних за часом потоків випадкових подій використовують неоднорідний процес Пуассона.

Нехай $\lambda(s), s \geq 0$, – неперервна функція на $\mathbb{R}_+$, а $\Lambda(s,t) = \int_s^t \lambda(v)dv$.

Означення. *Неоднорідним процесом Пуассона називається марковський стрибкоподібний процес зі значеннями у $\mathbb{Z}_+$ з перехідними імовірностями*

$$p_{ij}(s,t) = \frac{\Lambda^{j-i}(s,t)}{(j-i)!} \exp(-\Lambda(s,t)),\ j \geq i.$$

Процес має незалежні прирости, його розподіл є пуассонівським, та $\mathbf{E}\zeta[s,t) = \Lambda(s,t)$.

Інфінітезимальна матриця процесу має вигляд

$$-a_{ii}(s) = a_{i,i+1}(s) = \lambda(s),\ i \geq 0.$$

Випадковий час перебування процесу у стані i, починаючи з моменту s, має функцію розподілу

$$P_{si}(\tau_1 < x) = 1 - \exp(-\int_s^{s+x} \lambda(v)dv),$$

В результаті стрибка у момент τ_1 відбувається перехід до стану $i+1$.

Всі стани процесу є транзієнтними за умови $\int_s^\infty \lambda(v)dv = \infty$.

Процес народження та загибелі є загальною моделлю еволюції у часі популяцій з можливим стохастичним збільшенням чи зменшенням їх об'єму.

Нехай $\lambda_i(s), i \geq 0$, – інтенсивності народжень, $\mu_i(s), i \geq 1$, – інтенсивності загибелі, послідовності рівномірно неперервних та рівномірно обмежених за $s \in \mathbb{R}_+$ функцій.

Означення. *Процесом народження та загибелі називається марковський стрибкоподібний процес ζ_t зі значеннями у $\mathbb{Z}_+$ з інфінітезимальною матрицею*

$$a_{i,i+1}(s) = \lambda_i(s), i \geq 0,\ a_{i,i-1}(s) = \mu_i(s), i \geq 1,$$

$$a_{ii}(s) = -\lambda_i(s) - \mu_i(s),\ a_{ij}(s) = 0, |i-j| > 1,$$

де $\mu_0(s) \equiv 0$.

Існування такого процесу обгрунтовано у розділі про моменти перебування стрибкоподібного процесу.

Випадковий час перебування процесу у стані $i \geq 0$, починаючи з моменту s, має функцію розподілу

$$P_{si}(\tau_1 < x) = 1 - \exp(-\int_s^{s+x} (\lambda_i(v) + \mu_i(v))dv),$$

В результаті стрибка у момент $\tau_1 = t$ відбувається перехід до стану $i+1$ (народження) з імовірністю $\lambda_i(t)/((\lambda_i(t)+\mu_i(t))$, або ж перехід до стану $i-1$ (загибель) з імовірністю $\mu_i(t)/((\lambda_i(t)+\mu_i(t))$.

Стан i транзієнтний, якщо $\int_s^\infty (\lambda_i(v)+\mu_i(v))dv = \infty$.

Розділ 2

Марковські моделі страхування життя

2.1 Стрибкоподібні процеси як моделі страхових полісів

Страховий поліс – це договір на купівлю страховою фірмою у застрахованих осіб ризиків, що пов'язані з застрахованими особами та мають стохастичний характер.

Надалі страхову фірму називатимемо *страховиком*, а застрахованих осіб – *страхувальником*.

Поліс діє на протязі строго фіксованого періоду, на протязі якого виконуються передбачені договором взаєморозрахунки сторін. Як правило, факт та розміри *страхових виплат* (страховиком страхувальнику) залежать від наявності чи відсутності у даному періоді *страхових випадків* та від моментів їх набуття. Одночасно передбачається періодичність та розміри *страхових премій*, що сплачуються згідно з договором страхувальником страховику.

Класична модель поліса у актуарній математиці передбачає наявність одного випадкового інтервалу - від початку дії полісу до моменту настання страхового випадку.

Більш складні поліси можуть враховувати можливість декількох втручань випадку у стан страхувальника. Наприклад, смерті застрахованої особи може передувати захворювання певного виду.

Тому для опису більш загальних полісів слід задати:

(а) період дії полісу T,

(б) множину E передбачених ним можливих станів страхувальника, (в) випадкову функцію (ζ_t) на T зі значеннями у E, що відображає випадкові зміни у стані страхувальника.

Природно припустити, що період T – інтервал з $\mathbb{R}_+$, простір E – скінчений, а процес $(\zeta_t, t \in T)$ є стрибкоподібним регулярним марковським процесом.

Означення. *Набір $(T, E, (\zeta_t, t \in T))$ називається марковською моделлю страхового полісу.*

Нехай $A_s = (a_{ij}(s), i, j \in E)$ – інфінітезимальна матриця процесу, функція $a_i(s) = -a_{ii}(s) = \sum_{j \neq i} a_{ij}(s)$. Визначимо ймовірності перебування та ймовірності переходу вкладеного ланцюга Маркова (τ_k, ζ_{τ_k}) :

$$p_i(s,t) = P_{si}(\tau_1 > t) = \exp\left(-\int_s^t a_i(v)dv\right),$$

$$f_i(s,t) = p_i(s,t)\alpha_i(t) = \frac{\partial}{\partial t} P_{si}(\tau_1 \leq t),$$

$$\pi_{ij}(t) = P_{st}(\zeta_{\tau_1} = j \mid \tau_1 = t) = a_{ij}(t)/a_i(t).$$

Означення. *Графом переходів страхового полісу називається відношення $i \to j$ на E, що еквівалентне досяжності з додатною імовірністю стану j зі стану i для вкладеного ланцюга Маркова (τ_k, ζ_{τ_k}).*

Відношення $i \to j$ є частковим порядком, а стан $j \neq i$ – досяжний з i, якщо $\pi_{ij}(t) > 0$ для множини $t \in T$ додатної міри. Транзієнтність цього відношення є наслідком рівнянь Колмогорова-Чепмена.

Означення. *Ієрархічною моделлю страхового поліса називається скінчений стрибкоподібний процес, що має фіксований початковий стан O, причому всі його стани є строго транзієнтними або поглинаючими.*

Для ієрархічної моделі зі строгої транзієнтності виводимо, що з $i \to j$ випливає неможливість $j \to i$. Тому граф відношення $i \to j$ не має циклів, і є деревом (ієрархією).

Ієрархічна модель задається (а) своїм деревом та (б) елементами інфінітезимальної матриці $a_{ij}(t) = a_i(t)\pi_{ij}(t)$ для $i \to j$. За означенням інші елементи цієї матриці – нульові.

Кінечні стани дерева повинні бути поглинаючим, а всі інші – строго транзієнтними.

