Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.Д.Борисенко

КУРС ЛЕКЦІЙ З МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ

навчальний посібник
для студентів механіко-математичного факультету

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
“Київський універсистет”
2023

Курс лекцій з математичної економіки: Навчальний посібник / О.Д.Борисенко - К.: ВПЦ “Київський університет”, 2023.- 88 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, доцент О.І. Василик
канд. тех. наук, доцент О.І. Баліна.

Наведено курс лекцій з математичної економіки, який читається у 9 семестрі в обсязі, передбаченому навчальними планами механіко-математичного факультету.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №3 від 28 жовтня 2022 року)

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №10-22 від 27 грудня 2022 року)

Зміст

Передмова

Посібник охоплює теми лекцій, що читаються у дев'ятому семестрі при вивченні нормативного курсу з математичної економіки на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Курс математичної економіки, що читається на механіко-математичному факультеті складається із трьох модулів: теорія споживання, теорія виробництва і ринкова рівновага та її основні властивості добробуту.

У розділах присвячених теорії споживання розглядаються два підходи до побудови математичних моделей споживання. Спочатку математична модель споживання будується на основі структури вибору і досліджуються умови, при яких відповідність попиту задовольняє слабку аксіому виявленої переваги. Виводяться основні співвідношення порівняльної статики. Далі математична модель споживання будується при умові заданого відношення переваги на споживчій множині. Розглядаються умови на відношення переваги, при яких існує відповідна функція корисності. Вивчаються задача максимізації корисності, задача мінімізації витрат та їх зв'язок. Проводиться аналіз добробуту споживача і розглядаються властивості сукупного попиту. В теорії виробництва досліджуються властивості виробничих множин, вивчаються задача максимізації прибутку, задача мінімізації видатків виробництва, властивості сукупної пропозиції та ефективного виробництва. При вивченні лінійних моделей виробництва розглядаються моделі Леонтьєва. При вивченні ринкової рівноваги досліджуються її властивості добробуту.

1 Відношення переваги і структура вибору

Почнемо вивчення теорії індивідуального прийняття рішення у абстрактній постановці, а потім розвинемо аналіз у контексті чисто економічних рішень.

Відправною точкою кожної задачі прийняття рішень є множина X можливих (взаємно виключних) альтернатив, із якої проводиться вибір. Зараз будемо вважати X довільною множиною. Наприклад, для випускника середньої школи множина можливих альтернатив продовження кар'єри X може бути {вступити до юридичного факультету, вступити до механіко-математичного факультету,..., стати естрадним співаком}. При вивченні задач споживання, елементами множини X будуть можливі альтернативи споживання.

Ми розглянемо два різні підходи до моделювання індивідуального вибору. Перший підхід, більш традиційний, трактує смаки індивідума, як результат його відношення переваги, яке є первинною характеристикою індивідуума. Теорія при цьому підході розвивається на основі аксіом, яким повинно задовольняти відношення переваги.

Другий підхід трактує, як первинну характеристику індивіда, поведінку при виборі альтернативи, тобто його правила вибору. Аксіоми при цьому підході відносяться прямо до поведінки індивідума (правила вибору).

Відношення переваги.

Нехай X – довільна множина. Кажуть, що на X задано **бінарне відношення** $\mathcal{R}$, якщо в $X^2 = \{(x, y) | \ \forall x \in X, \forall y \in X\}$ задано підмножину $\mathcal{R}$. Елемент $x \in X$ знаходиться у відношенні $\mathcal{R}$ до елемента $y \in X$, позначається $x\mathcal{R}y$, якщо впорядкована пара (x, y) належить $\mathcal{R}$. Дамо означення деяких властивостей бінарного відношення.

Бінарне відношення $\mathcal{R}$ на X називається

- **рефлексивним**, якщо $x\mathcal{R}x$, $\forall x \in X$;

• **нерефлексивним**, якщо $\neg(x\mathcal{R}x)$, $\forall x \in X$;
• **симетричним**, якщо $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, $\forall x, y \in X$;
• **асиметричним**, якщо $x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)$, $\forall x, y \in X$;
• **антисиметричним**, якщо $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y)$, $\forall x$, $y \in X$;
• **транзитивним**, якщо $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$, $\forall x, y$, $z \in X$;
• **від'ємно транзитивним**, якщо $\neg(x\mathcal{R}y) \wedge \neg(y\mathcal{R}z) \Rightarrow \neg(x\mathcal{R}z)$, $\forall x, y, z \in X$;
• **повним**, якщо $(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$, $\forall x, y \in X$.

Означення 1.1 *Розглянемо на множині альтернатив X бінарне відношення $\succsim$ і будемо називати його* **відношенням переваги** *на X. Запис $x \succsim y, x, y \in X$ означає, що альтернатива x* **не гірша** *ніж альтернатива y.*

Відношення строгої переваги $\succ$ визначається так: для $x, y \in X$, $(x \succ y) \Leftrightarrow (x \succsim y) \wedge \neg(y \succsim x)$.

Відношення байдужості $\sim$ визначається так: для $x, y \in X$, $(x \sim y) \Leftrightarrow (x \succsim y) \wedge (y \succsim x)$.

Означення 1.2 *Відношення переваги $\succsim$ на множині альтернатив X називається* **раціональним***, якщо воно є повним і транзитивним.*

З раціональності відношення переваги випливає таке твердження

Теорема 1.1 *(Довести самостійно). Якщо відношення переваги $\succsim$ є раціональним, то:*
(i) відношення строгої переваги $\succ$ є іррефлексивним і транзитивним;
(ii) відношення байдужості $\sim$ є рефлексивним, транзитивним і симетричним;
(iii) $(x \succ y \succsim z) \Rightarrow x \succ z$.

Зауважимо, що індивідуальні переваги можуть не задовольняти умову транзитивності із різних причин. Однією із причин може бути **проблема маловідчутної різниці**. Наприклад, вибір кольору для фарбування паркану: запропоновано два дуже схожих відтінки сірого кольору. Вам байдуже який із них вибрати. Далі запропонували світліший із уже пред'явлених і ще трохи світліший. Вам теж байдуже який з них вибрати. І та далі. Але якщо запропонувати самий перший (самий темний відтінок) і останній (майже білий) то ви можете зробити вибір. Але цим ви порушуєте транзитивність.

Порушення транзитивності може виникнути як результат взаємодії декількох більш примітивних раціональних відношень переваги.

Парадокс Кондорсе. Нехай сім'я вирішує проблему відпочинку. Склад сім'ї: М (мати), Б (батько), Д (діти). Альтернативи: О (опера), Р (рок-концерт), Ф (футбол). Індивідуальні переваги: $\text{О} \succ_{\text{М}} \text{Р} \succ_{\text{М}} \Phi,\ \Phi \succ_{\text{Б}} \text{О} \succ_{\text{Б}} \text{Р},\ \text{Р} \succ_{\text{Д}} \Phi \succ_{\text{Д}} \text{О}$.

Якщо рішення приймається більшістю, то отримаємо порушення транзитивності $\text{О} \succ \text{Р} \succ \Phi \succ \text{О}$.

Надалі ми будемо вважати умову транзитивності виконаною. Зручним аналітичним інструментом, що зображає відношення переваги є **функція корисності**.

Означення 1.3 *Функція $u : \ X \to \mathbb{R}$ називаєтьса функцією корисності, що зображає відношення переваги $\succsim$, якщо для всіх $x, y \in X,\ x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.*

Зауважимо, що функція корисності $u(x)$ для заданного відношення переваги $\succsim$ не єдина. Для довільної строго зростаючої функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функція $v(x) = f(u(x))$ теж буде функцією корисності, що зображає відношення переваги $\succsim$.

Теорема 1.2 *(Довести самостійно). Якщо відношення переваги $\succsim$ може бути зображене функцією корисності $u(x)$, то відношення переваги $\succsim$ є раціональним.*

Правило вибору.

Розглянемо другий підхід у теорії прийняття рішень.

Означення 1.4 **Структурою вибору** *називається пара* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$, *де*

(i) $\mathcal{B}$ *це множина непорожніх підмножин споживчого простору* X. *Будемо називати елементи* $B \in \mathcal{B}$ **бюджетними множинами**.

(ii) $C(\cdot)$ *це правило вибору, яке кожній бюджетній множині* $B \in \mathcal{B}$ *ставить у відповідність непорожню підмножину вибраних альтернатив* $C(B) \subseteq B$.

$\mathcal{B}$ не обов'язково містить усі підмножини X. Якщо множина $C(B)$ є одноелементною, то цей елемент є індивідуальним вибором із множини альтернатив $B \in \mathcal{B}$. Якщо ж $C(B)$ містить більше ніж один елемент, то ці елементи є **прийнятними альтернативами** в B.

Приклад 1.1 *Нехай* $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, x\}\}$. *Структури вибору:* $(\mathcal{B}, C_i(\cdot)), i = 1, 2$, *де* $C_1(\{x, y\}) = \{x\}$, $C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}$, *і* $C_2(\{x, y\}) = \{x\}$, $C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$.

Зрозуміло, що потрібно виключити ситуацію, коли із множини $\{x, y\}$ вибирають x, а із множини $\{x, y, z\}$ вибирають x і y. Це обмеження задається **слабкою аксіомою виявленої переваги**.

Означення 1.5 *Структура вибору* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ *задовольняє* **слабку аксіому виявленої переваги (СА)**, *якщо виконується умова:*
Нехай для деякого $B \in \mathcal{B}$ *такого, що* $x, y \in B$ *ми маємо* $x \in C(B)$, *тоді для* $\forall B' \in \mathcal{B}$ *такого, що* $(x, y \in B') \wedge (y \in C(B')) \Rightarrow (x \in C(B'))$.

Зауважимо, що у Прикладі 1.1 структура вибору $(\mathcal{B}, C_1(\cdot))$ задовольняє СА, а структура вибору $(\mathcal{B}, C_2(\cdot))$ не задовольняє СА.

