Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійних та лабораторних робіт з дисципліни “Додаткові розділи теорії ймовірностей”

для студентів механіко-математичного факультету

Видавничо-поліграфічний центр
'Київський університет'
2012

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук, проф. Ю.В.Козаченко
д-р фіз.-мат.наук, проф. Є.О.Лєбєдєв,

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету
протокол №3 від 08.10.2012 року

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ до самостійних та лабораторних робіт з дисципліни "Додаткові розділи теорії ймовірностей" / Упорядники: В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко - К., Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет', 2012 - 26 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійних робіт з дисципліни "Додаткові розділи теорії ймовірностей"

для студентів механіко-математичного факультету

Упорядники

Голомозий Віталій Вікторович
Карташов Микола Валентинович
Ральченко Костянтин Володимирович

Зміст

Виконання завдань

Методичні вказівки до самостійних робіт з спеціального курсу "Додаткові розділи теорії ймовірностей" призначені для студентів III курсу механіко-математичного факультету спеціальностей "Математика", "Статистика".

Зміст та структура матеріалу відповідає програмі курсу та вимогам кредитно - модульної системи організації навчального процесу.

Розділи посібника містять завдання самостійних робіт, що входять до складу змістовного модулю курсу: I. Ймовірність 2

Завдання робіт з кожної теми розбито на три групи:

A – задачі для аудиторної роботи,

B – задачі самостійних робіт,

C – додаткові задачі.

Аудиторні завдання з розділу **A** виконуються під час практичних занять. Позааудиторні самостійні завдання з розділів **B** виконуються студентами самостійно на підставі прослуханих лекцій, отриманих у аудиторії, задач розв'язаних в аудиторії, та поточних консультацій з теоретичного матеріалу для самостійних робіт. Завдання з **C** є додатковими для можливої заміни завдань з **A** та **B**.

Якість виконання вказаних завдань контролюється викладачами, оцінюється у балах, та враховується згідно кредитно-модульній системі при оцінюванні рівня знань студентів.

Змістовно матеріал посібника розбитий на теми відповідно до модуля.

1. Імовірнісні простори та випадкові елементи

1. Випадкові послідовності.

Призначення: оволодіння поняттями вимірних просторів на R, R^n та їх побудова. Ймовірнісні простори на R, R^n та їх побудова. Ймовірнісні простори на просторі послідовностей R^∞. Випадкові величини та елементи. Породжені розподіли та сигма-алгебри. Лема про вимірність.

2. Незалежні класи подій та величин.

Призначення: Незалежні системи випадкових подій та їх перетворення. Незалежні системи випадкових величин та їх перетворення. Закон нуля та одиниці Колмогорова. Приклади та наслідки. Закон нуля та одиниці Хьюітта-Севіджа для переставних величин.

2. Умовне математичне сподівання

3. Умовне сподівання відносно сигма-алгебри

Призначення: Умовне математичне сподівання для скінчених сигма-алгебр. Загальне визначення умовного математичного сподівання. Існування та єдиність. Властивості умовного математичного сподівання як оператора від величин. Властивості умовного математичного сподівання в залежності від умови.

4. Умовне сподівання відносно системи величин.

Умовне математичне сподівання відносно систем випадкових величин. Властивості. Функція регресії. Приклади обчислення через сумісну щільність. Нормальна регресія на площині Властивості умовного математичного сподівання в залежності від умов.

3. Асимптотика майже напевне сум випадкових величин

5. Теорема Колмогорова про три ряди.

Призначення: Збіжність випадкових величин майже напевне, за ймовірністю та в середньому. Фундаментальність. Співвідношення між ними. Нерівності Колмогорова. Теореми Колмогорова про один та два ряди Теорема Колмогорова про три ряди. Наслідок про посилений закон великих чисел.

6. Закон повторного логарифму та строго стаціонарні послідовності.

Призначення: ознайомлення з законом повторного логарифму, строго стаціонарними послідовностями. Теорема Гарсіа, Теореми Біркгофа-Хінчина та ергодична теорема для стаціонарних послідовностей. Приклади.

4. Уточнення центральної граничної теореми

7. Характеристичні функції.

Призначення: Вивчення властивостей характеристичних функцій. Формула обертання для характеристичних функцій.

8. Метод характеристичних функцій для уточнення граничних теорем.

Призначення: Метод характеристичних функцій для уточнення центральної граничної теореми. Розклад Еджуорта. Про співвідношення метрик для функцій розподілу та характеристичних функцій. Теорема Бері-Ессеєна.

5. Метод характеристичних функцій для сум незалежних величин

9. Рекурентність блукань.

Вивчення: Цілочисельне блукання на прямій. Решітковість. Моменти досягнення. Загальний критерій рекурентності. Критерій рекурентності через характеристичну функцію стрибка. Критерій рекурентності при скінченому середньому.

10. Нескінченно подільні розподіли та канонічні міри.

Вивчення: Нескінченно подільні розподіли та канонічні міри. Теорема Леві-Хінчина.

Модульний контроль передбачає такі максимальні кількості балів.

Змістовний модуль, тема	Самост	Екз
1.1 Імовірнісні простори та випадкові елементи	12	
1.2 Умовне математичне сподівання	12	
1.3 Асимптотика майже напевне сум випадкових величин	12	
1.4 Уточнення центральної граничної теореми	12	
1.5 Метод характеристичних функцій для сум незалежних величин	12	
1. Всього = 60	60	
Всього по курсу = 100	60	40

Сумарні показники

1-й модуль. 0-60 балів

- виконання самостійних робіт – 0-60 балів
- екзамен - 0-40 балів

До оцінювання приймаються роботи, що виконані не пізніше 2 тижнів з дати викладу відповідного матеріалу лекцій.

Література

1. *Карташов М.В.* Імовірність, процеси, статистика - Київ, ВПЦ Київський університет, 2007.

2. *Скороход А.В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкові процеси - Київ, Вища школа, 1975.

3. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К., 1988.

1. Імовірнісні простори та випадкові елементи

1. Випадкові послідовності

Література: [1,с.162-169]

A

1. Клас циліндричних множин J у $\mathbb{R}^\infty$ не є сигма-алгеброю.

2. Нехай $E \subset \mathbb{R}$ – дискретна множина. Вивести з теореми Колмогорова про побудову міри такі твердження. а) Якщо розподіли $(p_n(x_1, ..., x_n), x_k \in E, n \geqslant 1)$ такі, що $\sum\limits_{x \in E} p_{n+1}(x_1, .., x_n, x) = p_n(x_1, ..., x_n)$, то існує єдина ймовірність $\mathbf{P}$ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$, для якої при всіх $n \geqslant 1$ та $a_k \in E$ має місце рівність $\mathbf{P}(\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_1 = a_1, ...x_n = a_n\}) = p_n(a_1, ..., a_n)$. б) Якщо $(q(x), x \in E)$ та рядки матриці $(p(x, y), x, y \in E)$ є розподілами ймовірностей, то послідовність $p_n(x_1, ..., x_n) = q(x_1)p(x_1, x_2)...p(x_{n-1}, x_n)$ задовольняє умови а) для кожного розподілу q.

3. Функції розподілу F, G такі, що $F(x) \leqslant G(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Довести, що існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ та випадкові величини ξ, η на ньому з функціями розподілу F, G відповідно такі, що $\xi \geqslant \eta$ при всіх ω.

4. Множини $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sup x_n < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists \lim x_n < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum\limits_{n \geqslant 1} |x_n| < a\}$, $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ нескінченно часто$\}$ є борелєвими.

5. Визначимо на $\mathbb{R}^\infty$ метрику $\rho(x, y) = \sum\limits_{n \geqslant 1} 2^{-n} \min(|x_n - y_n|, 1)$, що визначає покоординатну збіжність. Тоді $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ породжується відкритими кулями.

6. Сумісні функції розподілу $F_n(x_1, ..., x_n)$ мають характеристичні функції $\varphi_n(t_1, ...t_n)$. Довести, що послідовність $(F_n, n \geqslant 1)$ є узгодженою тоді і тільки тоді, коли $\varphi_{n+1}(t_1, ...t_n, 0) = \varphi_n(t_1, ...t_n)$, $n \geqslant 1, t_k \in \mathbb{R}$.

B

1. Нехай $a \in \mathbb{R}^\infty$, а $V = (V_{ij}, i, j \geqslant 1)$ матриця у якої $V_{ij} = 0$ при $i \neq j$ а $V_{ii} > 0$. Позначимо вектор $b_n = (a_1, ..., a_n)$, та матрицю $V_n = (V_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Тоді сумісні функції розподілу F_n зі щільностями

$$(2\pi)^{-n/2} |\det V_n|^{-1/2} \exp(-(x - b_n)' V_n^{-1} (x - b_n)/2), \ x \in \mathbb{R}^n,$$

задовольняють умову узгодженості.

2. Нехай $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ для деяких (ξ_k). Тоді $\sigma[\xi_1, ..., \xi_n] = \sigma[S_1, ..., S_n]$.