2.1.1 Класичний поліс

Нехай τ – невід'ємна випадкова величина зі щільністю f та функцією розподілу $F(t) = \mathbf{P}(\tau < t)$, а $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$ – так звана функція виживання.

У застосуваннях величина τ інтерпретується як час до загибелі об'єкта (або час до настання страхового випадку).

Функцією інтенсивності величини τ називається відношення

$$\mu(t) = f(t)/\overline{F}(t),\ t \geq 0.$$

За заданою функцією інтенсивності однозначно обчислюються щільність та функція розподілу:

$$f(t) = \mu(t)\overline{F}(t),\ \overline{F}(t) = \exp(-\int_0^t \mu(v)dv).$$

Важливою перевагою функції інтенсивності є її локальність, завдяки якій при $s, t \geq 0$ умовна ймовірність

$$\mathbf{P}(\tau > t + s \mid \tau > t) = \exp(-\int_t^{s+t} \mu(v)dv),$$

однозначно визначається значеннями μ лише на інтервалі $(t, s+t]$.

Означення. *Нехай* $s \geq 0$. *Класичним полісом називається неперервний справа марковський стрибкоподібний процес*

$$\zeta_t = 1\!\!\mathrm{I}_{\tau > t},\ t \geq s,$$

зі значеннями у $\{0,1\}$ *та з потоком* $\mathfrak{F}_s^t = \sigma[\zeta_u, s \leq u \leq t]$.

Перехідні імовірності процесу мають вигляд

$$p_{00}(x,t) = {}_tp_x,\ p_{01}(x,t) = {}_tq_x,\ \ p_{11}(x,t) = 1,\ p_{10}(x,t) = 0,$$

де ${}_tp_x$ – ***ймовірності виживання***, ${}_tq_x$ – ***ймовірності загибелі*** особи з початковим віком x, які визначаються через

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(v)dv\right) = p_1(x, x+t),\ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x.$$

Рівняння Колмогорова-Чепмена випливають з тотожностей

$${}_tp_x = {}_sp_x\ {}_{t-s}p_{x+s},$$

$${}_tq_x = {}_sp_x\ {}_{t-s}q_{x+s} + {}_sq_x.$$

Марковська властивість полягає у тому, що при $s < t_1 < ... < t_n < t$ ймовірність

$$P_{si}(\zeta_t = j \mid \zeta_{t_1} = j_1, ..., \zeta_{t_n} = j_n)$$

дорівнює δ_{j1}, якщо хоча б один стан $j_l = 1$, а у протилежному випадку подія під знаком умови дорівнює $\{\zeta_{t_n} = j_n\}$.

Нарешті, інфінітезимальна матриця процесу має вигляд

$$a_{01}(s) = -a_{00}(s) = \mu(s),\ a_{11}(s) = -a_{10}(s) = 0.$$

Стан 1 є поглинаючим. Транзієнтність 0 еквівалентна розбіжності $\int_x^\infty \mu(v)dv = \infty$.

2.1.2 Одностврибковий поліс

Нехай $E = \{0, 1, ..., n\}$, а граф переходів має вигляд

$$0 \to 1, 2, ..., n.$$

Тоді стани $i \geq 1$ – поглинаючі, та

$$p_{0i}(s,t) = \int_s^t f_0(s,u)\pi_{0i}(u)du, \ i = \overline{1,n}.$$

Стан 0 є транзієнтним тоді і тільки тоді, коли $\int_s^\infty a_0(v)dv = \infty$.

Зауваження. Відмітимо, що всупереч незалежності щільності розподілу моменту стрибка $P_{s0}(\tau_1 \in dt) = f_0(s,t)dt$ від кінцевого стану ζ_{τ_1}, розподіл часу до стрибка фактично залежить від значення у момент стрибка, оскільки

$$P_{s0}(\tau_1 \in dt \mid \zeta_{\tau_1} = i) =$$
$$f_0(s,t)\pi_{0i}(t)dt \ / \ \int_s^\infty f_0(s,u)\pi_{0i}(u)du.$$

2.1.3 Пенсія вдівця

Нехай $E = \{0, 1, 2, 3\}$, а граф переходів має вигляд

$$1 \to 2 \to 0; \quad 1 \to 3 \to 0.$$

Тоді стани $1, 2, 3$ – строго транзієнтні, 0 – поглинаючий, та

$$p_{1j}(s,t) = \int_s^t f_1(s,u)\pi_{1j}(u)du, \ j = 2, 3,$$

$$p_{j0}(s,t) = 1 - p_j(s,t), \ j = 2, 3,$$

$$p_{10}(s,t) = \sum\nolimits_{j=2}^3 \int_s^t f_1(s,u)\pi_{1j}(u)p_{j0}(u,t)du.$$

Враховуючи інтерпретацію поліса, імовірнісні характеристики переходів $1 \to 2$ і $3 \to 0$, та $1 \to 3$ і $2 \to 0$ повинні бути подібними, оскільки пов'язані з інтенсивностями старіння тих самих осіб. Тому для заданих інтенсивностей $\mu_i(t)$ та початкових віків x_i можна обрати

$$a_{12}(u) = \mu_1(x_1 + u), \ a_{20}(u) = \mu_2(x_2 + u),$$

$$a_{13}(u) = \mu_2(x_2 + u), \ a_{30}(u) = \mu_1(x_1 + u)$$

Така модель відповідає незалежності часів дожиття для подружжя.

Застосування процесів Маркова дозволяє врахувати можливу залежність, наприклад, обранням 'коефіцієнта стресу' $\alpha \in (0, 1)$:

$$a_{12}(u) = (1 - \alpha)\mu_1(x_1 + u), \ a_{20}(u) = (1 + \alpha)\mu_2(x_2 + u),$$

$$a_{13}(u) = (1-\alpha)\mu_2(x_2+u),\ a_{30}(u) = (1+\alpha)\mu_1(x_1+u).$$

2.1.4 Поліс з двоетапним переходом

Нехай $E = \{0, 1, 2\}$, а граф переходів має вигляд

$$1 \to 2 \to 0; \quad 1 \to 0.$$

Тоді стани $1, 2$ – строго транзієнтні, 0 – поглинаючий, та

$$p_{12}(s,t) = \int_s^t f_1(s,u)\pi_{12}(u)p_2(u,t)du,$$

$$p_{20}(s,t) = 1 - p_2(s,t),$$

$$p_{10}(s,t) = \int_s^t f_1(s,u)\pi_{10}(u)du + \int_s^t f_1(s,u)\pi_{12}(u)p_{20}(u,t)du.$$