Означення 1.6 *Нехай задано структуру вибору* $(\mathcal{B}, C(\cdot))$. **Виявлене відношення переваги** $\succsim^*$ *визначається так:*

$$x \succsim^* y, \quad x, y \in X \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}: \ (x, y \in B) \wedge (x \in C(B)).$$

Строгу виявлену перевагу $\succ^*$ *можна визначити так:*

$$x \succ^* y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : (\ x, y \in B) \wedge (x \in C(B)) \wedge (y \notin C(B)).$$

Зауважимо, що відношення виявленої переваги не обов'язково є повним або транзитивним.

Розглянемо два питання:

(i) Якщо приймаючий рішення має раціональне відношення переваги $\succsim$, то чи породжує це відношення переваги структуру вибору, яка задовольняє слабку аксіому виявленої переваги?

(ii) Якщо приймаючий рішення для класу бюджетних множин $\mathcal{B}$ має структуру вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$, яка задовольняє СА, то чи існує раціональне відношення переваги, яке узгоджене з цією структурою вибору?

Нехай на споживчій множині X задано раціональне відношення переваги $\succsim$. Визначимо $C^*(B, \succsim) = \{x \in B : \ x \succsim y, \forall y \in B\}$ для $B \in X, B \neq \emptyset$. Будемо розглядати такі $\succsim$ і $\mathcal{B}$, що $C^*(B, \succsim) \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}$. Будемо говорити, що відношення переваги $\succsim$ породжує (генерує) структуру вибору $(\mathcal{B}, C^*(\cdot, \succsim))$.

Теорема 1.3 *Якщо відношення переваги* $\succsim$ *є раціональним, то структура вибору* $(\mathcal{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ *задовольняє СА.*

Доведення. Нехай для деякого $B \in \mathcal{B}$ маємо

$$(x, y \in B) \wedge (x \in C^*(B, \succsim)).$$

Тоді $x \succsim y$. Нехай для деякого $B' \in \mathcal{B}$: $(x, y \in B') \wedge (y \in C^*(B', \succsim)$. Тоді $y \succsim z, \forall z \in B'$ і за транзитивністю відношення переваги маємо $x \succsim z, \forall z \in B'$, а значить $x \in C^*(B', \succsim)$ і виконується слабка аксіома виявленої переваги. $\square$

Означення 1.7 *При заданій структурі вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ будемо говорити, що раціональне відношення переваги $\succsim$ раціоналізує $C(\cdot)$ відносно $\mathcal{B}$, якщо $C(B) = C^*(B, \succsim), \forall B \in \mathcal{B}$, тобто, якщо відношення переваги $\succsim$ породжує структуру вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$.*

Теорема 1.3 стверджує, що CA повинна задовольнятись, якщо існує раціоналізуюче відношення переваги. Оскільки $C^*(\cdot, \succsim)$ задовольняє CA для усіх раціональних $\succsim$, то тільки ті правила вибору $C(\cdot)$, які задовольняють CA можуть бути раціоналізовані. Але виконання CA не є достатньою умовою, яка забезпечує існування раціоналізуючого відношення переваги.

Приклад 1.2 *Нехай $X = \{x, y, z\}, \mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}, C(\{y, z\}) = \{y\}$, $C(\{x, z\}) = \{z\}$. Ця структура вибору задовольняє CA, але її не можна раціоналізувати. Дійсно, якщо існує раціоналізуюче succsim, тоді маємо $(x \succ y) \wedge (y \succ z)$ і за транзитивністю $x \succ z$. Але за правилом вибору $C(\{x, z\}) = \{z\}$, а тому $z \succ x$ і маємо суперечність.*

Теорема 1.4 *Якщо структура вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ задовольняє CA і $\mathcal{B}$ містить усі підмножини X включно до 3-елементних, тоді існує раціональне відношення переваги $\succsim$, яке раціоналізує $C(\cdot)$ відносно $\mathcal{B}$, і це відношення переваги єдине.*

Доведення. Покажемо, що відношення виявленої переваги $\succsim^*$ раціоналізує правило вибору $C(\cdot)$ відносно $\mathcal{B}$. Перевіримо, що в умовах теореми відношення виявленої переваги $\succsim^*$ є раціональним. Перевіримо виконання умови повноти:

$$\forall x, y \in X \Rightarrow \{x, y\} \in \mathcal{B} \Rightarrow (C(\{x, y\}) = \{x\}) \vee (C(\{x, y\}) = \{y\})$$
$$\Rightarrow (x \succsim^* y) \vee (y \succsim^* x).$$

Перевіримо виконання умови транзитивності. Нехай $x \succsim^* y$ і $y \succsim^* z$. Розглянемо бюджетну множину $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$. Достатньо показати, що $x \in C(\{x, y, z\})$. Оскільки за означенням $C(B) \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}$, то припустимо, що $y \in C(\{x, y, z\})$. Тоді $y \succsim^* x$. Але за припущенням $x \succsim^* y$, тому за СА $x \in C(\{x, y, z\}$. Нехай тепер $z \in C(\{x, y, z\})$, тому $z \succsim^* y$. Але за припущенням $y \succsim^* z$, а значить за СА $y \in C(\{x, y, z\})$, отже за доведеним $x \in C(\{x, y, z\})$.

Таким чином відношення виявленої переваги $\succsim^*$ раціональне. Покажемо, що $\succsim^*$ раціоналізує $C(\cdot)$ відносно $\mathcal{B}$, тобто доведемо, що $C(B) = C^*(B, \succsim^*)$, $\forall B \in \mathcal{B}$. Маємо для $\forall B \in \mathcal{B}$

$$
\begin{aligned}
&x \in C(B) \Rightarrow x \succsim^* y, \forall y \in C(B) \Rightarrow x \in C^*(B, \succsim^*)\\
&\Rightarrow C(B) \subseteq C^*(B, \succsim^*).
\end{aligned}
$$

Нехай тепер $x \in C^*(B, \succsim^*)$, для деякого $B \in \mathcal{B}$. Тоді $x \succsim^* y, \forall y \in B$, а це означає, що для кожного $y \in B$ існує $B_y \in \mathcal{B}$ таке, що $(x, y \in B_y) \wedge (x \in C(B_y))$. Але за СА маємо $x \in C(B)$, а значить $C^*(B, \succsim^*) \subseteq C(B)$.

Якщо існує інше раціоналізуюче відношення переваги $\succsim'$, тоді $\forall B \in \mathcal{B}$: $C(B) = C^*(B, \succsim^*) = C^*(B, \succsim')$. Оскільки усі 2-елементні підмножини X є бюджетними множинами, то переваги за $\succsim^*$ і за $\succsim'$ будуть співпадати. $\square$

2 Відповідність попиту, елементи порівняльної статики та слабка аксіома виявленої переваги

Проблема прийняття рішення, що стоїть перед споживачем у ринковій економіці, це проблема визначення споживчого рівня різних благ і послуг, які запропоновано до продажу на ринку. Будемо називати ці блага і послуги **товарами**, і будемо вважати кількість товарів скінченою. Вектор товарів будемо позначати $x = (x_1, \ldots, x_L)$ і будемо розглядати цей набір товарів як точку у $\mathbb{R}^L$. Зазвичай вибір споживача обмежений певними фізичними умовами. Наприклад, не можливо спожити від'ємну кількість хліба. Тому **споживча множина** X це певна підмножина простору товарів $\mathbb{R}^L$, яка обумовлена фізичними обмеженнями. Ми будемо розглядати, в основному, споживчу множину $X = \mathbb{R}^L_+ = \{x \in \mathbb{R}^L | \ x_l \geq 0, l = \overline{1, L}\}$.

Окрім фізичних обмежень для споживача існує важливе економічне обмеження: обмеженість його споживчого бюджету (доходу) $w \geq 0$. Нехай усі L товарів продаються на ринку за відомими цінами. Позначимо вектор цін $p = (p_1, \ldots, p_L)$, де p_l це ціна одиниці l-го товару. Будемо вважати, що $p > 0 \Leftrightarrow p_l > 0, \forall l = \overline{1, L}$. Також будемо вважати, що споживач не може впливати на ціни. Зрозуміло, що для споживача набір товарів $x \in X$ є досяжним, якщо він задовольняє умову $p \cdot x = \sum_{l=1}^{L} p_l x_l \leq w$.

Означення 2.1 *Множина* $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \ p \cdot x \leq w\}$ *називається* **бюджетною множиною**. *Множина* $L_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \ p \cdot x = w\}$ *називається* **бюджетною гіперплощиною**.

Проблема споживача полягає у виборі споживчого набору $x \in B_{p,w}$ при заданих цінах p і заданому споживчому доході w. Будемо вважати, що $w > 0$.

Означення 2.2 **Відповідністю попиту** $x(p, w)$ *називається відображення, яке кожній бюджетній множині* $B_{p,w}$ *ставить у відповідність множину вибраних споживчих наборів* $x(p, w) \in B_{p,w}$. *Якщо кожній бюджетній множині* $B_{p,w}$ *відповідає єдиний вибраний споживчий набір, то* $x(p, w)$ *будемо називати* **функцією попиту**.

Для відповідності попиту $x(p, w)$ будемо вимагати виконання таких умов:

(i) **Однорідність нульового порядку**:
$x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w), \forall \alpha > 0.$

(ii) **Закон Вальраса**:
$p \cdot x = w, \forall x \in x(p, w), \forall p > 0, w > 0.$

Зауважимо, що пара $(\mathcal{B}, x(\cdot))$, де $\mathcal{B} = \{B_{p,w}, \forall p > 0, w > 0\}$ задає структуру вибору.

Ми часто цікавимось яким чином змінюється вибір споживача при зміні його споживчого доходу і зміні цін. Такий аналіз попиту називається **порівняльним статичним аналізом** або **порівняльною статикою**.

Нехай $x(p, w)$ це функція попиту При фіксованому векторі цін $\bar{p}$ функція $x(\bar{p}, w)$ називається **функцією Енгеля** споживача, а відповідна лінія $E_{\bar{p}} = \{x(\bar{p}, w), \forall w > 0\}$ називається лінією доход-споживання.

Для кожного (p, w) частинна похідна $\partial x_l(p, w)/\partial w$ називається ефектом доходу для l-го товару, а похідна $\partial x_(p, w)/\partial p_k$ називається ціновим ефектом ціни p_k на попит на l-ий товар.

l-ий товар називається **нормальним** при заданих (p, w), якщо $\partial x_l(p, w)/\partial w \geq 0$. Якщо $\partial x_l(p, w)/\partial w < 0$, тоді l-ий товар називається **інферіорним**. Якщо у вибраному наборі товарів усі товари нормальні для усіх (p, w), то говорять, що попит нормальний.