3. Нехай $\xi, (\xi_n, n \geqslant 1)$ випадкові величини такі, що ξ вимірна відносно породженої сигма-алгебри $\sigma[\xi_n, n \geqslant 1]$. Тоді знайдеться така борелєва функція $g : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, що $\xi = g((\xi_n, n \geqslant 1))$ для всіх ω.

4. Нехай задано послідовність довільних функцій розподілу $(G_n, n \geqslant 1)$. Тоді існує єдина ймовірність $\mathbf{P}$ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ така, що

$$\mathbf{P}(\{x\in\mathbb{R}^\infty : x_1<a_1,...,x_n<a_n\})=\prod_{k=1}^{n} G_k(a_k),\ \forall a_k\in\mathbb{R},\ \forall n\geqslant 1.$$

5. Функції розподілу слабко збігаються: $F_n \to^W F_0, n\to\infty$. Довести, що знайдеться ймовірнісний простір $(\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P})$ та випадкові величини $\xi_n, n\geqslant 0$, на ньому такі, що ξ_n має функцію розподілу F_n та $\xi_n \to^{\mathbf{P}1} \xi_0, n\to\infty$.

6. Послідовності $(\xi_n),(\eta_n)$ мають однакові скінченно-вимірні розподіли: $F_{(\xi_1,...,\xi_n)}(x_1,...,x_n)= F_{(\eta_1,...,\eta_n)}(x_1,...,x_n), \forall x_k\in\mathbb{R},\forall n\geqslant 1$, та $\xi_n\to^{\mathbf{P}}\xi$, $n\to\infty$. Довести, що $\eta_n\to^{\mathbf{P}}\eta$ для деякої випадкової величини $\eta\simeq\xi$.

C

1. Нехай $C(\mathbb{Q})$ – простір неперервних функцій на множині раціональних чисел $\mathbb{Q}$, з борелєвою сигма-алгеброю $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\mathbb{Q})$. Функція Q задана на циліндрах $C_F=\{x: x_t\in B_t, t\in F\}$ при скінчених $F\subset\mathbb{Q}$ та довільних $B_t\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ рівністю $Q(C_F)=\prod_{t\in F} G(B_t)$, де G – імовірнісна міра Лебега – Стілтьєса на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Довести, що Q продовжується до адитивної імовірності на алгебру циліндрів, що породжена множинами C_F, однак ця ймовірність не є σ-адитивною.

2. Нехай T – довільна множина. Розглянемо простір $\mathbb{R}^T=\{x: T\to\mathbb{R}\}$. Нехай $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)\equiv\sigma[\{x: x(t)<a\}, a\in\mathbb{R}, t\in T]$. Довести, що $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)=\cup_{\tau\subset T}\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\tau)$, де об'єднання береться по зліченним підмножинам множини T, а сигма-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\tau)$ визначається так само, як і $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$. У випадку $T=[0,1]$, довести, що $S_a\equiv\{x:\sup_{t\in[0,1]}x(t)<a\}\notin\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)$. Одночасно перетин $S_a\cap C([0,1])$ вже належить $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^T)$.

3. Для кожної точки $x=(x_1,...,x_n,...)\in\mathbb{R}^\infty$, визначимо $\theta x=(x_2,...,x_{n+1},...)\in\mathbb{R}^\infty$. Довести, що клас множин $\mathfrak{F}=\{B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty): B=\theta^{(-1)}(B)\}$ є сигма-алгеброю. Описати $\mathfrak{F}$-вимірні скалярні функції.

4. (**Теорема Тулчи-Іонеску**) Нехай $Q_{n+1}(x_1,...,x_n,B)$ при кожному $n\geqslant 1$ є вимірною функцією вектора $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ для всіх $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, та ймовірністю від $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ для всіх $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Нехай також Q_1 - імовірність на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Довести без використання теореми Колмогорова, що на вимірному просторі $(\mathbb{R}^\infty,\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty))$ існує ймовірність $\mathbf{P}$ така, що

$$\mathbf{P}(\{x\in\mathbb{R}^\infty : x_1<a_1,...,x_n<a_n\})=$$
$$\int_{-\infty}^{a_1} Q_1(dx_1)\int_{-\infty}^{a_2} Q_2(x_1,dx_2)...\int_{-\infty}^{a_n} Q_n(x_{n-1},dx_n).$$

Для цього визначимо послідовно функції

$P_n^n(x_1,...,x_n,B)\equiv 1\!\!\mathrm{I}_{(x_1,...,x_n)\in B},\ B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$,

та при $1\leqslant k<n, B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

$$P_k^n(x_1,...,x_k,B)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} Q_{k+1}(x_1,...,x_k,dx_{k+1})P_{k+1}^n(x_1,...,x_{k+1},B).$$

а) Довести, що $P_k^n(x_1,...,x_k,B) = P_k^{n+l}(x_1,...,x_k,B\times\mathbb{R}^l)$ при $l \geqslant 0, k \leqslant n$. б) Визначимо $P_k(x_1,...,x_k,C) \equiv P_k^n(x_1,...,x_k,B)$ для циліндрічних множин $C = J_n(B), B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, та $(x_1,...,x_k) \in \mathbb{R}^k$. Перевірити, що це визначення не залежить від конкретного зображення C. в) Довести, що $P_k(x_1,...,x_k,C)$ є адитивною функцією від $C \in J$ та є борелєвою функцією від $(x_1,...,x_k) \in \mathbb{R}^k$. г) Ця функція задовольняє рівність

$$P_k(x_1,...,x_k,C) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q_{k+1}(x_1,...,x_k,dx_{k+1})P_{k+1}(x_1,...,x_{k+1},C).$$

д) Функція $P_k(x_1,...,x_k,C)$ є сигма-адитивною від $C \in J$. е) Продовження P_k на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma[J]$ є ймовірністю та борелевою функцією $(x_1,...,x_k) \in \mathbb{R}^k$. ж) Шукана ймовірність має вигляд

$$\mathbf{P}(B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(dx_1)P_1(x_1,B), B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

з) Перевірити, що в цьому доведенні не використовуються топологічні структури у $\mathbb{R}^\infty$.

5. Нехай $a \in \mathbb{R}^\infty$, а $V = (V_{ij}, i,j \geqslant 1)$ симетрична додатно визначена матриця. Позначимо вектор $b_n = (a_1,...,a_n)$, та матрицю $V_n = (V_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n)$. Тоді сумісні функції розподілу F_n зі щільностями

$$(2\pi)^{-n/2}\left|\det V_n\right|^{-1/2}\exp(-(x-b_n)'V_n^{-1}(x-b_n)/2),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

задовольняють умову узгодженості.

2. Незалежні класи подій та величин

Література: [1,с.170-174]

А

1. Сигма-алгебри $(\mathfrak{F}_k, k = \overline{1,n})$ незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли при кожному $k > 1$ незалежні сигма-алгебри $(\mathfrak{F}_k,\ \sigma[\cup_{i<k}\mathfrak{F}_i])$.

2. Нехай $\mathfrak{F}_n = \{\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_n \in B\}, B \in \mathfrak{B}[\mathbb{R}]\} \subset \mathfrak{B}[\mathbb{R}^\infty]$. Довести, що залишкова σ-алгебра $\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathfrak{F}_n = \cap_{n\geqslant 1}(\mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}[\mathbb{R}^\infty])$.

3. Нехай $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$ – $\pi-$клас подій, а H – простір $\mathfrak{F}$-вимірних дійсних функцій, що має такі властивості: а) $\mathbb{1}_A \in H$ при $A \in \mathfrak{C}$, б) $f+g \in H$ та $cf \in H$ для всіх $f,g \in H,\ c \in \mathbb{R}$, в) з $g_n \in H$ та $0 \leqslant g_n \uparrow g, n \to \infty$, випливає включення $g \in H$. Довести, що простір H містить всі $\sigma[\mathfrak{C}]$-вимірні обмежені функції. Вивести звідси теорему про вимірність відносно σ-алгебри, що породжена величиною.

4. Дискретні випадкові величини $(\xi_1,...,\xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi_1 = x_1,...,\xi_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\xi_k = x_k)$ для всіх x_k.

5. Нехай F_k – функції розподілу зі щільностями f_k, і $|a| < 1$. Довести, що а) функція $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)(1 + a(2\,F_1(x)-1)(2\,F_2(y)-1))$

є сумісною щільністю розподілу деякого випадкового вектора (ξ_1, ξ_2), б) величини ξ_k мають щільності f_k та є залежними при $a \neq 0$.

6. Випадкова величина ξ та борелева функція g такі, що випадкові величини ξ та $g(\xi)$ незалежні. Довести, що $g(\xi) = c$ м.н. для деякої сталої c.

B

1. Випадкові величин $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні у сукупності. Довести, що радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n \geqslant 1} \xi_n \, x^n$ є м.н. сталою.