2.1.5 Поліс з циклічними переходами

Всі попередні поліси були ієрархічними, тому ймовірності переходів обчислювалися явно. Розглянемо поліс, що містить не строго транзієнтні стани, з графом

$$1 \to 2 \to 0;\ 2 \to 1 \to 0.$$

Для обчислення перехідної матриці слід застосувати послідовні наближення, наведені у розділі про дискретні стрибкоподібні процеси:

$$p_{12}^{(1)}(s,t) = \int_s^t f_1(s,u)\pi_{12}(u)p_2(u,t)du,$$

$$p_{12}^{(n+1)}(s,t) = \int_s^t f_1(s,u)\pi_{12}(u)du \int_u^t f_2(u,v)\pi_{21}(v)p_{12}^{(n)}(v,t)dv,\ n \geq 1,$$

$$p_{12}(s,t) = \sum\nolimits_{n\geq 1} p_{12}^{(n)}(s,t),$$

$$p_{10}(s,t) = \int_s^t f_1(s,u)\pi_{10}(u)du$$

де враховано, що стан 0 – поглинаючий. Оскільки у наявності є лише три стани, то

$$p_{11}(s,t) + p_{12}(s,t) + p_{10}(s,t) = 1,$$

звідки обчислюємо $p_{11}(s,t)$.

Аналогічно знаходимо імовірності переходу зі стану 2.

2.1.6 Страхування інвалідності

Простір станів полісу містить такі стани: a – працездатна особа, $i1, i2, ...i6$ – інвалідність 1-6 груп, d – смерть особи.

Граф поліса має вигляд

$$a \to i1 \to ... \to i6 \to d;$$

$$i1, ...i6 \to a; \quad a, i1, ...i6 \to d.$$

Тому інфінітезимальна матриця процесу містить 7+6+7=20 функцій інтенсивності переходів.

Імовірності переходів знаходяться чисельно методом послідовних наближень.

2.1.7 Страхування захворювання на СНІД

Простір станів полісу містить стани C – немає ознак, R – ризикова група, H_k – k-та група ВІЛ, A_j – j-та група СНІД, D – загибель людини.

Граф поліса має вигляд

$$C \to R, D; \quad R \to C, D, H_0;$$

$$H_0 \to H_1, ...H_n;\ H_1, ...H_n \to A_0; \quad A_0 \to A_1, ...A_m;$$
$$H_0, H_1, ...H_n \to D; \quad A_0, A_1, ...A_m \to D.$$

Інфінітезимальна матриця процесу містить $5 + 2n + m + n + 1 + m + 1$ функцій інтенсивності переходів.

Імовірності переходів знаходяться чисельно методом послідовних наближень.

2.2 Функція витрат для марковської моделі

Надалі будемо припускати, що страховий поліс відповідає ієрархічній марковській моделі зі скінченим стрибкоподібним марковським процесом.

2.2.1 Грошові потоки

Розрахунки у межах страхового поліса пов'язані з взаємним перерахуванням коштів у різні моменти часу. Оскільки вартість грошей змінюється у часі, то доцільно розглянути основні властивості грошових потоків.

Зміна вартості грошей пов'язана з існуванням безризикових державних облігацій. Купівля за 1 грошову одиницю такої облігації у момент часу t призводить до отримання

(a) $1+\delta dt$ через проміжок dt у неперервній моделі,

(b) $1+i$ через рік у дискретній моделі.

Параметр δ називається *процентною ставкою* (миттєвим процентом), а i – *річним процентом* (interest rate та interest percent).

Тому за час t у неперервній моделі 1-на вартість збільшується до $\exp(\delta t)$, а у дискретній – до $(1+i)^t$.

За означенням

$$i = \exp(\delta) - 1.$$

Для отримання за час t 1-ї вартості необхідно у початковий момент вкласти

(a) $\exp(-\delta t) = (1-d)^t$ у неперервній моделі,

(b) $(1+i)^{-t} = v^{-t}$ у дискретній моделі.

Тут параметр:

$d = 1 - \exp(-\delta) = i/(i+1)$ називається *дисконтною ставкою,*

$v = 1/(1+i) = \exp(-\delta)$ називається *річним дисконтом.*

Визначимо функції $[t]$ – ціла частина t, $\lceil t \rceil = [t]+1$.

Нехай грошові виплати виконуються до моменту t:

(a) неперервно з інтенсивністю 1,

(b) на початку кожного з n одиничних періодів у сумі 1,

(c) наприкінці кожного з n одиничних періодів у сумі 1,

тоді вартість цих виплат на початок періоду виплат дорівнює

$$\text{(a)}\quad \overline{a}_t \equiv \int_0^t \exp(-\delta s)ds = (1-\exp(-\delta t))/\delta.$$

$$\text{(b)}\ \ddot{a}_n \equiv \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} v^k = (1-v^{-n})/(1-v) = \int_0^n \exp(-\delta s)d[s].$$

$$\text{(c)}\ a_n \equiv \sum\nolimits_{k=1}^{n} v^k = v(1-v^{-n})/(1-v) = \int_0^n \exp(-\delta s)d\lceil s\rceil.$$

Ці приклади можна узагальнити.

Нехай $(B(t), t \in \mathbb{R}_+)$ – неспадна неперервна справа функція. Значення $B(t)$ будемо інтерпретувати як загальну номінальну суму коштів, що були сплачені на інтервалі $[0,t]$ у певному грошовому потоці. Номінальність означає, що вартість приросту $dB(s)$ обчислюється у цінах на момент s. Тоді вартість такого потоку на момент t у цінах на момент t становить

$$B^*(t) = \int_0^t \exp(\delta(t-s))dB(s).$$

2.2.2 Марковська модель та грошові потоки поліса

Нехай страховий поліс має марковську модель $(T, E, (\zeta_t, t \in T))$ з інтервалом $T = [s, \infty)$.

Можна розрізнити такі три види розрахунків за полісом.

Страхові премії

Страховими преміями називаються сплати страхувальника на користь страховика для забезпечення умов поліса. Найпростішою формою є одноразова сплата на початку страхового періоду ("купівля").

Означення. *Функцією премій* $\Pi_j(t)$ *у стані* $j \in E$ *називається загальна номінальна сума страхових премій, що були сплачені на часовому інтервалі* $[s, t]$, *за час перебування процесу* ζ_u *у стані* j.

Функція $\Pi_j(t)$ неспадна та неперервна справа.

Страхові виплати

Страховими виплатами називаються регулярні сплати страховиком на користь страхувальника страхових коштів згідно умовам поліса. Найпростішою формою є регулярні виплати наприкінці календарних періодів – наприклад, пенсійні виплати ("аннуітет").

Означення. *Функцією виплат* $B_j(t)$ *у стані* $j \in E$ *називається загальна номінальна сума страхових виплат, що були сплачені на часовому інтервалі* $[s, t]$, *за час перебування процесу* ζ_u *у стані* j.

Функція $B_j(t)$ неспадна та неперервна справа.