Якщо $\partial x_l(p, w)/\partial p_l \leq 0$, то говорять, що l-ий товар задовольняє **закон попиту**, а якщо $\partial x_l(p, w)/\partial p_l > 0$, то l-ий товар називають **товаром Гіффена** при заданих (p, w).

Розглянемо, як впливає вимога однорідності функції попиту на ефекти доходу і ціни. Маємо $x_k(\alpha p, \alpha w) = x_k(p, w)$, $\forall \alpha > 0, \forall k = \overline{1, L}$. Продиференціюємо цю рівність по α у точці $\alpha = 1$ і одержимо

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\partial x_k(p, w)}{\partial p_l} p_l + \frac{\partial x_k(p, w)}{\partial w} w = 0, \ \forall k = \overline{i, L},$$

або у векторно-матричній формі

$$D_p x(p, w) p + D_w x(p, w) w = 0,$$

де

$$D_p x(p, w) = \left\{ \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} \right\}_{l,k=\overline{1,L}},$$

$$D_w x(p,w) = \left\{ \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \right\}_{l=\overline{1,L}}.$$

Усі вектори будемо надалі вважати векторами-стовпчиками.

Із закону Вальраса маємо

$$\sum_{l=1}^{L} p_l x_l(p,w) = w \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p_k} \sum_{l=1}^{L} p_l x_l(p,w) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k(p,w) + \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} = 0 \Leftrightarrow x^T(p,w) + p^T D_p x(p,w) = 0.$$

Одержане співвідношення називають властивістю **агрегації Курно**.

Якщо продиференціювати закон Вальраса по w, то отримаємо співвідношення **агрегації Енгеля**

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} = 1 \Leftrightarrow p^T D_w x(P,w) = 1.$$

Надалі будемо вважати, що функція попиту $x(p,w)$ є однорідною 0-го порядку і задовольняє закон Вальраса.

Означення 2.3 *Будемо говорити, що функція попиту $x(p,w)$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги (СА), якщо для кожних (p,w) і (p',w') маємо*

$$\begin{cases} p \cdot x(p',w') \leq w, \\ x(p'.w') \neq x(p,w) \end{cases} \Rightarrow p' \cdot x(p,w) > w'.$$

Означення 2.4 Компенсованою зміною цін за Слуцьким *називається зміна (p,w) на (p',w') така, що $p' \cdot x(p,w) = w'$. При цьому приріст $\Delta w = w' - w = p' \cdot x(p,w) - p \cdot x(p,w) = \Delta p \cdot x(p,w)$ називається* **компенсацією доходу за Слуцьким**.

Лема 2.1 *Слабка аксіома виявленої переваги має місце тоді і лише тоді коли вона має місце для усіх компенсованих змін цін за Слуцьким.*

Доведення. Необхідність. Очевидно, бо якщо СА має місце, то вона має місце і для компенсованих за Слуцьким змін цін.

Достатність. Достатньо довести, що при порушенні СА існує така компенсована зміна цін, що СА порушується і для неї. Нехай маємо $(p', w'), (p'', w'')$ такі, що для них СА порушується:

$$\begin{cases} x(p', w') \neq x(p'', w''), \\ p' \cdot x(p'', w'') \leq w', \\ p'' \cdot x(p', w') \leq w''. \end{cases}$$

Якщо принаймні одна із двох останніх нерівностей є рівністю, то це і буде компенсована зміна цін для якої порушується СА. Отже залишається розглянути випадок строгих нерівностей

$$\begin{cases} x(p', w') \neq x(p'', w''), \\ p' \cdot x(p'', w'') < w', \\ p'' \cdot x(p', w') < w''. \end{cases} \tag{2.1}$$

Виберемо таке $\alpha \in (0, 1)$ щоб

$$(\alpha p' + (1-\alpha)p'') \cdot x(p', w') = (\alpha p' + (1-\alpha)p'') \cdot x(p'', w'').$$

Це можна зробити, бо із (2.1) маємо

$$\alpha = \frac{w'' - p'' \cdot x(p', w')}{w'' - p'' \cdot x(p', w') + w' - p' \cdot x(p'', w'')} \in (0, 1).$$

Позначимо $p = \alpha p' + (1-\alpha)p''$ і $w = p \cdot x(p', w') = p \cdot x(p'', w'')$. Використовуючи закон Вальраса і (2.1), одержимо

$$\alpha w' + (1-\alpha)w'' > \alpha p' \cdot x(p', w') + (1-\alpha)p'' \cdot x(p', w') = w =$$
$$= p \cdot x(p, w) = \alpha p' \cdot x(p, w) + (1-\alpha)p'' \cdot x(p, w).$$

Таким чином, або $p' \cdot x(p,w) < w'$ або $p'' \cdot x(p,w) < w''$. Якщо

$$\begin{cases} p' \cdot x(p,w) < w', \\ p \cdot x(p',w') = w, \\ x(p,w) \neq x(p',w') \end{cases}$$

то одержимо порушення СА для компенсованої зміни цін. Випадок $p'' \cdot x(p,w) < w''$ розглядається аналогічно. $\square$

Теорема 2.1 *Нехай функція попиту $x(p,w)$ є однорідною нульового порядку і задовольняє закон Вальраса. Функція попиту $x(p,w)$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги тоді і тільки тоді, коли для довільної компенсованої зміни цін з (p,w) на (p',w'), $p' \cdot x(p,w) = w'$ маємо*

$$(p' - p) \cdot (x(p',w') - x(p,w)) \leq 0, \tag{2.2}$$

із строгою нерівністю при $x(p,w) \neq x(p',w')$.

Доведення. Необхідність. Нехай має місце СА. Якщо $x(p',w') = x(p,w)$, тоді $(p'-p)\cdot(x(p',w') - x(p,w)) = 0$. Нехай $x(p',w') \neq x(p,w)$. Тоді за законом Вальраса

$$\begin{aligned}&(p' - p) \cdot (x(p',w') - x(p,w)) = w' - p' \cdot x(p,w) - \\ &- p \cdot x(p',w') + w = w - p \cdot x(p',w') < 0,\end{aligned}$$

бо із виконання СА маємо

$$\begin{cases} p' \cdot x(p,w) = w', \\ x(p,w) \neq x(p',w') \end{cases} \Rightarrow p \cdot x(p',w') > w.$$

Достатність. Нехай виконується (2.2). Використаємо Лему 2.1. Припустимо, що існує компенсована зміна цін з (p',w') на (p,w) така, що для неї порушується СА

$$\begin{cases} x(p,w) \neq x(p',w'), \\ p \cdot x(p',w') = w, \\ p' \cdot x(p,w) \leq w'. \end{cases}$$

Тоді

$$(p' - p) \cdot (x(p', w') - x(p, w)) = w' - p' \cdot x(p, w) - \\ -p \cdot x(p', w') + w = w' - p' \cdot x(p, w) \geq 0,$$

що суперечить (2.2). □

Співвідношення (2.2) називають **компенсованим законом попиту**.

Припустимо тепер, що функція попиту $x(p, w)$ є диференційовною. Нехай починаючи із точки (p, w) маємо компенсовану за Слуцьким зміну цін $p + dp$. Оскільки зміна цін компенсована, то $dw = x(p, w) \cdot dp$. Маємо

$$dx(p, w) = D_p x(p, w) dp + D_w x(p, w) dw = dx(p, w) = \\ = D_p x(p, w) dp + D_w x(p, w)[x^T(p, w) dp] = \\ = [D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x^T(p, w)] dp.$$

Із Теореми 2.1. випливає, що $dp \cdot dx \leq 0$. Тому

$$(dp)^T dx(p, w) = \\ = (dp)^T [D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x^T(p, w)] dp \leq 0 \tag{2.3}$$

для довільних можливих компенсованих змін цін dp.

Означення 2.5 *Матриця*

$$S(p, w) = D_p x(p, w) + D_w x(p, w) x^T(p, w),$$

$$S(p, w) = \{s_{lk}(p, w)\}_{l=\overline{1,L}}^{k=\overline{1,L}} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} + \frac{x_l(p, w)}{\partial w} x_k(p, w) \right\}_{l=\overline{1,L}}^{k=\overline{1,L}}$$

називається **матрицею Слуцького**.

Із означення матриці Слуцького $S(p, w)$ і (2.3) маємо

Теорема 2.2 *Якщо диференційовна функція попиту $x(p,w)$ задовольняє закону Вальраса, є однорідною 0-го порядку і виконується слабка аксіома виявленої переваги, тоді для довільних (p,w) матриця Слуцького $S(p,w)$ є від'ємно напіввизначеною, тобто*

$$v^T S(p,w)v \leq 0, \forall v \in \mathbb{R}^L_+.$$

Наслідок 2.1

$$s_{ll}(p,w) \leq 0, \forall l = \overline{1,L}.$$

Наслідок 2.2 *Товар є товаром Гіффена у точці (p,w) тільки тоді коли цей товар є інферіорним.*

Дійсно, за Наслідком 2.1

$$s_{ll}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_l(p,w) \leq 0.$$

Якщо маємо товар Гіффена, то $\partial x_l(p,w)/\partial p_l > 0$. Тому $\partial x_l(p,w)/\partial w < 0$, а значить l-ий товар є інферіорним.