2. Випадкові вектори $X = (\xi_1, ..., \xi_n)$ та $Y = (\eta_1, ..., \eta_m)$ незалежні, і кожний з них складається з незалежних випадкових величин. Довести, що а) вектор $(\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_m)$ містить незалежні у сукупності випадкові величини, б) обернене твердження також має місце.

3. Випадкові величини $(\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні в сукупності тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{E} g_1(\xi_1)...g_n(\xi_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} g_k(\xi_k)$ для всіх $g_k \in C_b(\mathbb{R})$.

4. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2 \simeq Exp(1)$ незалежні та мають однаковий показниковий розподіл із параметром 1. Довести що величини а) $\min(\xi_1, \xi_2)$ та $|\xi_1 - \xi_2|$ незалежні, б) $\xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ та $\xi_1 + \xi_2$ незалежні. в) Знайти відповідні сумісні розподіли.

5. Якщо $(\mathfrak{C}_\theta, \theta \in \Theta)$ – незалежні класи подій, а $\Upsilon \subset \Theta$, то $(\mathfrak{C}_\theta, \theta \in \Upsilon)$ також є незалежними класами подій.

6. Навести приклад послідовності випадкових величин (ξ_n) та залишкової події $A \in \overline{\lim_{n\to\infty}} \sigma[\xi_n]$ такої, що $\mathbf{P}(A) = 1/2$.

C

1. Нехай $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}$ під-сигма-алгебри випадкових подій такі, що $\mathfrak{F}_1 \subset \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]$ та $\mathfrak{F}_2 \subset \sigma[\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_3]$, причому сигма-алгебри $\mathfrak{F}_3$ та $\sigma[\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2]$ незалежні. Довести, що сигма-алгебри $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ нерозрізнимі: для кожної події $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ знайдеться $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ така, що $\mathbf{P}(A_1 \Delta A_2) = 0$.

2. Випадкові величин $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні у сукупності, а послідовність $(n_k, k \geqslant 1)$ строго зростає. Довести, що випадкові величини $(g_k(\xi_{n_k}, ..., \xi_{n_{k+1}-1}),\ k \geqslant 1)$ незалежні для борелєвих функції g_k.

3. Випадкові величини (ξ_n) незалежні у сукупності. а) Довести, що величини $\overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n$ є сталими м.н. б) Якщо $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, та $0 < b_n \to \infty$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n/b_n, \underline{\lim_{n\to\infty}} S_n/b_n$ також є сталими м.н.

4. Величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_n = -1)$, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ – блукання Бернуллі. Тоді $\mathbf{P}(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{S_n = 0\}) \in \{0, 1\}$. Ця ймовірність нульова тоді й тільки тоді, коли $p \neq 1/2$.

5. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та однаково розподілені, та $\mathbf{E}\xi_1 = 0 < \mathbf{E}\xi_1^2 < \infty$. Довести, що $\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-1/2} \, |\xi_1 + ... + \xi_n| = \infty$ м.н.

6. Вказати незалежні класи подій $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ такі, що $\sigma[\mathfrak{C}_1]$, $\sigma[\mathfrak{C}_2]$ не є незалежними.

7. Побудувати ймовірнісний простір та величини ξ, η на ньому, що мають рівномірний на $[0,1]$ розподіл, $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 0$, та не є незалежними.

8. Нехай $(P_n, n \geqslant 0)$ - послідовність ймовірнісних мір на вимірному просторі $(\Omega, \mathfrak{F})$. Довести, що $\{B \in \mathfrak{F} : \lim\limits_{n\to\infty} P_n(B) = P_0(B)\}$ є d-класом.

9. Нехай P, Q - ймовірнісні міри на вимірному просторі $(\Omega, \mathfrak{F})$, де $\mathfrak{F} = \sigma[\mathfrak{C}]$ для деякого π-класу $\mathfrak{C}$. Довести, що зі збіжності звужень $P|_{\mathfrak{C}} = Q|_{\mathfrak{C}}$ випливає рівність $P = Q$.

2. Умовне математичне сподівання

3. Умовне сподівання відносно сигма-алгебри

Література: [1,с.180-193]

A

1. Розглянемо ймовірнісний простір $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$ з імовірністю $\mathbf{P}$, що задається щільністю $f : \mathbf{P}(B) = \int\limits_B f(x)dx$. Величина ξ дорівнює $\xi(\omega) = g(\omega)$. Обчислити умовне сподівання $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$, якщо $\mathfrak{C}$ дорівнює:
а) $\sigma[\{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : B = B + 1\}]$, б) $\sigma[\{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) : B = -B\}]$,
в) $\sigma[\{x : \sin(x) < a\}, a \in \mathbb{R}]$, г) $\sigma[\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})\}, k \in \mathbb{Z}, n \geqslant 1]$.
Тут за означенням $h(B) = \{h(x), x \in B\}$.

2. Величина ξ має строго додатну щільність f. Обчислити $\mathbf{P}(\xi < x \mid |\xi|)$.

3. Нехай $\Delta = \{D_1, D_2, ..., D_n\}$ - розбиття простору Ω. Побудувати найменші: а) алгебру, б) сигма-алгебру, що містять Δ.

4. Випадкова величина ξ невід'ємна. Довести, що $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}) < \infty$ м.н. тоді й тільки тоді, коли міра $Q(A) \equiv \mathbf{E}\xi 1\!\!1_A$ при $A \in \mathfrak{C}$ є сигма-скінченною.

5. Якщо послідовність$(\xi_n, n \geqslant 1)$ рівномірно інтегровна та $\xi_n \to \xi, n \to \infty$, то $\mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}) \to^{\mathbf{P}} \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$.

6. Довести, що оператор умовного сподівання є стискаючим у просторі L_p: $\mathbf{E}(|\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})|)^p \leqslant \mathbf{E}(|\xi|^p),\ p \geq 1$.

B

1. У припущенні квадратичної інтегровності ξ вивести умову балансу у означенні умовного сподівання з його екстремальної властивості $\mathbf{E}(\xi - \zeta)^2 \leqslant \mathbf{E}(\xi - \zeta - \varepsilon\eta)^2$ для всіх $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та всіх $\mathfrak{C}$-вимірних квадратично інтегровних η.

2. Випадкова величина ξ інтегровна. Довести, що сім'я випадкових величин $(\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}), \mathfrak{C} \subset \mathfrak{F})$ рівномірно інтегровна.

3. Визначимо умовну дисперсію: $\mathbf{D}(\xi \mid \mathfrak{C}) \equiv \mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}))^2 \mid \mathfrak{C})$. Довести тотожність $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\mathrm{D}(\xi \mid \mathfrak{C}) + \mathbf{D}\mathrm{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$.

4. Для величин ξ, η існує регулярна умовна ймовірність $P(x, B), B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, така, що $P(x, B) = \mathbf{P}(\xi \in B \mid \eta = x)$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}$ за мірою $\mathbf{P}(\eta \in \cdot)$. Довести, що для довільної борелєвої обмеженої функції g виконується така рівність: $\mathbf{E}(g(\eta, \xi) \mid \eta = x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) P(x, dy)$ для майже всіх x.

5. Довести нерівність Йенсена для опуклої функції g лише на підставі нерівності $g(x) \geqslant g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$.

6. Довести нерівність Коші: $(\mathbf{E}(\xi\eta \mid \mathfrak{C}))^2 \leqslant \mathbf{E}(\xi^2 \mid \mathfrak{C})\mathbf{E}(\eta^2 \mid \mathfrak{C})$ м.н.

C

1. Довести, що умовне математичне сподівання за умови події
$\mathbf{E}(\xi \mid B)$ має всі властивості математичного сподівання.

2. Нехай $|\Omega| = n$. Позначимо через $d(n)$ кількість різних розбиттів множини Ω. Довести, що $d(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k d(k)$, де $d(0) = 1$.

3. Довести що для кожної обмеженої $\sigma[\Delta]$-вимірної величини η справедлива тотожність $\mathbf{E}(\xi\eta \mid \Delta) = \eta\mathbf{E}(\xi \mid \Delta)$.

4. У припущенні квадратичної інтегровності ξ вивести теорему про існування та єдиність умовного математичного сподівання з теореми про існування проекції на замкнений підпростір у гільбертовому просторі $L_2(\mathbf{P})$.

5. Довести, що для $\mathfrak{C}$-вимірної величини ζ та обмеженої борелівської g має місце рівність $\mathbf{E}(g(\xi, \zeta) \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{E}(g(\xi, y) \mid \mathfrak{C}) \mid_{y=\zeta}$.

6. Розглянемо ймовірнісний простір $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n), \mathbf{P})$ з імовірністю $\mathbf{P}$, що задається сумісною щільністю $f : \mathbf{P}(B) = \int_B f(x)dx$. Сигма-алгебра переставних множин $\mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ містить всі борелєві множини B такі, що $\pi(x) \in B$ для всіх $x \in B$ та перестановок π координат векторів $x \in \mathbb{R}^n$. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$ для величин вигляду: а) $\xi(\omega) = \omega_1$, б) $\xi(\omega) = \omega_1\omega_2$, в) $\xi(\omega) = \omega_1^2$.