Страхові компенсації

Страховими компенсаціями називаються разові оплати страховиком на користь страхувальника страхових компенсацій у моменти настання страхових подій згідно умовам поліса. Найпростішою формою є разова компенсація у страховий момент – наприклад, компенсація за пошкодження автомобіля відразу після аварії ("страховка").

Означення. *Функцією компенсацій* $c_{jk}(t)$ *називається розмір разової компенсації, що сплачується у момент* t *переходу процесу* ζ_u *зі стану* j *у стан* $k \neq j$.

Функція $c_{jk}(t)$ може бути як додатною (страховик $\to$ страхувальнику), так і від'ємною (страхувальник $\to$ страховику).

Означення. *Функцією зведених виплат називається різниця між виплатами та преміями*

$$\overline{B}_j(t) \equiv B_j(t) - \Pi_j(t).$$

Проспективні вартості грошових потоків

Вартості на момент t у цінах на момент t грошових потоків поліса у стані j відповідно дорівнюють

$$\Pi_j^*(t) = \int_s^t \exp(\delta(t-u))d\Pi_j(u),$$

$$B_j^*(t) = \int_s^t \exp(\delta(t-u))dB_j(u),$$

$$c_{jk}^*(t) = c_{jk}(t),$$

а ***вартість зведених виплат*** на момент t у стані j визначається через

$$\overline{B}_j^*(t) \equiv \int_s^t \exp(\delta(t-u))d\overline{B}_j(u),$$

Вартість приросту зведених виплат за період $(t,r]$ на момент $r > t$ дорівнює

$$\overline{B}_j^*(t,r) \equiv \int_t^r \exp(\delta(r-u))d\overline{B}_j(u) =$$

$$\exp(\delta r)\left[\int_s^r \exp(-\delta u)d\overline{B}_j(u) - \int_s^t \exp(-\delta u)d\overline{B}_j(u)\right] =$$

$$\overline{B}_j^*(r) - \exp(\delta(r-t))\overline{B}_j^*(t).$$

2.2.3 Функція витрат

Нехай початковий стан полісу дорівнює $\zeta_s = i$.

Означення. *Функцією витрат* $(L_j(t), t \geq s)$ *поліса називається зведена сума зобов'язань (з урахуванням майбутніх премій, виплат і компенсацій) страховика перед страхувальником, що мають місце у момент часу t для забезпечення подальшого виконання умов полісу, у цінах на момент t, за умови $\zeta_t = j$.*

Зауважимо, що функція витрат є випадковою та внаслідок марковської властивості визначається траєкторією процесу $(\zeta_u, u \geq t)$ та значеннями функцій, що задають премії, виплати та компенсації при $u \geq t$.

Позначимо через $(\tau, \kappa) = (\tau_1, \zeta_{\tau_1})$ перший момент виходу зі стану $\zeta_t = j$ та положення у цей момент марковського процесу $(\zeta_u, u \geq t)$.

Тоді
$$P_{sj}(\tau \in dt, \kappa = k) = f_j(s,t)\pi_{jk}(t)dt,\ t \geq s, k \neq j,$$
де
$$f_j(s,t) = p_j(s,t)a_j(t),\ \pi_{jik}(t) = a_{jk}(t)/a_j(t)1\!\!1_{j\neq k},$$
$A(t) = (a_{jk}(t))$ – інфінітезимальна матриця процесу.

Теорема. *Функція витрат задовольняє рекурентні рівняння*
$$L_j(t) = \exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}^*_j(t,\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + L_\kappa(\tau)\right],$$
$$L_j(t) = \exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}^*_j(\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + L_\kappa(\tau)\right] - \overline{B}^*_j(t).$$

Доведення першого рівняння випливає з означення функції витрат, та з означення $\overline{B}^*_j(t,\tau)$ як суми витрат у цінах на момент τ, оскільки сумарні зобов'язання на момент t визначаються зведеними витратами на інтервалі $[t,\tau)$, можливою компенсацією у момент τ та зобов'язаннями після моменту τ. Останні дорівнюють $L_\kappa(\tau)$ внаслідок строго марковської властивості процесу $(\zeta_u, u \geq t)$ у момент зупинки τ.

Друге рівняння виводиться з наведеної вище тотожності для приросту зведених витрат $\boxdot$

2.3 Резерв премій

2.3.1 Резерв премій та редукована функція витрат

Означення. *Чистим* **резервом премій** *у момент t за умови $\zeta_t = j$ називається середнє значення функції витрат*
$$V_j(t) = E_{tj}L_j(t).$$

Економічно зрозумілим є таке означення.

Означення. *Страховий поліс з одним початковим станом $o \in E$ має актуарно збалансовані премії, виплати та компенсації, якщо*
$$V_o(0) = 0.$$

Приймемо, що має місце очевидне формальне припущення
$$V_j(\infty) = 0,$$
яке обгрунтовується зрозумілою умовою обмеженості часу дії довільного полісу – виписаною явно чи спричиненою обмеженістю часу існування страховика.

Означення. *Редукованою функцією витрат* *називається умовне сподівання*
$$\overline{L}_j(t) = E_{tj}(L_j(t) \mid \tau, \kappa).$$

За означенням
$$E_{tj}\overline{L}_j(t) = E_{tj}L_j(t) = V_j(t).$$

Теорема. *Редукована функція витрат задовольняє рівняння*
$$\overline{L}_j(t) = \exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(t,\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + V_\kappa(\tau)\right],$$
$$\overline{L}_j(t) = \exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + V_\kappa(\tau)\right] - \overline{B}_j^*(t).$$

Доведення першого рівняння є наслідком строгої марковості:
$$\overline{L}_j(t) = E_{tj}\left(\exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(t,\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + V_\kappa(\tau)\right] \mid \tau,\kappa\right) =$$
$$\exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(t,\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + E_{tj}(L_\kappa(\tau) \mid \tau,\kappa)\right] =$$
$$\exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(t,\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + V_\kappa(\tau)\right].$$

Друге рівняння виводиться із зображення для приросту зведених виплат $\boxdot$

Теорема. *Функція резерву премій є единим у класі обмежених функцій розв'язком лінійних інтегральних рівнянь*
$$V_j(t) = \sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta(u - t)) f_j(t,u)\pi_{jk}(u)\left[\overline{B}_j^*(t,u) + c_{j\kappa}(u) + V_k(u)\right] du,$$
$$V_j(t) = \sum\nolimits_{k\neq j} \int_t^\infty \exp(-\delta(u - t)) p_j(t,u) a_{jk}(u)\left[c_{j\kappa}(u) + V_k(u)\right] du +$$
$$\int_t^\infty \exp(-\delta(u - t)) p_j(t,u) d\overline{B}_j(u).$$