Теорема 2.3 *Якщо диференційовна функція попиту $x(p,w)$ задовольняє закону Вальраса, є однорідною 0-го порядку, тоді*

$$p^T S(p,w) = 0, S(p,w)p = 0, \forall (p,w).$$

Доведення. Із співвідношень Курно і Енгеля маємо

$$p^T D_p x(p,w) + x^T(p,w) = 0,\ p^T D_w x(p,w) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^T D_p x(p,w) + p^T D_w x(p,w) x^T(p,w) = p^T S(p,w) = 0.$$

Із першого співвідношення порівняльної статики і закону Вальраса маємо

$$D_p x(p,w)p + D_w x(p,w)w = 0,\ x^T(p,w)p = w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_p x(p,w)p + D_w x(p,w)x^T(p,w)p = S(p,w)p = 0. \quad \square$$

3 Відношення переваги та відповідна функція корисності

Будемо вважати, що на множині споживчих наборів $x = (x_1, \ldots, x_L) \in X \subset \mathbb{R}_+^L$ задано раціональне відношення переваги $\succsim$ (не гірше ніж). Іноді буває слушним припустити, що більша кількість товару є більш переважною. Нехай виконується умова

$$(\forall x \in X) \wedge (y \geq x) \Rightarrow y \in X.$$

Означення 3.1 *Відношення переваги* $\succsim$ *на* X *є* **монотонним**, *якщо* $(x \in X) \wedge (y > x) \Rightarrow y \succ x$. *Це відношення переваги* $\succsim$ *є* **сильно монотонним**, *якщо* $(x \in X) \wedge (y \geq x) \wedge (y \neq x) \Rightarrow y \succ x$.

Означення 3.2 *Відношення переваги* $\succsim$ *на* X *є* **локально ненасичуваним**, *якщо для всіх* $x \in X$ *і довільного* $\varepsilon > 0$ *існує таке* $y \in X$, *що* $||y - x|| < \varepsilon$ *і* $y \succ x$.

При заданому відношенні переваги $\succsim$ і заданому споживчому наборі $x \in X$ ми можемо визначити такі множини споживчих наборів. **Переважна множина** відносно набору x: $P_x = \{y \in X | \ y \succsim x\}$; **непереважна множина** відносно набору x: $NP_x = \{y \in X | \ x \succsim y\}$; **множина байдужості** відносно набору x: $\{y \in X | \ y \sim x\}$.

Нехай тепер X є опуклою множиною.

Означення 3.3 *Відношення переваги* $\succsim$ *на* X *є* **опуклим**, *якщо* $\forall x \in X$ *переважна множина* P_x *є опуклою, тобто* $\forall y_1, y_2 \in P_x \Rightarrow \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in P_x, \forall \alpha \in [0,1]$. *Відношення переваги* $\succsim$ *на* X *є* **строго опуклим**, *якщо*

$$(\forall y_1, y_2 \in P_x) \wedge (y_1 \neq y_2) \Rightarrow \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \succ x, \forall \alpha \in (0,1).$$

Означення 3.4 *Монотонне відношення переваги* $\succsim$ *на* $X = \mathbb{R}_+^L$ *називаеться* **гомотетичним**, *якщо*

$$(x \sim y) \Rightarrow \alpha x \sim \alpha y, \forall \alpha \geq 0.$$

Зауважимо, що виконання умов, які ми накладали на відношення переваги $\succsim$ не гарантує існування функції корисності, що зображає це відношення переваги.

Приклад 3.1 Відношення ликсикографічної переваги. *Нехай $X = \mathbb{R}^L_+, L = 2$. Визначимо лексикографічне відношення переваги $\succsim_{lex}$:*

$$x = (x_1, x_2) \succsim_{lex} y = (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \vee ((x_1 = y_1) \wedge (x_2 \geq y_2)).$$

Це відношення переваги повне, транзитивне, сильно монотонне і строго опукле але не існує функції корисності, що його зображає. Проведемо доведення від супротивного. Якщо існує відповідна функція корисності $u(x_1, x_2)$, тоді для кожного x_1 виберемо раціональне число $r(x_1)$ так, що $u(x_1, 2) > r(x_1) > u(x_1, 1)$. Якщо $x_1 > x'_1$, то $(x_1, x_2) \succsim (x'_1, x'_2)$ для довільних x_2, x'_2. Тому

$$u(x_1, x_2) > r(x_1) > u(x_1, 1) \geq u(x'_1, 2) > r(x'_1) > u(x'_1, 1).$$

Отже ми отримали ін'єкцію множини дійсних чисел у підмножину раціональних чисел, що неможливо.

Отже потрібне додаткове припущення відносно відношення переваги, щоб існувала відповідна функція корисності.

Означення 3.5 *Відношення переваги $\succsim$ на X називаєтьcя* **неперервним**, *якщо для довільних послідовностей $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in X$, $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in X$ таких, що $x^{(n)} \succsim y^{(n)}, \forall n \geq 1$, $\exists x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$, $\exists y = \lim_{n\to\infty} y^{(n)}$ маємо $x \succsim y$.*

Еквівалентне означення неперервності відношення переваги $\succsim$ можна дати таке:

Означення 3.6 *Відношення переваги $\succsim$ на X називаєтьcя* **неперервним**, *якщо для всіх $x \in X$ переважна множина $P_x = \{y \in X |\ y \succsim x\}$ і непереважна множина $NP_x = \{y \in X |\ x \succsim y\}$ будуть замкненими.*

Еквівалентність цих означень пропонується перевірити самостійно.

Приклад 3.2 *Лексикографічне відношення переваги не є неперервним. Дійсно для* $x^{(n)} = (1/n, 0)$ *і* $y^{(n)} = (0, 1)$ *маємо* $x^{(n)} \succ_{lex} y^{(n)}, \forall n \geq 1$, *але* $\lim_{n\to\infty} y^{(n)} = (0, 1) \succ_{lex} (0, 0) = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$.

Має місце наступна загальна теорема існування функції корисності

Теорема 3.1 (Дебре). *Якщо* $X \subseteq \mathbb{R}_+^L$ *є зв'язною множиною, а раціональне відношення переваги* $\succsim$ *є неперервним, тоді існує неперервна функція корисності, що зображає* $\succsim$.

Доведемо цю теорему при додаткових умовах.

Теорема 3.2 *Якщо* $X = \mathbb{R}_+^L$, *а монотонне раціональне відношення переваги* $\succsim$ *є неперервним, тоді існує неперервна функція корисності, що зображає* $\succsim$.

Доведення. Позначимо $Z = \{x \in \mathbb{R}_+^L | \ x_1 = x_2 = \ldots = x_L\}$, $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^L$. Тоді $\forall \alpha \geq 0$ ми маємо $\alpha e \in Z$. Із монотонності $\succsim$ випливає, що $\forall x \in \mathbb{R}_+^L$ маємо $x \succsim 0$ і $\forall \bar{\alpha} \geq 0$ такого, що $\bar{\alpha} e > x$ маємо $\bar{\alpha} e \succ x$. Тому переважна P_x і непереважна NP_x множини є непорожніми.

Покажемо, що монотонність і неперервність відношення переваги $\succsim$ забезпечують $\forall x \in \mathbb{R}_+^L$ існування єдиного значення $\alpha(x) \in [0, \bar{\alpha}]$ такого, що $\alpha(x) e \sim x$. Дійсно, із неперервності $\succsim$ випливає, що множини P_x, NP_x будуть замкненими і непорожніми. Оскільки множина Z є замкненою, то множини $Z \cap P_x$ і $Z \cap NP_x$ будуть замкненими і непорожніми. Отже множини $A^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ | \ \alpha e \succsim x\}$ і $A^- = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ | \ x \succsim \alpha e\}$ є замкненими і непорожніми. Оскільки $\succsim$ є повним, то $\mathbb{R}_+ = A^+ \cup A^-$. Але $\mathbb{R}_+$ зв'язна множина, тому $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$. Значить існує $\alpha(x) \in \mathbb{R}_+$ таке, що $\alpha(x) e \sim x$. Із монотонності $\succsim$ випливає єдиність такого $\alpha(x)$.

Покладемо $u(x) = \alpha(x), \forall x \in \mathbb{R}^L_+$. Покажемо, що $u(x)$ це функція корисності, що зображає $\succsim$. Нехай $u(x) = \alpha(x) \geq \alpha(y) = u(y), x, y \in \mathbb{R}^L_+$. Тоді за монотонністю $\alpha(x)e \succsim \alpha(y)e$. Але $\alpha(x)e \sim x, \alpha(y)e \sim y$, тому за транзитивністю $x \succsim y$. Нехай тепер $x \succsim y, x, y \in \mathbb{R}^L_+$. Тоді за транзитивністю

$$\alpha(x)e \sim x \succsim y \sim \alpha(y)e \Rightarrow \alpha(x)e \succsim \alpha(y)e,$$

і за монотонністю маємо $\alpha(x) \geq \alpha(y)$. Тому $u(x) \geq u(y)$.

Доведемо, що функція $u(x) = \alpha(x)$ неперервна. Нехай $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ таке, що $\forall n \geq N$ ми маємо за монотонністю

$$||x^{(n)} - x|| \leq \varepsilon \Rightarrow x + \varepsilon e \succsim x^{(n)} \succsim x - \varepsilon e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(x^{(n)}) \in [\alpha(x - \varepsilon e), \alpha(x + \varepsilon e)].$$

Отже послідовність $\alpha(x^{(n)}), n \geq 1$ обмежена, а значить містить збіжну підпослідовність.

Покажемо, від супротивного, що всі збіжні підпослідовності послідовності $\alpha(x^{(n)}), n \geq 1$ збігаються до $\alpha(x)$. Нехай існує така підпослідовність, що $\lim_{n\to\infty} \alpha(x^{(m_n)}) = \alpha' > \alpha(x)$. За монотонністю маємо $\alpha' e \succ \alpha(x)e$. Покладемо $\hat{\alpha} = (\alpha' + \alpha(x))/2$. Тоді $\hat{\alpha} > \alpha(x)$ і $\hat{\alpha} < \alpha'$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} \alpha(x^{(m_n)}) = \alpha' > \hat{\alpha}$, то існує таке $\bar{N}$, що $\forall n \geq \bar{N}$ маємо $\alpha(x^{(m_n)}) > \hat{\alpha}$. Тоді

$$x^{(m_n)} \sim \alpha(x^{(m_n)})e \succ \hat{\alpha}e.$$

Із неперервності і монотонності відношення переваги маємо

$$x \succsim \hat{\alpha}e \Rightarrow \alpha(x)e \sim x \succsim \hat{\alpha}e \Rightarrow \alpha(x) \geq \hat{\alpha},$$

що суперечить умові $\hat{\alpha} > \alpha(x)$. $\square$

Зауваження 3.1 *Ми знаємо, що функція корисності визначена з точністю до строго зростаючого перетворення. Доведена теорема стверджує існування неперервної функції корисності для неперервного відношення переваги $\succsim$, але не всі функції корисності, що зображають $\succsim$ обов'язково будуть неперервними.*

Ми бачимо, що обмеження на відношення переваги $\succsim$ задають обмеження на відповідну функцію корисності. Наприклад, умова монотонності $\succsim$: $(x > y) \Rightarrow (x \succ y)$ означає, що відповідна функція корисності $u(x)$ монотонна у такому розумінні: $(x > y) \Rightarrow (u(x) > u(y))$.