7. Випадкові величини (ξ_n) інтегровні мажоровано зверху: $\xi_n \leqslant \eta$, $\mathbf{E}\,|\eta| < \infty$. Довести, що $\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}) \leqslant \mathbf{E}(\overline{\lim_{n\to\infty}} \xi_n \mid \mathfrak{C})$ м.н.

8. Випадкові величини $\xi, (\xi_n, n \geqslant 1)$ такі, що $\xi_n \to \xi, n \to \infty$, $|\xi_n| \leqslant \eta$, $\mathbf{E}\eta < \infty$, а сигма-алгебри $\mathfrak{C}_k$ не зростають за k та $\cap\mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}_\infty$. Довести, що $\mathbf{E}(\xi_n \mid \mathfrak{C}_k) \to \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C}_\infty), n, k \to \infty$, м.н. та у середньому.

9. Випадкова величина ξ та σ-алгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$ такі, що
$\mathbf{E}(\exp(it\xi) \mid \mathfrak{C}) = \exp(-t^2/2), \forall t \in \mathbb{R}$. Довести, що ξ – стандартна нормальна і не залежить від $\mathfrak{C}$.

10. Довести такі формули повної ймовірності: а) $\mathbf{P}(A) =$
$\mathbf{E}\mathrm{P}(A \mid \mathfrak{C})$ для всіх $A \in \mathfrak{F}$, б) $\mathbf{E}g(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(g(\xi) \mid \eta = y)dF_\eta(y)$ за умови інтегровності $g(\xi)$.

11. Довести узагальнену формулу Байєса: для $A \in \mathfrak{F}, H \in \mathfrak{C}$
$\mathbf{P}(H \mid A) = (\mathbf{E}1\!\!1_H \mathbf{P}(A \mid \mathfrak{C})) / \mathbf{E}\mathrm{P}(A \mid \mathfrak{C})$.

12. Нехай $(\zeta_k, k = \overline{1,n})$ – стандартний нормальний вектор. Довести, що його умовний розподіл за умови, що фіксовані суми $\sum_{k=1}^{n} \zeta_k, \sum_{k=1}^{n} \zeta_k^2$, є рівномірним на відповідній $(n-2)$-вимірній множині.

13. Сигма-алгебри $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$ називаються умовно незалежними за умови $\mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}$, якщо $\mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \mid \mathfrak{F}_3) = \mathbf{P}(F_1 \mid \mathfrak{F}_3)\mathbf{P}(F_2 \mid \mathfrak{F}_3)$ м.н. для всіх $F_i \in \mathfrak{F}_i$. Довести, що вказана умовна незалежність має місце тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(F_1 \mid \sigma[\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3]) = \mathbf{P}(F_1 \mid \mathfrak{F}_3)$ м.н. для всіх $F_1 \in \mathfrak{F}_1$.

14. Нехай ξ – випадковий елемент зі значеннями у повному сепарабельному метричному просторі E з борелєвою сигма-алгеброю $\mathfrak{B}(E)$. Довести, що існує регулярна умовна ймовірність $P(B, \omega) = \mathbf{P}(\xi \in B \mid \mathfrak{C})$.

15. Величини $(\xi_k, k \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені та мають неперервну функцію розподілу F. Знайти $\mathbf{P}(\xi_1 < x \mid \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k)$.

16. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 вимірні відносно σ-алгебр $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ відповідно, а параметри $p, q, r \in (0, \infty]$ такі, що $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$. Довести:

$$|\mathbf{E}\xi_1\xi_2 - \mathbf{E}\xi_1\mathbf{E}\xi_2| \leqslant 8(\mathbf{E}\,|\xi_1|^p)^{1/p}\,(\mathbf{E}\,|\xi_2|^q)^{1/q}\,(\alpha(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2))^{1/r},$$

де $\alpha(\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) \equiv \sup(|\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)|,\ A_k \in \mathfrak{C}_k)$.

4. Умовне сподівання відносно системи величин

Література: [1,с.194-197]

A

1. Випадкові величини ξ, η незалежні та однаково розподілені. Обчислити умовне сподівання $\mathbf{E}(\xi \mid \xi + \eta)$.

2. Довести рівність $m(y) = \mathbf{E}(\xi \mid \{\eta = y\}) \equiv \mathbf{E}(\xi 1\!\!\mathrm{I}_{\{\eta = y\}})/\mathbf{P}(\eta = y)$ для випадку, коли $\mathbf{P}(\eta = y) > 0$.

3. $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}(\xi, \mathbf{E}(\eta \mid \xi))$ для квадратично інтегровних величин ξ, η.

4. Величина ξ рівномірно розподілена на $[0, \pi]$. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \sin \xi)$.

5. Випадкова величина ξ має строго додатну щільність f. Обчислити $\mathbf{E}(\xi \mid \sin \xi)$, $\mathbf{E}(\xi \mid \xi^2)$, $\mathbf{E}(\xi \mid |\xi|)$.

6. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені та мають функцію розподілу F, а $\xi_{(n)} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi_k$. Довести, що:

$$\mathbf{P}(\xi_k < x \mid \xi_{(n)} = t) = (n-1)F(x)/nF(t) 1\!\!\mathrm{I}_{x \leqslant t} + 1\!\!\mathrm{I}_{x > t} \text{ при } k \leqslant n.$$

B

1. Випадкова величина $\xi \geqslant 0$, сигма-алгебра $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$, $\zeta = \mathbf{E}(\xi \mid \mathfrak{C})$, причому $\zeta < \infty$ м.н. Довести, що $\mathbf{P}(\xi > 0, \zeta = 0) = 0$, тобто дріб ξ/ζ визначений м.н. та задовольняє нерівність $\mathbf{E}(\xi/\zeta \mid \mathfrak{C}) \leqslant 1$ м.н. Зокрема, $\mathbf{E}(\xi/\zeta) \leqslant 1 < \infty$.

2. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести, що S_k та S_l умовно незалежні за умови S_n при $k < n < l$, тобто $\forall A, B \in \mathfrak{B}[\mathbb{R}]$

$\mathbf{P}(S_k \in A, S_l \in B \mid S_n = y) = \mathbf{P}(S_k \in A \mid S_n = y)\mathbf{P}(S_l \in B \mid S_n = y)$.

3. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені та інтегровні. Довести, що а) $\mathbf{E}(\xi_k \mid S_n) = S_n/n$ м.н при $k \leqslant n$, де $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. б) $\mathbf{E}(\xi_1 \mid S_k, k \geqslant n) = S_n/n$ м.н. в) У припущенні, що $\xi_1 \in \mathbb{N}$, вивести звідси рекурентні рівняння

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} i\mathbf{P}(\xi_1 = i)\mathbf{P}(S_{n-1} = k - i)$$

для послідовного обчислення розподілів сум S_n.

4. Нехай величини ξ, η та борелєва функція $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такі, що величина $g(\xi, \eta)$ інтегровна, причому η вимірна відносно сигма-алгебри $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$. Довести, що $\mathbf{E}(g(\xi, \eta) \mid \mathfrak{C}) = \mathbf{E}(g(\xi, y) \mid \mathfrak{C}) |_{y=\eta}$.

C

1. Узагальнити твердження теореми про лінійну регресію на площині на випадок нормального вектора $(\xi_1, \xi_2) \simeq N_{d_1+d_2}(\mu_1, \mu_2, V_1, V_2, Q_{12})$.

2. Нехай $(\xi_1, \xi_2) \simeq N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Тоді а) частка дисперсії $\mathbf{D}(\xi_1)$, що пояснюється оптимальним прогнозом: $\mathbf{D}(\mathbf{E}(\xi_1 \mid \xi_2))/\mathbf{D}(\xi_1) = \rho^2$, б) $\mathbf{E}(|(\xi_1 - \mu_1)/\sigma_1| \mid |\xi_2|) = 2(\sqrt{1-\rho^2} + \rho \arcsin \rho)/\pi$.

3. Асимптотика майже напевне сум випадкових величин

5. Теорема Колмогорова про три ряди

Література: [1,с.198-204]

A

1. (**B.1**) Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні у сукупності, $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$. Ряд $\sum_{n \geqslant 1} a_n \xi_n$ збігається м.н. тоді й тільки тоді, коли $\sum_{n \geqslant 1} a_n^2 < \infty$.

2. Навести приклад (необмеженої) послідовності незалежних квадратично інтегровних центрованих величин $(\xi_n, n \geqslant 1)$ таких, що ряд $\sum_{n \geqslant 1} \xi_n$ збігається м.н., і одночасно $\sum_{n \geqslant 1} \mathbf{E}\xi_n^2 = \infty$.

3. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні у сукупності, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, причому $\mathbf{P}(S_n - S_k \geqslant a) \geqslant b > 0$ для всіх $k < n$. Довести нерівність $\mathbf{P}(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon) \leqslant b^{-1}\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon + a)$.