Доведення першого рівняння виводиться з попередньої теореми з урахуванням сумісного розподілу величин (τ,κ) :
$$V_j(t) = E_{tj}\overline{L}_j(t) = E_{tj}\exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(t,\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + V_\kappa(\tau)\right] =$$
$$\sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta(u - t)) f_j(t,u)\pi_{jk}(u)\left[\overline{B}_j^*(t,u) + c_{j\kappa}(u) + V_k(u)\right] du.$$

Для доведення другого припустимо, що стан j є транзієнтним. Тоді
$$\sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta(u - t)) f_j(t,u)\pi_{jk}(u)\overline{B}_j^*(t,u) du =$$
$$\int_t^\infty \exp(-\delta(u - t)) f_j(t,u) \int_t^u \exp(\delta(u - v)) d\overline{B}_j(v) du =$$
$$\int_t^\infty \exp(-\delta(v - t)) d\overline{B}_j(v) \int_v^\infty f_j(t,u) du =$$
$$\int_t^\infty \exp(-\delta(v - t)) d\overline{B}_j(v) p_j(t,v).$$

Якщо ж стан j є поглинаючим, то шукана рівність має очевидний вигляд

$$V_j(t) = \int_t^{\infty} \exp(-\delta(u-t))d\overline{B}_j(u).$$

Внаслідок ієрархічності моделі інші припущення щодо j не можливі.

Єдиність розв'язку випливає з того, що інтегральний оператор у даних інтегральних рівняннях є стискаючим при виборі рівномірної норми $\|V\| = \sup_{t,j} \exp(-\delta t) |V_j(t)|$ $\boxdot$

2.3.2 Рівняння Тілі та функція ризиків

Теорема. *Функція резерву премій є єдиним розв'язком диференціальних рівнянь Тілі з крайовою умовою $V_j(\infty) = 0$:*

$$dV_j(t) = \delta V_j(t)dt - d\overline{B}_j(t) - \sum\nolimits_{k\neq j} \left(c_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t)\right) a_{jk}(t)dt.$$

Доведення

Нехай $i \in E, s < t$. Помножимо друге з інтегральних рівнянь для $V_j(t)$ на $\exp(-\delta t)p_j(s,t)$ та врахуємо тотожність $p_j(s,t)p_j(t,u) = p_j(s,u)$:

$$\exp(-\delta t)p_j(s,t)V_j(t) =$$

$$\sum\nolimits_{k\neq j} \int_t^{\infty} \exp(-\delta u))p_j(s,u)a_{jk}(u)\left[c_{j\kappa}(u) + V_k(u)\right] +$$

$$\int_t^{\infty} \exp(-\delta u))p_j(s,u)d\overline{B}_j(u).$$

Продиференціюємо це рівняння за t :

$$-\sum\nolimits_{k\neq j} \exp(-\delta t)p_j(0,t)a_{jk}(t)\left[c_{j\kappa}(t) + V_k(t)\right]dt =$$

$$d\left(\exp(-\delta t)p_j(s,t)V_j(t)\right) =$$

$$\exp(-\delta t)p_j(s,t)[-\delta V_j(t)dt - a_j(t)V_j(t)dt + dV_j(t)],$$

отже

$$\exp(-\delta t)p_j(s,t)[-\delta V_j(t)dt - a_j(t)V_j(t)dt + dV_j(t) +$$

$$\sum\nolimits_{k\neq j} a_{jk}(t)(c_{j\kappa}(t) + V_k(t))dt] = 0.$$

Внаслідок неперервності та скінченності $a_j(t) < \infty$ маємо $p_j(s,t) \uparrow 1, s \uparrow t$. Тому можна вважати, що $p_j(s,t) > 0$. Звідси отримуємо шукане рівняння.

Єдиність розв'язку при довільній крайовій умові є наслідком того, що рівняння Тілі еквівалентні вихідним інтегральним рівнянням внаслідок еквівалентності перетворень – множення на невироджену матрицю та диференціювання $\boxdot$

Означення. *Функцією ризиків переходів називається функція*

$$R_{jk}(t) = c_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t).$$

Теорема. *Рівняння Тілі можна зобразити у вигляді*

$$dV_j(t) = \delta V_j(t)dt - d\overline{B}_j(t) - \sum\nolimits_{k\neq j} R_{jk}(t)a_{jk}(t)dt.$$

Доведення очевидне.

Визначимо функції премій за ризик Π_j^r та премій на збереження Π_j^s з рівнянь

$$d\Pi_j^r(t) = \sum\nolimits_k R_{jk}(t)a_{jk}(t)dt,$$
$$d\Pi_j^s(t) = dV_j(t) - \delta V_j(t)dt.$$

З означення $d\Pi_j^r(t)$ бачимо, що ця частина приросту премій балансує компенсаційні виплати у номінальних цінах.

З означення $d\Pi_j^s(t)$ виводимо, що ця частина забезпечує необхідний приріст резерву премій за період $[t, r]$ у цінах на кінцевий момент:

$$V_j(r) = \exp(\delta(r-t))V_j(t) + \int_t^r \exp(\delta(r-u))d\Pi_j^s(u).$$

Теорема. *Приріст зведеної функції премій дорівнює сумі приростів премій за ризик та на збереження:*

$$d\overline{\Pi}_j(t) \equiv d\Pi_j(t) - dB_j(t) = d\Pi_j^s(t) + d\Pi_j^r(t).$$

Доведення є очевидним наслідком рівнянь Тілі $\boxdot$

Означення. *Функцією приросту вартості компенсацій на інтервалі (t, r) у початкових цінах визначається як*

$$S_j(t, r) = \int_t^r \exp(-\delta(u-t)) \sum\nolimits_{k\neq j} R_{jk}(u)a_{jk}(u)du.$$

Теорема. *При $t < r$ має місце тотожність для приросту зведених виплат та приросту резерву премій:*

$$\overline{B}_j^*(t, r) = \exp(\delta(r-t))V_j(t) - V_j(r) - \exp(\delta(r-t))S_j(t, r).$$

Доведення

Підставимо у рівняння Тілі $t = u$, помножимо на $\exp(-\delta u)$ та проінтегруємо на інтервалі $[t, r]$:

$$\int_t^r \exp(-\delta u)dV_j(u) - \int_t^r \exp(-\delta u)\delta V_j(u)dt =$$
$$-\int_t^r \exp(-\delta u)d\overline{B}_j(u) - \int_t^r \exp(-\delta u) \sum\nolimits_{k\neq j} R_{jk}(u)a_{jk}(u)du,$$

звідки

$$\exp(-\delta r)V_j(r) - \exp(-\delta t)V_j(t) =$$

$$-\exp(-\delta r)\overline{B}_j^*(t,r) - \exp(-\delta t)S_j(t,r) \boxdot$$

Теорема. *Редукована функція витрат задовольняє рівняння*

$$\overline{L}_j(t) = V_j(t) + \exp(-\delta(\tau - t))R_{j\kappa}(\tau) - S_j(t,\tau).$$