Умова опуклості відношення переваги $\succsim$ означає, що відповідна функція корисності $u(x)$ є **квазіугнутою**, тобто для опуклої споживчої множини X маємо: $\forall x, y', y'' \in X$, таких, що $u(y') \geq u(x), u(y'') \geq u(x)$ випливає, що $u(\alpha y' + (1-\alpha)y'') \geq u(x), \forall \alpha \in [0,1]$. Отже для квазіугнутої функції $u(x)$ множина $\{y \in X |\ u(y) \geq u(x)\}$ є опуклою $\forall x \in X$. Якщо $y' \neq y''$ і $u(\alpha y' + (1-\alpha)y'') > u(x), \forall \alpha \in (0,1)$, тоді функція $u(x)$ є **строго квазіугнутою.**

Теорема 3.3 *Нехай множина X є опуклою. Функція $u(x)$, $x \in X$ буде квазіугнутою тоді і тільки тоді коли виконується умова*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min(u(x), u(y)),\ \forall x, y \in X, \forall \alpha \in [0,1]. \quad (3.1)$$

Функція $u(x), x \in X$ буде строго квазіугнутою тоді і тільки тоді коли виконується умова

$$\begin{aligned} &u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min(u(x), u(y)), \\ &\forall x, y \in X, x \neq y, \forall \alpha \in (0,1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доведення. Доведемо твердження відносно квазіугнотості. Твердження стосовно строгої квазіугнутості доводиться аналогічно.

Необхідність. Нехай функція $u(x), x \in X$ є квазіугнутою. Тоді для $\forall q \in \mathbb{R}$ множина $\{x \in X |\ u(x) \geq q\}$ буде опуклою. Нехай при цьому існують такі $x', x'' \in X, \alpha \in [0,1]$, що

$$u(\alpha x' + (1-\alpha)x'') < \min(u(x'), u(x'')). \quad (3.3)$$

Візьмемо $q = \min(u(x'), u(x''))$. Тоді $u(x') \geq q, u(x'') \geq q$ і за квазіугнутістю одержимо

$$u(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq q = \min(u(x'), u(x'')),$$

що суперечить (3.3).

Достатність. Нехай виконується (3.1). Тоді для довільного $q \in \mathbb{R}$ такого, що $u(x') \geq q, u(x'') \geq q$ маємо $\min(u(x'), u(x'')) \geq q$, а із (3.1) одержимо

$$u(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq \min(u(x'), u(x'')) \geq q.$$

Тому функція $u(x)$ буде квазіугнутою. $\square$

Зауваження 3.2 *Зауважимо, що кожна угнута (опукла вгору) функція є квазіугнутою, але обернене твердження невірне. Дійсно, якщо множина X опукла і $u(x), x \in X$ угнута функція, то*

$$\begin{aligned} &\forall \alpha \in [0,1], \forall x, y \in X: \; u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \\ &\geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) \geq \min(u(x), u(y)). \end{aligned}$$

Тому за Теоремою 3.3 маємо квазіугнутіть функції $u(x)$.

Для заперечення оберненого твердження зауважимо, що довільна зростаюча функція однієї змінної $f(x), x \in \mathbb{R}$ є квазіугнутою, бо множина

$$\{y \in \mathbb{R} |\; f(y) \geq f(x)\} = \{y \in \mathbb{R} |\; y \geq x\} = [x, +\infty)$$

опукла.

4 Задача максимізації корисності

Нехай відношення переваги $\succsim$ є раціональним, неперервним і задовольняє умову локальної ненасичуваності, і нехай $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^L_+$ відповідна неперервна функція корисності.

Задачу вибору оптимального споживчого набору при заданих цінах $p > 0$ і заданому споживчому бюджеті $w > 0$ ми сформулюємо як **задачу максимізації корисності** (ЗМК)

$$\begin{cases} \max\limits_{x \geq 0} u(x), \\ p \cdot x \leq w. \end{cases} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1 *Якщо $p > 0$ і функція корисності $u(x), x \in \mathbb{R}^L_+$ неперервна, то ЗМК (4.1) має розв'язок.*

Доведення. Оскільки бюджетна множина $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \, p \cdot x \leq w\}$ компактна, то неперервна функція $u(x)$ завжди досягає на компакті максимального і мінімального значення (теорема Вейерштрасса). $\square$

Означення 4.1 **Відповідністю попиту** *$x(p, w)$ називається відображення, яке кожній парі (p, w) ставить у відповідність множину $x(p, w)$ розв'язків ЗМК (4.1). Якщо для кожних (p, w) розв'язок ЗМК (4.1) єдиний, то $x(p, w)$ будемо називати* **функцією попиту**.

Теорема 4.2 *Нехай неперервна функція корисності $u(x)$ відповідає неперервному, раціональному відношення переваги $\succsim$, що задовольняє умові локальної ненасичуваності на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді відповідність попиту $x(p, w)$ має такі властивості:*

1. *$x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$, $\forall p, w, \alpha > 0$ – однорідність нульового порядку;*

2. *$p \cdot x = w$, $\forall x \in x(p, w)$ – закон Вальраса;*

3. *якщо відношення переваги $\succsim$ опукле, тоді множина $x(p, w)$ – опукла; якщо відношення переваги $\succsim$ строго опукле, тоді множина $x(p, w)$ одноточкова.*

4. *Відповідність попиту $x(p, w)$ є напівнеперервною зверху. Функція попиту $x(p, w)$ є непервною функцією (p, w).*

Доведення. 1). Зауважимо, що

$$B_{\alpha p, \alpha w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \, \alpha p \cdot x \leq \alpha w\} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \, p \cdot x \leq w\} = B_{p,w}.$$

Тому множини розв'язків ЗМК (4.1) для $B_{\alpha p, \alpha w}$ і для $B_{p,w}$ співпадають.

2). Проведемо доведення від супротивного. Нехай $x \in x(p,w)$ і $p \cdot x < w$. Тоді x це внутрішня точка для множини $B_{p,w}$:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \{y \in \mathbb{R}^L_+ | \ ||y - x|| < \varepsilon\} \subset B_{p,w}.$$

За умовою локальної ненасичуваності

$$\exists y_0 : \ ||y_0 - x|| < \varepsilon, \ y_0 \succ x \Leftrightarrow u(y_0) > u(x),$$

що суперечить оптимальності x.

3). Оскільки відношення переваги $\succsim$ опукле, то відповідна функція корисності $u(x)$ буде квазіугнутою. Візьмемо $x \neq x', x, x' \in x(p,w)$ і для довільного $\alpha \in [0,1]$ розглянемо $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$. Зауважимо, що

$$p \cdot x \leq w, \ p \cdot x' \leq w \Rightarrow p \cdot x'' \leq w \Rightarrow x'' \in B_{p,w}.$$

Крім того

$$u(x) = u(x') = \max_{y \in B_{p,w}} u(y) = u^*.$$

Функція $u(x)$ квазіугнута тому за Теоремою 3.3 маємо

$$u(x'') = u(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \min(u(x), u(x') = u^* = \max_{y \in B_{p,w}} u(y).$$

Але оскільки $x'' \in B_{p,w}$, то $u(x'') = u^* = \max_{y \in B_{p,w}} u(y)$. Отже $x'' \in x(p,w)$.

Нехай тепер відношення переваги $\succsim$ строго опукле. Тоді відповідна функція корисності $u(x)$ буде строго квазіугнутою. Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що $x \in x(p,w), x' \in x(p,w), x \neq x'$ і для довільного $\alpha \in (0,1)$ розглянемо $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$. Аналогічно попереднім міркуванням за Теоремою 3.3 маємо

$$x'' \in B_{p,w}, \ u(x'') > \min(u(x), u(x')) = \max_{y \in B_{p,w}} u(y),$$

що суперечить оптимальності $x, x' \in x(p,w)$. Тому $x = x'$.

4). Відповідність попиту $x(p,w)$ є напівнеперервною зверху у точці $(\bar{p},\bar{w})$, якщо із того, що $(p^{(n)},w^{(n)}) \to (\bar{p},\bar{w})$, $n\to\infty$, $x^{(n)} \in x(p^{(n)},w^{(n)}), \forall n \geq 1$ і $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ випливає, що $x \in x(\bar{p},\bar{w})$.

Проведемо доведення від супротивного.
Нехай $(p^{(n)},w^{(n)}) \to (\bar{p},\bar{w}) > 0$, $n\to\infty$, $x^{(n)} \in x(p^{(n)},w^{(n)})$, $\forall n \geq 1$ і $x^{(n)} \to \tilde{x} \notin x(\bar{p},\bar{w})$. Оскільки $p^{(n)}\cdot x^{(n)} \leq w^{(n)}$, то при $n\to\infty$ одержимо $\bar{p}\cdot\tilde{x} \leq \bar{w}$. Тому $\tilde{x} \in B_{\bar{p},\bar{w}}$ і $\tilde{x} \notin x(\bar{p},\bar{w})$, а значить $u(\tilde{x}) < u(\bar{x}), \forall \bar{x} \in x(\bar{p},\bar{w})$. Функція $u(x)$ неперервна, тому існує y достатньо близький до $\bar{x}$ такий, що $u(\tilde{x}) < u(y)$ і $\bar{p}\cdot y < \bar{w}$. А значить $\exists N, \forall n \geq N$ маємо

$$p^{(n)}\cdot y < w^{(n)} \Rightarrow y \in B_{p^{(n)},w^{(n)}} \Rightarrow u(y) < u(x^{(n)}) \Rightarrow u(y) \leq u(\tilde{x}),$$

що суперечить умові $u(\tilde{x}) < u(y)$. Доведення неперервності функції попиту проводиться аналогічно. $\square$

Задача максимізації корисності (4.1) це задача на умовний екстремум. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = -\lambda_0 u(x) + \lambda(p\cdot x - w).$$

Необхідні умови того, що $x^* \in x(p,w)$ мають вигляд: існують множники Лагранжа λ_0, λ не рівні одночасно нулеві такі, що

$$\begin{cases} -\lambda_0 \dfrac{\partial u}{\partial x_l}(x^*) + \lambda p_l \geq 0, l = \overline{1,L} \\ x_l^* \left(\lambda p_l - \lambda_0 \dfrac{\partial u}{\partial x_l}(x^*)\right) = 0, l = \overline{1,L} \\ \lambda_0 \geq 0, \lambda \geq 0, x^* \geq 0 \\ \lambda(p\cdot x^* - w) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Якщо $\lambda_0 = 0$, то $\lambda p_l x_l^* = 0, l = \overline{1,L}$. Тому $x_l^* = 0, l = \overline{1,L}$, бо $\lambda \neq 0$. А значить $w = 0$, що суперечить умові $w > 0$. Тому можемо покласти $\lambda_0 = 1$, бо множники Лагранжа визначені з точністю до пропорційності. Надалі будемо вважати, що $\lambda_0 = 1$.