4. Величини (ξ_n) незалежні, $\mathbf{E}\xi_n = 0,\ \mathbf{E}\xi_n^2 < \infty,\ S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, а послідовність $a_n > 0$ неспадає. Тоді $\mathbf{P}(\max\limits_{k\leqslant n} |S_k|/a_k > 1) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{-2}\mathbf{E}\xi_k^2$.

5. Випадкові величини (ξ_n) незалежні і невід'ємні, причому $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\xi_n/(1+\xi_n) < \infty$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ збігається м.н.

6. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні, нормально розподілені, $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ збігається м.н. тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$.

B

1. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні та квадратично інтегровні. Довести, що: а) ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ збігається у середньому квадратичному тоді й тільки тоді, коли збігаються ряди $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\xi_n,\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{D}\xi_n$. б) За умов а) ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ збігається м.н.

2. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ та числова послідовність ε_n такі, що $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n < \infty$ і $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(|\xi_n| \geqslant \varepsilon_n) < \infty$. Довести збіжність: $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\xi_n| < \infty$ м.н.

3. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні та $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$, $\mathbf{P}(\xi_n = n2^n) = \mathbf{P}(\xi_n = -n2^n) = 2^{-2n-1}$. Довести, що $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-2}\mathbf{D}\xi_n = \infty$, однак для послідовності (ξ_n) виконується посилений закон великих чисел.

4. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні. Знайти у найпростішому вигляді необхідні та достатні умови збіжності майже напевне ряду $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$, якщо: а) $\xi_n \simeq Exp(\lambda_n)$, б) $\xi_n \simeq \pi(\lambda_n)$, в) $\xi_n \simeq N(\mu_n, \sigma_n^2)$, г) $\xi_n \simeq \gamma(\lambda_n, \alpha_n)$, д) $\xi_n = c_n\eta_n$, де η_n мають розподіл Коші.

5. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{E}\xi_n = 0,\ \mathbf{E}\xi_n^2 < \infty$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести для $\varepsilon > 0$, що $\mathbf{P}(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{E}S_n^2/(\varepsilon^2 + \mathbf{E}S_n^2)$.

6. Нехай $\xi_n \to^{\mathbf{P}} 0, n \to \infty$. Тоді знайдеться числова послідовність c_n така, що $\sum\limits_{n\geqslant 1} |c_n| = \infty$ та ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n\xi_n$ збігається м.н.

7. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, інтегровні і $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ збігається м.н. тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\xi_n^2/(1+|\xi_n|) < \infty$.

C

1. Величини (ξ_n) незалежні та $\mathbf{E}\xi_n = 0,\ \sum\limits_{k\geqslant 1} \mathbf{E}|\xi_k|/k < \infty$. Довести: а) для $\varepsilon > 0$ нерівність $\mathbf{P}(\sum\limits_{k=n}^{m} |\xi_k|/k > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-1} \sum\limits_{k=n}^{m} \mathbf{E}|\xi_k|/k$. б) збіжність м.н. ряду $\sum\limits_{k=n}^{m} |\xi_k|/k$, в) посилений закон великих чисел для (ξ_n).

2. Знайти множину тих $\omega \in \Omega$, для яких збігається ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n(\omega)$.

3. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ такі, що $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbf{E}|\xi_n| < \infty$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ збігається м.н.

4. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні. Довести, що умови збіжності ряду $\sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n$ а) м.н., б) за ймовірністю, в) слабкої, еквівалентні.

5. Випадкові величини $\varkappa_n$ незалежні та $\mathbf{P}(\varkappa_n = 0) = \mathbf{P}(\varkappa_n = 1) = 1/2$. а) Довести, що ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-n}\varkappa_n = \eta$ збігається м.н., а його сума η рівномірно розподілена на $[0,1]$. б) Функція розподілу суми ряду $\zeta = \sum\limits_{n\geqslant 1} 3^{-n}\varkappa_n$ неперервна, але не є абсолютно неперервною.

6. Випадкові величини (ξ_n) незалежні, інтегровні і $\mathbf{E}\xi_n = 0$. Довести, що для виконання закону великих чисел: $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} 0,\ n \to \infty$, необхідно і достатньо, щоб при $n \to \infty$: а) $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|\xi_k| \geqslant n) = o(n)$, б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}\xi_k^n = o(n)$, в) $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{D}\xi_k^n = o(n^2)$, де $\xi_k^n = \xi_k \mathbb{1}_{\{|\xi_k|<n\}}$.

6. Закон повторного логарифму та строго стаціонарні послідовності

Література: [1,с.205-216]

A

1. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні та мають стандартний нормальний розподіл. Довести зображення: а) $\xi_n = O(\sqrt{\ln n}), n \to \infty$, м.н., б) $\mathbf{P}(\xi_n = o(\sqrt{\ln n}), n \to \infty) = 0$, в) $\mathbf{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n/\sqrt{2\ln n} = 1) = 1$.

2. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$, а $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n/\sqrt{n} = \infty$ м.н.

3. Довести, що інваріантні множини належать залишковій сигма-алгебрі: $I(\mathbb{R}^\infty) \subset \cap_{n\geqslant 1}(\mathbb{R}^n \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty))$.

4. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають розподіл Бернуллі $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$. Довести, що послідовність $\varphi_n = 2n \ln\ln n + c \ln\ln\ln n$ є верхньою при $c > 3$, та нижньою при $c \leqslant 1$.

5. Довести твердження ергодичної теореми для послідовності випадкових величин $\eta_n = g(\xi_n, \xi_{n+1}, ..., \xi_{n+m-1})$, що утворена строго стаціонарною ергодичною послідовністю ξ та борелєвою функцією $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

6. Навести приклад строго стаціонарної не ергодичної послідовності.

B

1. Вивести з теореми про закон нуля та одиниці Колмогорова ергодичність послідовності незалежних випадкових величин.

2. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають показниковий розподіл $Exp(1)$. Довести граничні співвідношення:
а) $\lim_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (\xi_k/\ln k) = 1$ м.н., б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \xi_n/\ln n \leqslant 1$ м.н.,
в) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \max\limits_{\sqrt{n}\leqslant k\leqslant n} (\xi_k/2k) \geqslant 1$ м.н.

3. Для строго стаціонарної послідовності $(\xi_n, n \geqslant 1)$ виконується при всіх $k, l \geqslant 1$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$, $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^l)$ така умова перемішування:
$\mathbf{P}((\xi_1, ..\xi_k) \in B, (\xi_{n+1}, ..\xi_{n+l}) \in C) \to \mathbf{P}((\xi_1, ..\xi_k) \in B)\mathbf{P}((\xi_1, ..\xi_l) \in C)$, при $n \to \infty$. Довести, що дана послідовність ергодична. Вивести звідси ергодичність послідовності незалежних однаково розподілених величин.

4. Випадкові величини (ξ_n) незалежні однаково розподілені Довести еквівалентність: $\mathbf{E} \sup_{n\geqslant 1} |\xi_n/n| < \infty$ тоді й тільки тоді, коли
$\mathbf{E}\,|\xi_1|\,(\ln|\xi_1|)^+ < \infty$.

5. Для строго стаціонарної послідовності $(\xi_n, n \geqslant 1)$ залишкова сигма-алгебра $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma[\xi_n] \equiv \cap_{n\geqslant 1}\sigma[\xi_k, k \geqslant n]$ містить лише події нульової чи одиничної ймовірності. Довести, що дана послідовність ергодична.

6. Строго стаціонарна послідовність $(\xi_n, n \geqslant 1)$ є гауссовою (тобто будь-яка скінченна її підпослідовність є нормальним вектором), причому $\mathbf{E}\xi_n = 0$ та $\mathbf{E}\xi_n\xi_{n+k} = r(k) \to 0, k \to \infty$. Довести, що ця послідовність є ергодичною.

C

1. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{0,2})$ незалежні однаково розподілені, і мають медіану m, тобто $\mathbf{P}(\xi_0 < m) = \mathbf{P}(\xi_0 > m) = 1/2$. Довести при $|t| \geqslant m$ нерівність $\mathbf{P}(|\xi_0| \geqslant t) \leqslant 2\mathbf{P}(|\xi_1 - \xi_2| \geqslant t - |m|)$.

2. Величини $(\xi_k, k \geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_k = \pm 1) = 1/2$, $S_k = \xi_1 + ... + \xi_k$. Довести, що $\mathbf{P}(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant r) = 2\mathbf{P}(S_n > r) + \mathbf{P}(S_n = r)$ при $r \in \mathbb{Z}_+$.

3. Випадкові величини (ξ_n) незалежні та мають розподіл Пуассона $\pi(\lambda)$. Довести, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (\xi_n \ln\ln n)/\ln n = 1$ м.н.

4. Перевірити, що твердження теореми Біркгофа-Хінчина виконується при розширенні сигма-алгебри $I[\xi]$ на клас всіх випадкових подій нульової ймовірності: $I[\xi, \mathbf{P}] = \{A \in \mathfrak{F} : \exists B \in I[\xi],\ \mathbf{P}(A \Delta B) = 0\}$.