Доведення

Запишемо рівняння для редукованої функції витрат з урахуванням попередньої теореми у вигляді:

$$\overline{L}_j(t) - \exp(-\delta(\tau - t))R_{j\kappa}(\tau) =$$

$$\exp(-\delta(\tau - t))\left[\overline{B}_j^*(t,\tau) + V_j(\tau)\right] = V_j(t) + S_j(t,\tau) \boxdot$$

2.3.3 Обчислення резерву премій

Теорема. *Функція резерву премій дорівнює*

$$V_j(t) = \sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta(u-t))p_{jk}(t,u)d\overline{B}_k(u) +$$

$$\sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta(u-t))p_{jk}(t,u) \sum\nolimits_{l \neq k} a_{kl}(u)c_{kl}(u)du.$$

Доведення

Нехай $i \in E$. Помножимо дане рівняння для $V_j(t)$ на $\exp(-\delta t)p_{ij}(0,t)$, та обчислимо з урахуванням рівності $\sum_j p_{ij}(0,t)p_{jk}(t,u) = p_{ik}(0,u)$ суму:

$$\sum\nolimits_j \exp(-\delta t)p_{ij}(0,t)V_j(t) = \sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta u))p_{ik}(0,u)d\overline{B}_k(u) +$$

$$\sum\nolimits_k \int_t^\infty \exp(-\delta u))p_{ik}(0,u) \sum\nolimits_{l \neq k} a_{kl}(u)c_{kl}(u)du.$$

Продиференціюємо це рівняння за t

$$-\sum\nolimits_k p_{ik}(0,t)d\overline{B}_k(t) - \sum\nolimits_k \exp(-\delta t)p_{ik}(0,t) \sum\nolimits_{l \neq k} a_{kl}(t)c_{kl}(t)dt =$$

$$\sum\nolimits_j d(\exp(-\delta t)p_{ij}(0,t)V_j(t)) =$$

$$\sum\nolimits_j \exp(-\delta t)p_{ij}(0,t)[-\delta V_j(t)dt - a_j(t)V_j(t)dt + dV_j(t)],$$

звідки виводимо рівняння Тілі для $V_j(t)$.

З означення отримуємо $V_j(\infty) = 0$. Тому з єдиності розв'язку цих рівнянь виводимо шукане $\boxdot$

Приклад. Нехай $E = \{0,1\}$, $\Pi_1(t) = p\min(t,m)$, $c_{10}(t) = c\mathbb{1}_{t \le m}$. Тоді

$$V_1(t) = \int_t^m \exp(-\delta(u-t))(cp_1(t,u)a_{10}(u)du - p_1(t,u)d\Pi_1(u)) =$$

$$\int_t^m \exp\left(-\delta(u-t)-\int_t^u \mu(x+v)dv\right)(c\mu(x+u)-p)du.$$

Вправа: дообчислити цей інтеграл. Коли є баланс ?

Теорема. *Функція резерву премій задовольняє при $t \geq s$ лінійне рівняння*

$$V_j(s)=V_j(s,t)+\exp(-\delta(t-s))\sum\nolimits_k p_{jk}(s,t)V_k(t),$$

де

$$V_j(s,t)=\sum\nolimits_k \int_s^t \exp(-\delta(u-s))p_{jk}(s,u)d\overline{B}_k(u)+$$

$$\sum\nolimits_k \int_s^t \exp(-\delta(u-s))p_{jk}(s,u)\sum\nolimits_{l\neq k} a_{kl}(u)c_{kl}(u)du.$$

Доведення

Підставимо у теоремі про обчислення резерву премій $t=s$ та запишемо $\int_s^\infty=\int_s^t+\int_t^\infty$. Застосуванням у другому інтегралі рівнянь Колмогорова-Чепмена отримуємо шукане рівняння $\boxdot$

Позначимо через $V(t)$, $V(s,t)$ – відповідні вектори-стовпчики, та через $P(s,t)$ – перехідну матрицю процесу. Тоді отримані рівняння мають вигляд

$$V(s)=V(s,t)+\exp(-\delta(t-s))P(s,t)V(t).$$

Звідси виводимо *ретроспективне зображення резерву премій*:

$$V(t)=\exp(\delta(t-s))P^{-1}(s,t)(V(s)-V(s,t)).$$

2.3.4 Збурення резерву премій

Одночасно з полісом, що має інтенсивності переходів $a_{jk}(t)$ та процентну ставку δ, розглянемо поліс з інтенсивностями $a^*_{jk}(t)$ та ставкою δ^*, при незмінних функціях премій, виплат та компенсацій.

Нехай $V_j(t)$ та $V^*_j(t)$ – функції резерву премій для основної та збуреної моделі поліса, $p^*_{jk}(s,t)$ – перехідна імовірність для збуреної моделі.

Теорема. *Має місце зображення*

$$V_j(t)-V^*_j(t)=(\delta^*-\delta)\sum\nolimits_{k\neq j}\int_t^\infty \exp(-\delta^*(u-t))p^*_{jk}(t,u)V_k(u)du-$$

$$\sum\nolimits_{k\neq j}\int_t^\infty \exp(-\delta^*(u-t))p^*_{jk}(t,u)\sum\nolimits_{l\neq k}(a^*_{kl}(u)-a_{kl}(u))R_{kl}(u)du.$$

Доведення

Відніманням рівнянь Тілі для V та V^* отримуємо

$$d(V_j(t)-V^*_j(t))=\delta^*(V_j(t)-V^*_j(t))dt-$$

$$\sum\nolimits_{k\neq j} a^*_{jk}(t)[(V_k(t)-V^*_k(t))-(V_j(t)-V^*_j(t))]dt+$$

$$\sum\nolimits_{k\neq j}(a^*_{jk}(t)-a_{jk}(t))R_{jk}(t)dt-(\delta^*-\delta)V_j(t)dt.$$

Це рівняння збігається з рівнянням Тілі для $V^*_j(t)$, якщо замінити $V^*_j(t)$ на $V_j(t)-V^*_j(t)$, функцію $c^*_{jk}(t)$ на нуль, а диференціал $-d\overline{B}_j(t)$ замінити на вираз у останньому рядку. Тому шукане зображення випливає з теореми про обчислення функції резерву премій внаслідок єдиності розв'язку рівнянь Тілі $\boxdot$

Наслідок. *Якщо $a^*_{jk}(t)\geq a_{jk}(t)$ для всіх $t\in T, j\neq k\in E$ та $\delta^*\geq\delta$, то виконуються нерівності $V_j(t)\geq V^*_j(t)$.*

2.3.5 Дискретні моделі

Для побудови дискретних моделей страхування (погодинних, щоденних, щотижневих, тощо) можна припустити, що всі наведені вище інтенсивності $a_{jk}(t)$ та миттєві виплати $c_{jk}(t)$ є кусково-сталими та можуть змінюватись лише у дискретні моменти часу $t=nh,\ n\in\mathbb{Z}_+$, а функції премій та виплат $\Pi_j(t), B_j(t)$ також змінюються лише у вказані моменти часу.