Припустимо, що функція корисності $u(x)$ диференційовна і у споживчому наборі $x = (x_1, \ldots, x_L)$ кількість усіх товарів, крім l-го і k-го, залишилась незмінною. Нехай приріст l-го товару Δx_l і приріст k-го товару Δx_k такі, що $u(x + \Delta x) - u(x) = 0$. Тоді

$$du(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Delta x_l + \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\Delta x_k = 0.$$

Звідси маємо

$$MRS_{l,k}(x) = -\frac{\Delta x_k}{\Delta x_l} = \frac{\partial u(x)/\partial x_l}{\partial u(x)/\partial x_k},$$

де $MRS_{l,k}(x)$ називається **граничною нормою заміщення l-го товару k-м товаром** (marginal rate of substitution).

Якщо $x^* \in x(p, w)$ і $\nabla u(x^*) > 0$ то із умов (4.2) маємо

$$MRS_{l,k}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_l}{\partial u(x^*)/\partial x_k} = \frac{p_l}{p_k}, \forall l, k.$$

Приклад 4.1 *Розглянемо функцію корисності Кобба-Дугласа $u(x_1, x_2) = Kx_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1), K > 0$. Оскільки строго зростаюче перетворення переводить задану функцію корисності знову у функцію корисності для того самого відношення переваги, то використавши функцію $\ln(u/K)$ одержимо функцію корисності*

$$V(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha)x_2$$

і відповідну задачу максимізації корисності

$$\begin{cases} \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 \to \min, \\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq w, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, \lambda) = (-\alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - w).$$

Оскільки $x_i > 0, i = 1,2$, то з необхідних умов (4.2) одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\alpha}{x_2} = \lambda p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = w, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^*(p,w) = \dfrac{\alpha w}{p_1}, \\ x_2^*(p,w) = \dfrac{(1-\alpha)w}{p_2}. \end{cases}$$

Ми одержали єдину точку, яка задовольняє необхідні умови. Тому функція $(x_1^*(p,w), x_2^*(p,w))$ буде функцією попиту, бо за теоремою 4.1 розв'язок ЗМК існує.

Означення 4.2 *Для кожного (p,w) функція*

$$V(p,w) = \max_{x \in B_{p,w}} u(x) = u(x(p,w))$$

називається **непрямою функцією корисності**.

Теорема 4.3 *Нехай неперервна функція корисності $u(x)$ відповідає неперервному, раціональному відношення переваги $\succsim$, що задовольняє умові локальної ненасичуваності на $\mathbb{R}_+^L$. Тоді непряма функція корисності $V(p,w)$ має такі властивості:*

1. *$V(\alpha p, \alpha w) = V(p,w), \forall \alpha > 0$;*
2. *$V(p,w)$ строго зростає за w і не зростає за $p_l, \forall l = \overline{1,L}$;*
3. *функція $V(p,w)$ є квазіопуклою по (p,w), тобто множина $\{(p,w) |\ V(p,w) \le \bar{V}\}$ є опуклою для $\forall \bar{V} \in \mathbb{R}$.*
4. *функція $V(p,w)$ є неперервною по (p,w).*

Доведення. 1). За теоремою 4.2 маємо

$$\forall \alpha > 0 : \ V(\alpha p, \alpha w) = u(x(\alpha p, \alpha w)) = u(x(p,w)) = V(p,w).$$

2). Оскільки виконується закон Вальраса, то при $w' > w$ і фіксованих цінах p маємо

$$(B_{p,w} \subset B_{p,w'}) \wedge (L_{p,w} \cap L_{p,w'} = \emptyset) \Rightarrow x(p,w') \succ x(p,w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(p,w') = u(x(p,w')) > u(x(p,w)) = V(p,w).$$

Аналогічно при $p = (p_1,\ldots,p_l,\ldots,p_L)$, $p_l' > p_l$, $p' = (p_1,\ldots,p_l',\ldots,p_L)$ і фіксованому w маємо

$$(B_{p',w} \subset B_{p,w}) \wedge (L_{p,w} \cap L_{p,w'} \neq \emptyset) \Rightarrow x(p,w) \succsim x(p',w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(p,w) = u(x(p,w)) \geq u(x(p',w)) = V(p',w).$$

3). Нехай

$$V(p,w) \leq \bar{V}, V(p',w') \leq \bar{V}.$$

Розглянемо точку $(p'',w'') = (\alpha p + (1-\alpha)p', \alpha w + (1-\alpha)w')$, $\alpha \in [0,1]$. Доведемо, що із того, що $p'' \cdot x \leq w''$ випливає, що $u(x) \leq \bar{V}$. Маємо

$$p'' \cdot x \leq w'' \Leftrightarrow \alpha p \cdot x + (1-\alpha)p' \cdot x \leq \alpha w + (1-\alpha)w' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p \cdot x \leq w) \vee (p' \cdot x \leq w').$$

Якщо $p \cdot x \leq w$, то $u(x) \leq V(p,w) \leq \bar{V}$.

Аналогічно, якщо $p' \cdot x \leq w'$, то $u(x) \leq V(p',w') \leq \bar{V}$. Тому $V(p'',w'') = u(x(p'',w'')) \leq \bar{V}$.

4). Нехай $(p^{(n)},w^{(n)}) \to (\bar{p},\bar{w}), n \to \infty$, $x^{(n)} \in x(p^{(n)},w^{(n)})$, $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$. Тоді із напівнеперервності зверху відповідності попиту $x(p,w)$ маємо

$$\bar{x} \in x(\bar{p},\bar{w}) \Rightarrow u(\bar{x}) = V(\bar{p},\bar{w}).$$

Тому

$$V(\bar{p},\bar{w}) = u(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} u(x^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} V(p^{(n)},w^{(n)}). \qquad \square$$

5 Задача мінімізації витрат. Зв'язок між задачею максимізації корисності та задачею мінімізації витрат

Нехай відношення переваги споживача зображається функцією корисності $u(x)$, задано вектор цін $p = (p_1,\ldots,p_L) > 0$ і рівень корисності $u > u(0)$. Метою споживача може бути вибір споживчого набору, який мінімізує витрати при корисності набору не меншій ніж заданий рівень корисності.

Задача мінімізації витрат (ЗМВ) має вигляд

$$\begin{cases} p \cdot x \to \min, x \geq 0, \\ u(x) \geq u. \end{cases} \tag{5.1}$$

Будемо вважати функцію корисності $u(x)$ неперервною, що зображає локально ненасичуване відношення переваги. Оскільки допустима множина у ЗМВ (5.1) є замкненою, але не є обмеженою, то стверджувати існування розв'язку цієї задачі ми не можемо. Але має місце наступна

Теорема 5.1 *Якщо функція корисності $u(x)$ неперервна, $p > 0$ і $\exists x^* \in \mathbb{R}^L_+ :\ u(x^*) \geq u > u(0)$, тоді існує розв'язок задачі мінімізації витрат (5.1).*

Доведення пропонується провести самостійно. Надалі будемо вважати умови теореми 5.1 виконаними.

Означення 5.1 *Відображення, яке кожній парі (p, u) ставить у відповідність множину $h(p, u)$ розв'язків задачі мінімізації витрат (5.1) називається* **відповідністю попиту Хікса** *(або* **компенсованою відповідністю попиту***). Якщо для кожної пари (p, u) множина $h(p, u)$ розв'язків задачі мінімізації витрат (5.1) одноточкова, тоді $h(p, u)$ називається* **функцією попиту Хікса***.*

Теорема 5.2 *Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді відповідність попиту Хікса $h(p, u)$ має такі властивості:*

1. $h(\alpha p, u) = h(p, u), \forall p > 0, \forall u > U(0), \forall \alpha > 0$ *– умова однорідності нульового порядку за p;*

2. $U(x) = u, \forall x \in h(p, u)$ *– відсутність надлишкової корисності;*

3. *Якщо* $\succsim$ *– опукле, тоді множина* $h(p,u)$ *– опукла. Якщо* $\succsim$ *– строго опукле, тоді множина* $h(p,u)$ *– одноточкова для кожного* (p,u).

Доведення. 1). Допустима множина у ЗМВ (5.1) $x \geq 0$, $u(x) \geq u > u(0)$ не залежить від цін p, а $\min_{x\geq 0} p \cdot x$ і $\min_{x\geq 0}(\alpha p)\cdot x, \forall \alpha > 0$ досягається на тих самих оптимальних споживчих наборах. Тому

$$h(\alpha p, u) = h(p,u), \forall p > 0, \forall u > u(0), \forall \alpha > 0.$$

2). Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує $x \in h(p,u)$ такий, що $u(x) > u$. Розглянемо набір $x' = \alpha x, \alpha \in (0,1)$. Із неперервності функції $u(x)$ випливає, що існує таке $\alpha \in (0,1)$, що $u(x') = u(\alpha x) > u$. Тому x' є допустимим елементом у ЗМВ (5.1). Крім того маємо

$$p \cdot x' = \alpha(p \cdot x) < p \cdot x, \text{ бо } x \neq 0 \text{ і } \alpha \in (0,1).$$

Отже маємо суперечність оптимальності $x \in h(p,u)$.