5. Нехай імовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}) = ((0,1], \mathfrak{B}(0,1], \mu)$, де міра μ має вигляд $\mu(B) = (\ln 2)^{-1} \int\limits_B (1+x)^{-1} dx$, функція $a(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ при $x \in (0,1]$. Тоді послідовність n-кратних суперпозицій $\xi_n(x) = a(a(...a(x)...))$ є строго стаціонарною ($\xi_n(x)$ є n-м елементом у розкладі x у неперервний дріб).

4. Уточнення центральної граничної теореми

7. Характеристичні функції

Література: [1,с.133-148]

A

1. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція така, що $\varphi(t) = 0$ при $|t| > a$. Вивести з теореми Бохнера-Хінчина, що періодичне продовження з періодом $2a$ функції $\varphi(t)$ є характеристичною функцією.

2. Випадкова величина ξ має щільність та $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$. Довести, що знайдеться $\delta > 0$ таке, що $\sup_{|t| \geqslant u} |\varphi_\xi(t)| \leqslant \exp(-\delta u^2)$ для всіх $u \in (0,1)$.

3. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція стандартного нормального розподілу. а) Інтегруванням за частинами вивести диференціальне рівняння $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$, б) отримати звідси формулу для $\varphi(t)$.

4. Якщо випадкова величина ξ має щільність, то $|\varphi_\xi(t)| < 1 \ \forall t \neq 0$.

5. Якщо випадкова величина ξ не дорівнює м.н. сталій, то $|\varphi_\xi(t)| < 1$ у деякому виколотому околі нуля.

6. Функція $\exp(-t^4)$ не є характеристичною.

B

1. Знайти характеристичну функцію для випадкової величини зі щільністю: а) $(T - |x|)^+/T$, б) $(1 - \cos(Tx))/\pi T x^2$.

2. Якщо $\varphi(t), t \in \mathbb{R}$, – характеристична функція, то а) $\varphi^n(t)$, б) $|\varphi(t)|^2$, в) $t^{-1} \int\limits_0^t \varphi(s) ds$ – також характеристичні функції.

3. Координати вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ незалежні тоді й тільки тоді, коли їх сумісна характеристична функція є добутком:

$$\varphi_\xi(t) \equiv \mathbf{E} \exp(i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t_k), \forall t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d.$$

4. Якщо ξ – цілозначна випадкова величина, то її характеристична функція $\varphi(t)$ має період 2π і $\mathbf{P}(\xi = n) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(-itn)\varphi(t) dt$.

5. Довести, що з невід'ємної визначеності випливає ермітовість.

6. За означенням випадкова величина ξ симетрична, якщо ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Довести, що симетричність еквівалентна дійснозначності характеристичної функції.

C

1. Нехай випадкова величина ξ інтегровна в будь-якій степені, причому: $\mathbf{E}\xi^n = (n+k)!/k!$ для деякого k та всіх $n \geqslant 0$. Довести, що розподіл ξ визначається однозначно та збігається з розподілом Ерланга.

2. Довести, що розподіл інтегровної випадкової величини ξ однозначно визначається функцією $\mathbf{E}\left|\xi - t\right|, t \in \mathbb{R}$.

3. Довести, що функція з періодом $2T$, що дорівнює $(T - |x|)^+/T$ при $|x| \leqslant T$, є характеристичною.

4. Рівність $|\varphi_\xi(t)| = 1$ для деякого $t \neq 0$ виконується тоді й тільки тоді, коли $\mathbf{P}(\xi \in a + b\mathbb{Z}) = 1$ для деяких $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Існують незалежні величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 такі, що ξ_2 та ξ_3 мають різні розподіли, однак $\xi_1 + \xi_2$ і $\xi_1 + \xi_3$ – однаково розподілені.

6. Для довільних розподілу $(p_k, k = \overline{1,n})$ та додатних $(a_k, k = \overline{1,n})$ опуклий полігон $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k(1 - |t|\, a_k^{-1})^+$ є характеристичною функцією.

7. Нехай φ – дійсна неперервна парна функція на $\mathbb{R}$, така, що $\varphi(0) = 1, \varphi(\infty) = 0$, причому графік φ на $\mathbb{R}_+$ є опуклим донизу. Тоді φ є характеристичною функцією. Вказівка: довести, що $\varphi(t)$ можна зобразити у вигляді інтегралу $\int\limits_0^\infty (1 - |t|/s)^+ \mu(ds)$ для деякої міри μ.

8. Графік кусково-лінійної функції ψ утворений точками $(n, \varphi(n)), n \in \mathbb{Z}$, де φ – характеристична функція. Довести, що ψ – характеристична функція.

9. Випадкова величина ξ з розподілом $\mathbf{P}(\xi = \pm 2n) = C/(n^2 \ln n)$ не інтегровна, однак її характеристична функція диференційовна в нулі.

10. Якщо характеристична функція $\varphi_\xi(t)$ випадкової величини ξ має похідну парного порядку $2n$, то випадкова величина ξ^{2n} інтегровна.

11. Якщо $\mathbf{E}\left|\xi\right|^\alpha < \infty$, $\alpha \in (0,1)$, то φ_ξ задовольняє умову Гельдера рівня α.

12. Характеристична функція рівномірного розподілу на симетричному відрізку $[-a, a]$ дорівнює $(\sin at)/at$.

13. Якщо ξ має гама-розподіл $\gamma(\lambda, \alpha)$, то $\varphi_\xi(t) = (1 - it/\lambda)^{-\alpha}$.

14. Для незалежності випадкових величин ξ, η необхідно і достатньо, щоб $\mathbf{E}\exp(it\xi + is\eta) = \mathbf{E}\exp(it\xi)\mathbf{E}\exp(is\eta)$ при всіх $s, t \in \mathbb{R}$.

15. Знайти залежні величини ξ, η такі, що $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\ \varphi_\eta(t)$, для всіх $t \in \mathbb{R}$.

16. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли величини $\xi_1 + ... + \xi_k$ та ξ_{k+1} незалежні для всіх $k = \overline{1, n-1}$.

17. Для характеристичної функції φ довести, що $\operatorname{Re}\varphi(2t) \geqslant 4\operatorname{Re}\varphi(t) - 3$.

18. Якщо випадкова величина ξ обмежена, то функція $t^{-2}\ln|\varphi_\xi(t)|$ обмежена та відділена від нуля у деякому околі нуля.

19. Довести, що існують різні характеристичні функції $\varphi_k(t), k = 1, 2$, такі, що $\varphi_1^2(t) = \varphi_2^2(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

20. Якщо величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і квадратично інтегровні, причому $\xi+\eta$ та $\xi-\eta$ також незалежні, то ξ, η – нормальні випадкові величини.

21. Випадкові величини ξ, η незалежні, однаково розподілені і з нульовим середнім та одиничною дисперсією. Якщо розподіл величини $(\xi+\eta)/\sqrt{2}$ збігається з розподілом ξ, то $\xi \simeq N(0,1)$.

22. Вектор $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ є нормальним випадковим вектором тоді й тільки тоді, коли для кожного $t \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ величина $t'\xi$ має нормальний розподіл.

23. Довести методом генератрис, що а) сума незалежних величин із розподілами Пуассона, б) слабка границя величин із розподілами Пуассона знову має розподіл Пуассона.

24. Довести, що а) сумісна характеристична функція нормального випадкового вектора $\xi \simeq N_n(m, V)$ дорівнює $\varphi_\xi(t) = \exp(it'm - t'Vt/2)$, б) ξ є узагальненим нормальним вектором тоді й тільки тоді, коли остання рівність має місце для деяких $m \in \mathbb{R}^n$ і симетричної невід'ємно визначеної матриці V.

25. Випадкова величина η набуває цілих невід'ємних значень, а величини $(\delta_k, k \geqslant 0)$ не залежать від η, і $\mathbf{P}(\delta_k = 0) = 1 - \mathbf{P}(\delta_k = 1) \in (0,1)$. Розглянемо суми $\eta_1 = \sum\limits_{k=0}^{\eta} \delta_k$, $\eta_0 = \sum\limits_{k=0}^{\eta} (1-\delta_k)$. Довести, що а) величини η_0 та η_1 незалежні тоді й тільки тоді, коли η має розподіл Пуассона, б) η_i мають розподіл Пуассона.

26. Довести, що кількість успіхів у випадковому числі випробувань Бернуллі, яке не залежить від результатів окремих випробувань та має розподіл Пуассона, теж має пуассонівський розподіл. Знайти параметр цього розподілу.

27. В умовах пункту е) теореми про властивості генератрис довести, що $\mathbf{E}\zeta = \mathbf{E}\nu \mathbf{E}\xi_1$ та $\mathbf{D}\zeta = \mathbf{E}\nu \mathbf{D}\xi_1 + (\mathbf{E}\xi_1^2)\mathbf{D}\nu$.

28. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ, а величини ζ_T не залежать від ξ і мають щільності $(1-\cos Tx)/\ (\pi T x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. (а) Обчислити характеристичні функції величин ζ_T : $\varphi_{\zeta_T}(t) = (1 - |t|/T) 1\!\!\mathrm{I}_{|t|<T}$. б) Вивести звідси слабку збіжність $\xi + \zeta_T \to^W \xi, T \to \infty$. в) Довести формулу обертання для точок неперервності функції розподілу ξ :

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \tfrac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int\limits_a^b dx \int\limits_{-T}^{T} \exp(-itx)(1 - \tfrac{|t|}{T})\ \varphi_\xi(t)\ dt.$$

29. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ. Довести таку формулу обертання для точок неперервності функції розподілу ξ :

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \tfrac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} (\exp(-ita) - \exp(-itb))(it)^{-1} \varphi_\xi(t) dt.$$

30. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ, а $\varepsilon > 0$. Довести, що $F_\xi([-2\varepsilon, 2\varepsilon]) \geqslant \varepsilon \left| \int\limits_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \varphi_\xi(t)dt \right| - 1$.

31. Нехай φ – характеристична функція для функції розподілу F з множиною точок розриву $\{a_n\}$. Довести, що

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1} \int\limits_{|t|\leqslant T} \exp(-itx)\varphi(t)dt = F(x+0) - F(x),$$

$$\lim_{T\to\infty}(2T)^{-1} \int\limits_{|t|\leqslant T} |\varphi(t)|^2 dt = \sum_{n\geqslant 1} (F(a_n+0) - F(a_n))^2.$$

32. Нехай характеристична функція φ абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, а f – відповідна щільність розподілу. Довести при $t, x \in \mathbb{R}$ тотожність $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x+2kt) = \pi t^{-1} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(\pi n t^{-1}) \exp(i\pi n t^{-1} x)$, за умови, що ряд у лівій частині збігається до неперервної функції.

33. Характеристична функція φ випадкової величини ξ задовольняє асимптотичне зображення $\varphi(s) = 1 + O(|s|^\alpha), s \to 0$, для деякого $\alpha \in (0, 2]$. Довести, що $\mathbf{P}(|\xi| \geqslant x) = O(x^{-\alpha}), x \to \infty$.

34. Випадкові величини $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $(-1, 1)$. Довести, що сума $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ має щільність $\pi^{-1} \int\limits_0^\infty \left(t^{-1}\sin t\right)^n \cos(tx)dt$.

35. Нехай ξ – довільна випадкова величина з характеристичною функцією φ_ξ. Довести, що $\mathbf{E}\,|\xi| = \pi^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 - \operatorname{Re}\varphi_\xi(t))t^{-2}dt$.

36. Нехай φ, ψ, γ – характеристичні функції випадкових величин $\xi.\eta, \zeta$. Довести, що функція $\varphi(t_1)\psi(t_2)\gamma(t_1+t_2)$ є сумісною характеристичною функцію двовимірного вектора. Побудувати цей вектор.

37. Довести рівність $\mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$ для комплекснозначних незалежних інтегровних величин ξ, η.

8. Метод характеристичних функцій для уточнення граничних теорем

Література: [1,с.217-225]

A

1.Довести, що абсолютна стала у правій частині нерівності Беррі-Ессеєна не менша за $(2\pi)^{-1/2} \approx 0.3989$. Вказівка: обрати випадкові величини з розподілом $\mathbf{P}(\xi_n = \pm 1) = 1/2$ та довести, що при $n = 2k$ для таких величин має місце зображення: $F_n(0) - \varphi(0) = (2\pi n)^{-1/2} + o(n^{-1/2}), n \to \infty$.

2. Нехай величини ξ_n, ξ мають характеристичні функції φ_n, φ, причому $\int\limits_a^b \varphi_n(t)dt \to \int\limits_a^b \varphi(t)dt, n \to \infty$, для всіх $a < b$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$.

3. Перевірити суттєвість умови неперервності в нулі в теореми Леві – побудувати функції розподілу F_n, що не збігаються слабко та мають характеристичні функції φ_n такі, що границя $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)$ існує для всіх $t \in \mathbb{R}$.

4. Сім'я функцій розподілу (F_α) слабко компактна тоді й тільки тоді, коли $\sup_\alpha \sup_{|t|\leqslant\varepsilon} |1-\varphi_{F_a}(t)| \to 0, \varepsilon \to 0$.

5. Довести для невід'ємної величини $\xi \leqslant \infty$ такі тотожності
$\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{E}\exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi = 0),\ \lim\limits_{t\downarrow 0} \mathbf{E}\exp(-t\xi) = \mathbf{P}(\xi < \infty)$.

6. Випадкові величини ξ_n мають характеристичні функції φ_n. Довести, що $\xi_n \to^W 0$ тоді й тільки тоді, коли $\varphi_n(t) \to 1$ для t з деякого околу нуля.

B

1. Величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні, $\mathbf{P}(\xi_n = 0) = 1/2 = \mathbf{P}(\xi_n = 1)$. Довести, що: а) сума ряду $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-n}\xi_n$ рівномірно розподілена на $[0,1]$, б) величина $\xi = 2\sum\limits_{n\geqslant 1} 3^{-n}\xi_n$ має (сингулярний) розподіл Кантора. Обчислити відповідну характеристичну функцію.

2. Довести, що: а) характеристична функція величини зі щільністю Коші $(\pi(1+x^2))^{-1}$ дорівнює $\exp(-|t|)$, б) для незалежних однаково розподілених величин $\xi_1, ..., \xi_n$ зі щільністю Коші нормована сума $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n$ має таку саму щільність, в) послідовність незалежних випадкових величин із щільністю Коші не задовольняє закон великих чисел.

3. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ незалежні, однаково розподілені з характеристичною функцією φ. Довести, що збіжність $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} a$ до деякої сталої a виконується тоді й тільки тоді, коли існує похідна $\varphi'(0)$.

4. Довести, що в теоремі про добуток слабко збіжної послідовності зі збіжною $a_n + \xi_n \to^W a + \xi, n \to \infty$.

5. Довести, що в попередній вправі послідовність сталих $a_n \to a$ можна замінити на послідовність випадкових величин $\eta_n \to^{\mathbf{P}} a$.

6. Довести теорему Леві після заміни характеристичних функцій на перетворення Лапласа за припущення невід'ємності випадкових величин.

C

1. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні , $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\sigma_n^2 \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}\xi_k^2$, та $\mathbf{E}|\xi_n|^{2+\delta} < \infty$ при $\delta \in (0,1]$. Довести для деякої сталої A нерівність

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbf{P}((\xi_1 + ... + \xi_n)/\sigma_n < x) - \varphi(x)| \leqslant A\sigma_n^{-2-\delta} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|\xi_k|^{2+\delta}.$$

2. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ та ξ такі, що $|\xi_n| \leqslant c, |\xi| \leqslant c$ для сталої c, та $\mathbf{E}\xi_n^k \to \mathbf{E}\xi^k, n \to \infty$, при всіх $k \geqslant 1$. Довести, що $\xi_n \to^W \xi$.

3. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені на відрізку $[0,1)$, мають обмежені щільності і $|\mathbf{E}\exp(2\pi i k\xi_1)| < 1$ для всіх

$k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Довести, що $S_n = (\xi_1 + .. + \xi_n)(\text{mod } 1) \to^W \chi$, де величина $\chi \simeq U(0,1)$.

4. Функції розподілу F_n мають характеристичні функції φ_n, і для кожного $t \in \mathbb{R}$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$. Довести, що існує узагальнена функція розподілу $F \in M_{01}$ така, що $F_n \to^O F, n \to \infty$. Довести еквівалентність таких тверджень: а) існує функція розподілу F така, що $F_n \to^W F, n \to \infty$, б) послідовність (F_n) слабко компактна, в) φ – характеристична функція, г) φ – неперервна, д) φ – неперервна в нулі.

5. Випадкові величини $(\xi_n,\ n \geqslant 1)$ 5езалежні, однаково розподілені та інтегровні. Довести, що $(\xi_1 + ... + \xi_n)/n \to^{\mathbf{P}} \mathbf{E}\xi_1$. Вказівка: досить довести слабку збіжність.

6. Сформулювати теоретико-ймовірнісну інтерпретацію такої тотожності: $(\sin t)/t = \prod\limits_{n\geqslant 1} \cos(2^{-n}t)$.

7. Нехай $\varphi(t)$ – характеристична функція для функції розподілу $F(x)$. а) Тоді функція $\varphi_\alpha(t) \equiv (2\varphi(t) - \varphi(t+\alpha) - \varphi(t-\alpha))/(2 - \varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))$ також є характеристичною при $\alpha \in \mathbb{R}$. б) За умови абсолютної неперервності F довести, що $\varphi_\alpha(t) \to \varphi(t), \alpha \to \infty$, але відповідні щільності не збігаються.