Зокрема, рівняння для функції резерву при $h=1$ матиме вигляд

$$V_j(m)=\sum\nolimits_{k\neq j}\sum\nolimits_{u=m}^{\infty}v^{u-m}p_j(m,u)a_{jk}(u)\left[c_{j\kappa}(u)+V_k(u)\right]+$$
$$\sum\nolimits_{u=m}^{\infty}v^{u-m}p_j(m,u)\bar{b}_j(u).$$

Сама функція резерву дорівнює

$$V_j(m)=\sum\nolimits_{k\neq j}\sum\nolimits_{u=m}^{\infty}v^{u-m}p_{jk}(m,u)\sum\nolimits_{l\neq k}a_{kl}(u)c_{kl}(u)+$$
$$\sum\nolimits_{k}\sum\nolimits_{u=m}^{\infty}v^{u-m}p_{jk}(m,u)\bar{b}_k(u).$$

Одна страхова виплата

Функція резерву дорівнює

$$E_{jk}(m,n)=v^{-(n-m)}p_{jk}(m,n).$$

Аннуітет за n років

Функція резерву дорівнює

$$\ddot{a}_{jk}(m,n)=\sum\nolimits_{u=m}^{n-1}v^{u-m}p_{jk}(m,u)=\int_m^n E_{jk}(m,m+u)d[u].$$

Одноразова страхова виплата

Функція резерву дорівнює

$$C_j(m) = \sum_{k\neq j} \sum_{u=m}^{\infty} v^{u-m} p_{jk}(m,u) \sum_{l\neq k} a_{kl}(u) c_{kl}(u).$$

2.4 Дисперсія функції витрат

2.4.1 Дисперсія функції витрат

При аналізі ризиків важливу роль відіграє не тільки аналіз середніх ризиків, а також і їх дисперсій.

Теорема. *Дисперсія редукованої функції витрат дорівнює*

$$D_{tj}\overline{L}_j(t) = E_{tj}(\exp(-2\delta(\tau - t))R^2_{j\kappa}(\tau)) =$$

$$\int_t^{\infty} \sum_{k\neq j} f_j(t,u)\pi_{jk}(u)\exp(-2\delta(u-t))R^2_{jk}(u)du.$$

Доведення

Обчислимо інтегруванням за частинами

$$E_{tj}S_j^2(t,\tau) = \int_t^{\infty} \sum_{k\neq j} S_j^2(t,u)p_j(t,u)a_{jk}(u)du =$$

$$-\int_t^{\infty} S_j^2(t,u)d_u p_j(t,u) = -S_j^2(t,u)p_j(t,u)\mid_t^{\infty} + \int_t^{\infty} p_j(t,u)2d_u S_j(t,u) =$$

$$\int_t^{\infty} p_j(t,u)2\exp(-\delta(u-t))\sum_{k\neq j} R_{jk}(u)a_{jk}(u)du =$$

$$2E_{tj}\exp(-\delta(\tau-t))R_{j\kappa}(\tau).$$

З зображення для редукованої функції витрат маємо

$$D_{tj}\overline{L}_j(t) = E_{tj}(\overline{L}_j(t) - V_j(t))^2 =$$

$$E_{tj}(\exp(-\delta(\tau-t))R_{j\kappa}(\tau) - S_j(t,\tau))^2 = E_{tj}(\exp(-2\delta(\tau-t))R^2_{j\kappa}(\tau)) -$$

$$-2E_{tj}\exp(-\delta(\tau-t))R_{j\kappa}(\tau) + E_{tj}S_j^2(t,\tau) = E_{tj}(\exp(-2\delta(\tau-t))R^2_{j\kappa}(\tau)) \boxdot$$

За означенням функції редукованих витрат

$$D_{tj}L_j(t) = D_{tj}\overline{L}_j(t) + E_{tj}(L_j(t) - \overline{L}_j(t))^2.$$

Теорема. *Функція* $\sigma_j^2(t) \equiv E_{tj}(L_j(t) - \overline{L}_j(t))^2$ *задовольняє рівняння*

$$\sigma_j^2(t) = E_{tj}\exp(-2\delta(\tau-t))s^2_{\kappa}(\tau) + E_{tj}\exp(-2\delta(\tau-t))\sigma^2_{\kappa}(\tau),$$

де знайдена вище функція

$$s_j^2(t) \equiv D_{tj}\overline{L}_j(t).$$

Доведення

За означенням функції редукованих витрат

$$L_j(t) - \overline{L}_j(t) = \exp(-\delta(\tau - t))\left[L_\kappa(\tau) - V_\kappa(\tau)\right],$$

тому

$$\sigma_j^2(t) = E_{tj}\exp(-2\delta(\tau - t))\left[L_\kappa(\tau) - \overline{L}_\kappa(\tau)\right]^2 +$$
$$2E_{tj}\exp(-2\delta(\tau - t))\left[L_\kappa(\tau) - \overline{L}_\kappa(\tau)\right]\left[\overline{L}_\kappa(\tau) - V_\kappa(\tau)\right] +$$
$$E_{tj}\exp(-2\delta(\tau - t))\left[\overline{L}_\kappa(\tau) - V_\kappa(\tau)\right]^2 =$$
$$E_{tj}\exp(-2\delta(\tau - t))\sigma_\kappa^2(\tau) + 0 + E_{tj}\exp(-2\delta(\tau - t))s_\kappa^2(\tau) \boxdot$$

2.4.2 Теорема Хаттендорфа для редукованої функції витрат

Нехай початковий при $t = 0$ стан j є транзієнтним.

Розглянемо редуковану функцію витрат, що дорівнює при $t = 0$:

$$\overline{L}_j(0) = \exp(-\delta\tau))\left[\overline{B}_j^*(\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + V_\kappa(\tau)\right].$$

Визначимо при $m \in \mathbb{Z}_+$ випадкові величини

$$\Delta_j(m) = (\overline{L}_j(0) - b_j(m))1\!\!1_{m\le\tau<m+1} + (b_j(m+1) - b_j(m))1\!\!1_{m+1\le\tau},$$

де функція

$$b_j(m) \equiv \exp(-\delta m)(\overline{B}_j^*(m) + V_j(m)).$$

визначає баланс надходжень та зобов'язань на момент m у цінах на початок.