3). Нехай $\succsim$ опукле. Тоді відповідна функція корисності $u(x)$ є квазіугнутою. Візьмемо $\forall x, x' \in h(p,u)$ і для $\forall \alpha \in [0,1]$ розглянемо набір $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$. Із квазіугнутості $u(x)$ за теоремою 3.3 маємо

$$u(x'') = u(\alpha x + (1-\alpha)x') \geq \min(u(x), u(x')) \geq u,$$
$$\text{бо } u(x) \geq u \text{ і } u(x') \geq u.$$

Тому x'' є допустимим елементом ЗМВ (5.1). Оскільки

$$p \cdot x = p \cdot x' = \min_{u(y)\geq u, y \geq 0} p \cdot y = e^*,$$

то

$$p \cdot x'' = \alpha(p \cdot x) + (1-\alpha)(p \cdot x') = e^* = \min_{u(y)\geq u, y\geq 0} p \cdot y,$$

а значить $x'' \in h(p,u)$.

Нехай $\succsim$ строго опукле. Тоді відповідна функція корисності $u(x)$ є строго квазіугнутою. Доведення проведемо від супротивного. Нехай маємо два різні розв'язки $x, x' \in h(p, u), x \neq x'$ і для $\forall \alpha \in (0, 1)$ розглянемо набір $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$. Із строгої квазіугнутості $u(x)$ за теоремою 3.3 маємо

$$\begin{array}{l} u(x'') = u(\alpha x + (1-\alpha)x') > \min(u(x), u(x')) \geq u, \\ \text{бо } u(x) \geq u \text{ і } u(x') \geq u. \end{array} \tag{5.2}$$

Тому x'' є допустимим елементом ЗМВ (5.1). Оскільки

$$p \cdot x = p \cdot x' = \min_{u(y) \geq u, y \geq 0} p \cdot y = e^*,$$

то

$$p \cdot x'' = \alpha(p \cdot x) + (1-\alpha)(p \cdot x') = e^* = \min_{u(y) \geq u, y \geq 0} p \cdot y,$$

а значить $x'' \in h(p, u)$. Але (5.2) суперечить властивості відсутності надлишкової корисності. $\square$

Теорема 5.3 *Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді для функції попиту Хікса $h(p, u)$ маємо*

$$(p'' - p') \cdot (h(p'', u) - h(p', u)) \leq 0. \ \forall p', p'' > 0.$$

Доведення. За означенням функції $h(p, u)$ маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} p'' \cdot h(p'', u) \leq p'' \cdot h(p', u), \\ p' \cdot h(p'', u) \geq p' \cdot h(p', u), \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p'' - p') \cdot h(p'', u) \leq (p'' - p') \cdot h(p', u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p'' - p') \cdot (h(p'', u) - h(p', u)) \leq 0. \qquad \square$$

Отже функція попиту Хікса $h(p, u)$ задовольняє компенсованому закону попиту.

Означення 5.2 *Функція* $e(p, u) = \min\limits_{u(x) \geq u,\ x \in \mathbb{R}^L_+} p \cdot x$ *називається* **функцією витрат**.

Теорема 5.4 *Нехай функція корисності $u(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді функція витрат $e(p, u)$ має такі властивості:*

1. *$e(\alpha p, u) = \alpha e(p, u), \forall p > 0, \forall u > U(0), \forall \alpha > 0$ – умова однорідності першого порядку за p;*

2. *Функція $e(p, u)$ строго зростає за u і не спадає за p_l, $l = \overline{1, L}$;*

3. *Функція $e(p, u)$ – опукла вгору (угнута) по p.*

Доведення. 1). Зауважимо, що допустима множина ЗМВ (5.1) $x \geq 0, u(x) \geq u > u(0)$ не залежить від цін p, а $\min_{x \geq 0} p \cdot x$ і $\min_{x \geq 0} (\alpha p) \cdot x, \forall \alpha > 0$ досягається на тих самих оптимальних споживчих наборах x^*. Тому

$$e(\alpha p, u) = \alpha(p \cdot x^*) = \alpha e(p, u),\ \forall \alpha > 0.$$

2). Зростання функції витрат $e(p, u)$ за рівнем корисності $u > u(0)$ доведемо від супротивного. Нехай для $u'' > u'$ маємо $e(p, u'') \leq e(p, u')$. Тоді для $\forall x'' \in h(p, u''), \forall x' \in h(p, u')$ одержимо $0 < p \cdot x'' \leq p \cdot x'$, бо $x'' \neq 0, x' \neq 0$. Розглянемо набір $\tilde{x} = \alpha x'', \alpha \in (0, 1)$. Із неперервності функції корисності $u(x)$ випливає, що існує $\alpha \in (0, 1)$ таке, що $u(\tilde{x}) = u(\alpha x'') \geq u'' > u'$. Значить набір $\tilde{x}$ є допустимим у ЗМВ з рівнем корисності u'. Крім того, за припущенням, маємо

$$0 < p \cdot \tilde{x} = \alpha(p \cdot x'') < p \cdot x'' \leq p \cdot x' = \min_{y \geq 0, u(y) \geq u'} p \cdot y,$$

що суперечить оптимальності $x' \in h(p, u')$.

Покажемо, що функція витрат $e(p, u)$ є неспадною за p_l, $\forall l = \overline{1, L}$. Нехай $p''_l > p'_l$ і $p''_k = p'_k$, $\forall k \neq l$. Якщо $x'' \in h(p'', u)$, то

$$e(p'', u) = \sum_{k=1}^{L} p''_k x''_k \geq \sum_{k=1}^{L} p'_k x''_k \geq e(p', u)$$

за означенням функції витрат.

3). Зафіксуємо рівень корисності $u > u(0)$ і розглянемо ціни $p'' = \alpha p + (1-\alpha)p'$, $\forall \alpha \in [0,1]$. Нехай $x'' \in h(p'', u)$, тоді

$$e(p'', u) = p'' \cdot x'' = \alpha p \cdot x'' + (1-\alpha)p' \cdot x'' \geq \alpha e(p, u) + (1-\alpha)e(p', u)$$

за означенням функції витрат. $\square$

Теорема 5.5 *Нехай функція корисності $u(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$, і нехай $p > 0$. Тоді*

1. *Якщо $x^* \in x(p, w)$, тоді $x^* \in h(p, u)$, де $u = u(x^*) = V(p, w)$. Крім того $e(p, u) = w$.*

2. *Якщо $x^* \in h(p, u), u > u(0)$, тоді $x^* \in x(p, w)$, де $w = p \cdot x^* = e(p, u)$. Крім того $V(p, w) = u$.*

Доведення. 1). Доведення проведемо від супротивного. Нехай $x^* \in x(p, w)$, але $x^* \notin h(p, u)$, де $u = u(x^*) = V(p, w)$. Тоді для $x' \in h(p, u)$ маємо $u(x') \geq u = u(x^*) = \max_{x \geq 0, p \cdot x \leq w} u(x)$ і $p \cdot x' < p \cdot x^* = w$, а значить $x' \in x(p, w)$ і порушується закон Вальраса. Тому $x^* \in h(p, u)$, де $u = u(x^*) = V(p, w)$. Крім того із оптимальності x^* у ЗМВ і за законом Вальраса маємо $e(p, u) = p \cdot x^* = w$.

2). Доведення проведемо від супротивного. Нехай $x^* \in h(p, u)$, але $x^* \notin x(p, w)$, де $w = p \cdot x^* = e(p, u)$. Тоді для $x' \in x(p, w)$ маємо $u(x') > u(x^*) \geq u$ і $p \cdot x' \leq w = p \cdot x^*$. Розглянемо набір $x'' = \alpha x', \alpha \in (0, 1)$, і використавши неперервність функції $u(x)$, виберемо $\alpha \in (0, 1)$ так, щоб $u(x'') = u(\alpha x') > u(x^*) \geq u$. Таким чином набір x'' є допустимим у ЗМВ з цінами p і рівнем корисності u. Крім того маємо

$$p \cdot x'' = \alpha p \cdot x' < p \cdot x' \leq p \cdot x^*,$$

що суперечить умові $x^* \in h(p,u)$. Далі $V(p,w) = u(x^*) = u$ за властивістю відсутності надлишкової корисності. $\square$

Наслідок 5.1 *Нехай $x(p,w)$ і $h(p,u)$ це функція попиту і компенсована функція попиту Хікса, відповідно. Якщо $V(p,w)$ і $e(p,u)$ це відповідні непряма функція корисності і функція витрат, то*

$$h(p,u) = x(p, e(p,u)),\ x(p,w) = h(p, V(p,w)) \tag{5.3}$$

і

$$V(p, e(p,u)) = u, \qquad e(p, V(p,w)) = w. \tag{5.4}$$

Приклад 5.1 *Розглянемо задачу мінімізації витрат для функції корисності Кобба-Дугласа $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1)$:*

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min, \\ x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \ge u > u(0,0) = 0, \\ x_i \ge 0, i = 1,2. \end{cases}$$

Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x,\lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(u - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}).$$

Оскільки $u > 0$, то $x_i > 0, i = 1,2$ і необхідні умови мінімуму мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, i = 1,2, \\ \lambda(u - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}) = 0, \lambda \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 - \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = 0, \\ p_2 - \lambda(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = 0, \\ \lambda(u - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}) = 0, \lambda \ge 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha) x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2} x_1.$$

Із третього рівняння системи необхідних умов одержимо

$$h_1(p,u) = \left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha) p_1} \right)^{1-\alpha} u,\ h_2(p,u) = \left(\frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2} \right)^{\alpha} u.$$

Функція витрат має вигляд

$$e(p,u) = \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} u.$$

Використавши співвідношення (5.3) і (5.4), можемо одержати непряму функцію корисності $V(p,w)$ і функцію попиту $x(p,w)$ (див. Приклад 4.1):

$$e(p,V(p,w)) = \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{p_2}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} V(p,w) = w \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} V(p,w) &= \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{p_2}\right)^{1-\alpha} w, \\ x_1(p,w) &= h_1(p,V(p,w)) = \frac{\alpha w}{p_1}, \\ x_2(p,w) &= h_2(p,V(p,w)) = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}. \end{aligned}$$

6 Співвідношення між попитом, непрямою функцією корисності і функцією витрат. Відновлення відношення переваги

Будемо вважати, що функція корисності $u(x)$ є неперервною і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваг $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Таким чином маємо функцію попиту $x(p,w)$ і функцію попиту Хікса $h(p,u)$.