8. Нехай $\xi_n \to^W \xi \in \mathbb{R}^d$, а функція $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Довести, що має місце збіжність $g(\xi_n) \to^W g(\xi), n \to \infty$.

9. Нехай послідовності випадкових величин $(\xi_n), (\eta_n)$ такі, що ξ_n, η_n незалежні при кожному n, $\xi_n \to^W \xi, \eta_n \to^W \eta$, причому ξ та η незалежні. Довести слабку збіжність векторів $(\xi_n, \eta_n) \to^W (\xi, \eta)$.

5. Метод характеристичних функцій для сум незалежних величин

9. Рекурентність блукань

Література: [1,с.233-242]

A

1.Симетричне блукання Бернуллі (з одиничними стрибками) у просторі $\mathbb{Z}^d$ рекурентне тоді й тільки тоді, коли $d \leqslant 2$.

2. Стрибки випадкового блукання мають симетричний розподіл, причому $\mathbf{P}(\xi_1 = n) \sim cn^{-\alpha}, n \to \infty$. Довести, що при $1 < \alpha < 2$ блукання транзієнтне, а при $\alpha > 2$ – рекурентне.

3. Випадкове блукання має такий розподіл стрибків: $\mathbf{P}(\xi_1 = -2) = 1/3$, $\mathbf{P}(\xi_1 = 1) = 2/3$. Вивести з загального критерія, що воно є рекурентним.

4. Імовірність того, що блукання Бернуллі $(S_n, n \geqslant 0)$ коли-небудь досягне точку $x > 0$, дорівнює 1 при $p \geqslant q$, та $(p/q)^x$ при $p < q$. За останнім припущенням величина $\sup_{n\geqslant 0} S_n$ має геометричний розподіл з параметром p/q.

5. Випадкові величини $(\xi_k, k \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені у $\mathbb{Z}$, а $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Довести (тотожність Спарре-Андерсена), що величини $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{1I}_{\{S_k > 0\}}$ та $\min(k \in [1,n] : S_k = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} S_j)$ однаково розподілені.

6. Узагальнити теорему про критерій рекурентності блукання на випадок блукань у просторі $\mathbb{R}^d$.

B

1. Блукання Бернуллі $(S_n, n \geqslant 0)$ таке, що $\mathbf{P}(S_1 = 1) = p = 1 - q$, $\mathbf{P}(S_1 = -1) = q$, $S_0 = x \in (a,b)$. Позначимо момент виходу $\tau_x = \inf(n \geqslant 1 : S_n \notin (a,b))$. а) Скласти систему рівнянь для $p_x = \mathbf{P}(\tau_x < \infty, S_{\tau_x} = b)$ та знайти $p_x = (\theta^x - \theta^a)/(\theta^b - \theta^a)$, якщо $\theta \equiv q/p \neq 1$. б) Аналогічно знайти $m_x = \mathbf{E}\tau_x = (bp_x + a(1-p_x) - x)/(p-q)$.

2. Нехай $(S_n, n \geqslant 0)$ – випадкове блукання зі стійким розподілом стрибків, що мають характеристичну функцію $\exp(-|t|^{\alpha}), \alpha \in (0,2]$. Довести, що це блукання є рекурентним тоді й тільки тоді, коли $\alpha \geqslant 1$.

3. Зі збіжності $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 - \operatorname{Re}\varphi(t))^{-1} dt < \infty$ випливає транзієнтність блукання.

4. Нехай $(S_n^i, n \geqslant 0), i = 1,2,$ - два незалежні симетричні блукання Бернуллі на $\mathbb{Z}$, а $\tau_i(x) = \inf(k \geqslant 1 : S_k^i = x)$. а) Обчислити ймовірність $\mathbf{P}(\tau_1(x) \leqslant \tau_2(y))$. б) Визначимо $\upsilon_n = \sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{1I}_{\{S_k^1 = S_j^2\}}$. Довести, що $\mathbf{E}\nu_n \sim cn^{3/2}, n \to \infty$. в) Узагальнити твердження б) на блукання у просторі $\mathbb{Z}^d$.

C

1. Довести, що клас симетричних відносно нуля дискретних розподілів $q = (\mathbf{P}(\xi_1 = n), n \in \mathbb{Z})$, для яких відповідне випадкове блукання є рекурентним, є опуклою множиною (для кожних двох своїх точок q_k містить відрізок $\alpha q_1 + (1-\alpha)q_2, \alpha \in (0,1)$).

10. Нескінченно подільні розподіли та канонічні міри

Література: [1,с.226-232]

A

1. Гама-розподіл, розподіли Пуассона та Коші є нескінченно подільними.

2. Якщо φ_1, φ_2 – нескінченно подільні характеристичні функції, то їх добуток $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$ – також нескінченно подільна характеристична функція.

3. Нескінченно подільна характеристична функція не має коренів.

4. Біноміальний і рівномірний розподіли не є нескінченно подільними.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені, цілочисельна величина ν не залежить від них і є нескінченно подільною, а суми $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Довести, що величина S_ν є нескінченно подільною.

B

1. Поточкова границя нескінченно подільних характеристичних функцій, що неперервна в нулі, є нескінченно подільною характеристичною функцією.

2. Нескінченно подільна величина є слабкою границею послідовностей сум незалежних величин, що мають розподіли Пуассона на решітках вигляду $a + b\mathbb{Z}_+,\ a, b \in \mathbb{R}$.

3. Нехай φ – нескінченно подільна характеристична функція. Довести, що $(1 - \ln \varphi(t))^{-1}$ є нескінченно подільною характеристичною функцією.

4. Довести, що функція $\varphi(t) = \exp(-c\,|t|^\alpha)$ при $c > 0, \alpha \in (0, 2]$ є нескінченно подільною характеристичною функцією. Знайти канонічне зображення для цієї функції. Вказівка: розглянути незалежні симетричні випадкові величини такі, що $\mathbf{P}(|\xi_1| > x) = x^{-\alpha}, x \geqslant 1$ та довести, що характеристична функція нормованих сум $(\xi_1 + ...\xi_n)n^{-1/\alpha}$ збігається при $n \to \infty$ до $\varphi(t)$.

C

1. Випадкова величина ξ має розподіл а) нормальний, б) Пуассона, причому $\xi = \xi_1 + \xi_2$, де доданки незалежні та мають нескінченно подільні розподіли. Довести, що ξ_k мають розподіли а) та б).

2. Нехай φ – нескінченно подільна характеристична функція, $\psi = \ln \varphi$, а S – функція розподілу симетричної квадратично інтегровної випадкової величини. Довести, що функція $\omega = \psi - \psi * S$ після ділення на сталу $\omega(0)$ є характеристичною.

3. Функція $p(s) = \sum\limits_{n \geqslant 0} p_n s^n$ така, що $p_n \geqslant 0,\ p_0 > 0,\ p(1) = 1,$ причому $\ln p(s)/p_0$ розкладається у ряд Тейлора з невід'ємними коефіцієнтами. Довести, що для довільної характеристичної функції φ суперпозиція $p(\varphi(t))$ є нескінченно подільною характеристичною функцією. Зокрема, дане твердження виконується для $p(s) = (1 - as)(1 - bs)^{-1}$ при $0 \leqslant a < b < 1$.

4. Характеристична функція φ називається стійкою, якщо для довільних додатних a, b знайдуться $c, d > 0$ такі, що
$\varphi(at)\varphi(bt) = \exp(-itc)\varphi(dt)$. а) Довести, що стійка характеристична функція є нескінченно подільною. б) Характеристична функція φ є стійкою тоді й тільки тоді, коли знайдеться послідовність незалежних однаково розподілених величин $(\xi_n, n \geqslant 0)$ з характеристичною функцією φ такі, що при кожному $n \geqslant 1$ для деяких сталих $a_n, b_n > 0$ має місце збіжність розподілів $(\xi_1 + ... + \xi_n - a_n)/b_n \simeq \xi_0$. в) Характеристична функція φ є стійкою тоді й тільки тоді, коли знайдеться послідовність незалежних однаково розподілених величин $(\xi_n, n \geqslant 0)$ такі, що при кожному n для деяких сталих $a_n, b_n > 0$ має місце слабка збіжність $(\xi_1 + ... + \xi_n - a_n)/b_n \to^W \xi_0$. г) Стійким характеристичним функціям відповідають нескінченно подільні

функції, для яких канонічна міра у зображенні Леві-Хінчина має щільність $C_{\pm}\left|x\right|^{1-\alpha}1\!\!\mathrm{I}_{\,x\gtrless 0}$ при деякому $\alpha \in (0,2]$.

5. Випадкові величини $(\xi_n, n \geqslant 1)$ незалежні однаково розподілені, мають щільності $\exp(-\left|x\right|)/2$ та характеристичну функцію $1/(1+t^2)$. Довести, що ряд $\xi = \sum\limits_{n\geqslant 1} \xi_n/n$ збігається м.н., а характеристична функція $\varphi_\xi(t) = \pi t/\operatorname{sh}(\pi t)$ є нескінченно подільною. Знайти її канонічне зображення.