Теорема. *Має місце зображення*

$$\overline{L}_j(0) = V_j(0) + \sum\nolimits_{m\ge0}\Delta_j(m).$$

Доведення

Нехай $\nu = [\tau]$, тобто $\nu \le \tau < \nu + 1$. Тоді

$$\sum\nolimits_{m\ge0}\Delta_j(m) = \sum\nolimits_{m=0}^{\nu-1}(b_j(m+1) - b_j(m)) + \overline{L}_j(0) - b_j(\nu) + 0 =$$
$$\overline{L}_j(0) - b_j(0) = \overline{L}_j(0) - V_j(0) \boxdot$$

Теорема. *Має місце зображення*

$$\Delta_j(m) = (\exp(-\delta\tau))R_{j\kappa}(\tau) - \exp(-\delta m)S_j(m,\tau))1\!\!1_{m\le\tau<m+1}$$
$$-\exp(-\delta m)S_j(m, m+1)1\!\!1_{m+1\le\tau}.$$

Доведення

Нехай $\tau \geq m+1$. Підставимо у тотожність для приросту резерву премій $t = m < m+1 = r$:

$$\overline{B}_j^*(m, m+1) = \exp(\delta)V_j(m) - V_j(m+1) - \exp(\delta)S_j(m, m+1).$$

Звідси

$$b_j(m+1) - b_j(m) = \exp(-\delta m)(\exp(-\delta)V_j(m+1) - V_j(m)) +$$

$$\exp(-\delta m)(\exp(-\delta)\overline{B}_j^*(m+1) - \overline{B}_j^*(m)) = \exp(-\delta m)S_j(m, m+1),$$

що доводить шукане при $\tau \geq m+1$.

Нехай $\nu = [\tau]$, тобто $\nu \leq \tau < \nu + 1$. Тоді внаслідок зображення для редукованої функції витрат

$$\overline{L}_j(0) - b_j(\nu) - \exp(-\delta\tau))R_{j\kappa}(\tau) + \exp(-\delta\nu)S_j(\nu, \tau) =$$

$$V_j(0) - b_j(\nu) - S_j(0, \tau) + \exp(-\delta\nu)S_j(\nu, \tau) = V_j(0) - b_j(\nu) - S_j(0, \nu) =$$

$$V_j(0) - \exp(-\delta\nu)(\overline{B}_j^*(\nu) + V_j(\nu)) - S_j(0, \nu) = 0,$$

де враховано тотожність для приросту резерву премій $\boxdot$

Теорема. *Доданки у зображенні $\overline{L}_j(0) - V_j(0)$ центровані:*

$$E_{0j}\Delta_j(m) = 0,\ m \geq 0, j \in E.$$

Доведення

Обчислимо за частинами інтеграл

$$\sum\nolimits_{k \neq j} \int_m^{m+1} \exp(-\delta u)p_j(m, u)a_{jk}(u)R_{jk}(u)du =$$

$$\int_m^{m+1} \exp(-\delta m)p_j(m, u)d_u S_j(m, u) =$$

$$\int_m^{m+1} \exp(-\delta m)p_j(m, u)a_j(u)S_j(m, u) +$$

$$\exp(-\delta m)p_j(m, m+1)S_j(m, m+1).$$

Оскільки $\Delta_j(m) = 0$ при $\tau < m$, то досить розглянути

$$E_{0j}(\Delta_j(m) \mid \tau \geq m) =$$

$$\sum\nolimits_{k \neq j} \int_m^{m+1} [\exp(-\delta u)R_{jk}(u) - \exp(-\delta m)S_j(m, u)]p_j(m, u)a_{jk}(u)du$$

$$-\exp(-\delta m)S_j(m, m+1)\int_{m+1}^{\infty} p_j(m, u)a_j(u)du = 0 \ \boxdot$$

Теорема. *Мають місце рівності*

$$D_{0j}\Delta_j(m) = E_{0j}\Delta_j^2(m) = E_{0j}\exp(-2\delta\tau))R_{j\kappa}^2(\tau)1\!\!\mathrm{I}_{m \leq \tau < m+1} =$$

$$\sum\nolimits_{k \neq j} \int_m^{m+1} \exp(-2\delta u) R_{jk}^2(u) p_j(0,u) a_{jk}(u) du.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми про дисперсію функції редукованих витрат та проводиться інтегруванням за частинами з урахуванням рівності для $d_u S_j(v,u)$.

Теорема. *Для всіх* $n < m$

$$\mathrm{Cov}(\Delta_j(n), \Delta_j(m)) = 0.$$

Доведення

Внаслідок центрованості за формулою повної імовірності

$$\mathrm{Cov}(\Delta_j(n), \Delta_j(m)) = E_{oj}\Delta_j(n)\Delta_j(m) =$$
$$E_{oj}(\Delta_j(n)\Delta_j(m) \mid \tau < m) P_{oj}(\tau < m) +$$
$$E_{oj}(\Delta_j(n)\Delta_j(m) \mid \tau \geq m) P_{oj}(\tau \geq m) =$$
$$E_{oj}(\Delta_j(n) \times 0 \mid \tau < m) P_{oj}(\tau < m) -$$
$$-\exp(-\delta n) S_j(n, n+1) E_{oj}(\Delta_j(m) \mid \tau \geq m) P_{oj}(\tau \geq m) = 0 \boxdot$$

З наведених теорем виводимо рівність, яка вже була отримана раніше:

$$D_{0j}\overline{L}_j(0) = \sum\nolimits_{m \geq 0} D_{0j}\Delta_j(m).$$

2.4.3 Теорема Хаттендорфа для функції витрат

Нехай початковий при $t = 0$ стан j є транзієнтним.

Розглянемо функцію витрат, що дорівнює при $t = 0$:

$$L_j(0) = \exp(-\delta\tau)) \left[\overline{B}_j^*(\tau) + c_{j\kappa}(\tau) + L_\kappa(\tau) \right].$$

Визначимо при $m \geq 0$ випадкові величини

$$\Lambda_j(m) = (L_j(0) - b_j(m)) 1\!\!1_{m \leq \tau < m+1} + (b_j(m+1) - b_j(m)) 1\!\!1_{m+1 \leq \tau} =$$
$$(L_j(0) - \overline{L}_j(0)) 1\!\!1_{m \leq \tau < m+1} + \Delta_j(m)$$

де функції $b_j(m)$, $\Delta_j(m)$ визначені вище.

За означенням

$$E_{0j}(\Lambda_j(m) \mid \tau, \kappa) = \Delta_j(m), \; E_{0j}\Lambda_j(m) = E_{0j}\Delta_j(m) = 0.$$

Оскільки $\sum_{m \geq 0} 1\!\!1_{m \leq \tau < m+1} = 1$, то з наведеного зображення для редукованої функції витрат випливає зображення

$$L_j(0) = V_j(0) + \sum\nolimits_{m \geq 0} \Lambda_j(m).$$

Аналогічно попередньому виводимо некорельованість

$$\mathrm{Cov}(\Lambda_j(n), \Lambda_j(m)) = 0.$$