Нам будуть потрібні такі допоміжні означення і теорема.

Означення 6.1 *Для довільної непорожньої замкненої множини $K \subset \mathbb{R}^L$* **опорною функцією** K *називається функція*

$$\mu_K(p) = \inf\{p \cdot x |\ x \in K\}, p \in \mathbb{R}^L.$$

Теорема 6.1 (Теорема спряженості.) *Нехай $K \subset \mathbb{R}^L$ непорожня, замкнена множина і $\mu_K(p)$ її опорна функція. Тоді, щоб існував єдиний елемент $\bar{x} \in K$ такий, що*

$$\bar{p} \cdot \bar{x} = \mu_K(\bar{p})$$

необхідно і достатньо щоб функція $\mu_K(p)$ була диференційовною у точці $p = \bar{p}$ і $\nabla \mu_K(\bar{p}) = \bar{x}$.

Як наслідок теореми спряженості маємо

Теорема 6.2 *Нехай функція корисності $u(x)$ є неперервною і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваг $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді*

$$h(p,u) = \nabla_p e(p,u) \Leftrightarrow h_l(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l}, l = \overline{1,L},$$

де $e(p,u)$ це відповідна функція витрат.

Доведення. Дійсно в умовах теореми існує єдиний елемент $h(p,u) \in \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \ u(x) \geq u\}$ такий, що

$$p \cdot h(p,u) = e(p,u) = \min\{p \cdot x | \ u(x) \geq u, x \in \mathbb{R}^L_+\}.$$

Зауважимо, що функція витрат $e(p,u)$ це опорна функція для множини $\{x \in \mathbb{R}^L_+ | \ u(x) \geq u\}$. Тому, за теоремою спряженості, функція витрат $e(p,u)$ буде диференційовною за p і $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$. $\square$

Теорема 6.3 *Нехай функція корисності $u(x)$ є неперервною і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваг $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$, і функція попиту Хікса $h(p,u)$ неперервно диференційовна за p. Тоді:*

1. *$D_p h(p,u) = D^2_p e(p,u)$, де $D_p h(p,u) = \left\{\dfrac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k}\right\}_{l=\overline{1,L}}^{k=\overline{1,L}}$,*
   $$D^2_p e(p,u) = \left\{\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_l \partial p_k}\right\}_{l=\overline{1,L}}^{k=\overline{1,L}}.$$

2. *Матриця $D_p h(p,u)$ від'ємно напіввизначена і симетрична.*

3. $D_p h(p,u)p = 0$.

Доведення. 1) є наслідком теореми 6.2.
2). Оскільки $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$, то в умовах теореми функція витрат $e(p,u)$ є двічі неперервно диференційовною, а значить
$$\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_l \partial p_k} = \frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_l}, \ \forall l,k = \overline{1,L}.$$
Тому матриця $D_p h(p,u)$ буде симетричною. За теоремою 5.4 функція витрат $e(p,u)$ є опуклою вгору, а значить матриця $D_p^2 e(p,u) = D_p h(p,u)$ буде від'ємно напіввизначеною.
3). За теоремою 5.2 функція попиту Хікса є однорідною нульового порядку за p
$$h_l(\alpha p,u) = h_l(p,u), \ \forall \alpha > 0, \ l = \overline{1,L}.$$
Продиференціюємо цю рівність за змінною α у точці $\alpha = 1$ і одержимо
$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} p_k = 0, \forall l = \overline{1,L} \Leftrightarrow D_p h(p,u)p = 0. \quad \square$$

Зауваження 6.1 *Від'ємну напіввизначеність матриці $D_p h(p,u)$ можна одержати, як наслідок компенсованого закону попиту (теорема 5.3):*
$$\Delta p \cdot \Delta h(p,u) \leq 0 \Rightarrow dp \cdot dh(p,u) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dp \cdot D_p h(p,u) dp \leq 0, \ \forall dp \in \mathbb{R}^L.$$

Означення 6.2 *Будемо називати l-ий і k-ий товари* **замінниками (субститутами)**, *якщо $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$, і будемо називати l-ий і k-ий товари* **доповнюючими (комплементними)**, *якщо $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \leq 0$.*

Наслідок 6.1 *У оптимальному наборі $h(p,u)$ для кожного товару є хоча б один замінник. Дійсно, із від'ємної напіввизначеності матриці $D_p h(p,u)$ випливає, що $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_l} \leq 0$, $\forall l = \overline{1,L}$. Крім того*

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} p_k = 0, \quad \forall l = \overline{1,L},$$

а значить існує хоча б один товар для якого $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$.

Теорема 6.4 (Рівняння Слуцького.) *Нехай функція корисності $u(x)$ є неперервною і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваг $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді для довільних $(p,w)>0$ і рівня корисності $u=V(p,w)$, де $V(p,w)$ це непряма функція корисності, має місце рівняння Слуцького*

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \forall l,k = \overline{1,L},$$

або у матричній формі

$$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x^T(p,w) = S(p,w),$$

де $S(p,w)$ це матриця Слуцького.

Доведення. Нехай задано $(\bar{p},\bar{w})$ і рівень корисності $\bar{u} = V(\bar{p},\bar{w})$. За наслідком 5.1, формула (5.4), маємо $\bar{w} = e(\bar{p},\bar{u})$. А за (5.3) маємо $h_l(p,u) = x_l(p,e(p,u))$, $\forall l = \overline{1,L}$. Звідси, диференціюючи за p_k у точці $(\bar{p},\bar{u})$, і використавши теорему 6.2 і формулу (5.3), одержимо

$$\frac{\partial h_l(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\bar{p},e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial w} \frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_k} =$$

$$= \frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial w} h_k(\bar{p},\bar{u}) = \frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_k} +$$

$$+\frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}h_k(\bar{p},V(\bar{p},\bar{w})) = \frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}x_k(\bar{p},\bar{w}),$$

$\forall l,k=\overline{1,L}.$ $\square$

З теореми 6.4 випливає, що $D_p h(p,u)$ співпадає з матрицею Слуцького $S(p,w)$. Тому, враховуючи теорему 6.3, робимо висновок: матриця Слуцького $S(p,w)$, при умові, що попит визначається максимізацією корисності, має властивості:

1. $S(p,w)$ від'ємно напіввизначена;

2. $S(p,w)$ симетрична;

3. $S(p,w)p=0$.

Теорема 6.5 (Рівність Роя.) *Нехай функція корисності $u(x)$ є неперервною і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваг $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Якщо непряма функцся корисності $V(p,w)$ диференційовна в точці $(\bar{p},\bar{w})$, тоді має місце рівність Роя*

$$x_l(\bar{p},\bar{w}) = -\frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})/\partial p_l}{\partial V(\bar{p},\bar{w})/\partial w}, \quad \forall l=\overline{1,L}.$$

Доведення. Нехай $\bar{u}=V(\bar{p},\bar{w})$, тоді $\bar{w}=e(\bar{p},\bar{u})$. Оскільки із (5.4) маємо $V(p,e(p,\bar{u}))=\bar{u}$, то продиференціювавши цю рівність за змінною p_l у точці $p=\bar{p}$, одержимо

$$\frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_l} + \frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}\frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_l} = 0. \qquad (6.1)$$

За теоремою 6.2 маємо $\partial e(\bar{p},\bar{u})/\partial p_l = h_l(\bar{p},\bar{u})$, тому із (6.1) випливає

$$\frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_l} + \frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}h_l(\bar{p},\bar{u}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_l} + \frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}h_l(\bar{p},V(\bar{p},\bar{w})) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial p_l} + \frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})}{\partial w}x_l(\bar{p},\bar{w}) = 0.$$

Тут ми використали рівність (5.3). $\square$

Нехай задана функція витрат $e(p,u)$. Ми знаємо, що ця функція є строго зростаючою за u, неперервною, неспадною, однорідною першого порядку та опуклою вгору за p. Якщо розв'язок ЗМВ єдиний для довільних (p,u), то за теоремою 6.2 функція $e(p,u)$ диференційовна за $p_l, \forall l = \overline{1,L}$. Доведемо дві допоміжні леми.

Лема 6.1 *Нехай дійснозначна функція $f(x), x \in \mathbb{R}^L$ опукла вгору і диференційовна, а множина $A \subset \mathbb{R}^L$ опукла. Тоді $\forall x \in A$, $\forall z \in \mathbb{R}^L$ таких, що $x + z \in A$ маємо*

$$f(x+z) \leq f(x) + \nabla f(x) \cdot z.$$

Доведення. Дійсно з опуклості вгору функції $f(x)$ маємо

$$f(\alpha x' + (1-\alpha)x) \geq \alpha f(x') + (1-\alpha) f(x), \tag{6.2}$$

$\forall x, x' \in A$, $\forall \alpha \in (0,1]$. Покладемо $z = x' - x$, тоді із (6.2) одержимо

$$f(x+z) \leq f(x) + \frac{f(x+\alpha z) - f(x)}{\alpha}, \ \forall \alpha \in (0,1]. \tag{6.3}$$

Оскільки функція $f(x)$ диференційовна, то із (6.3) маємо

$$f(x+z) \leq f(x) + \nabla f(x) \cdot z + \frac{o(\alpha)}{\alpha}, \ \forall \alpha \in (0,1].$$

Звідси при $\alpha \to 0$ одержимо твердження леми. $\square$

Лема 6.2 (Формула Ейлера.) *Якщо дійснозначна функція $f(x), x \in \mathbb{R}^L$ є однорідною порядку $r, r \in Z$ і диференційовною, то*

$$\nabla f(x) \cdot x = r f(x), \forall x \in \mathbb{R}^L.$$

Доведення. Дійсно із означення однорідності порядку r маємо

$$f(tx) = t^r f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^L, \ \forall t > 0.$$

Продиференціюємо цю рівність за змінною t у точці $t = 1$ і одержимо

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{\partial f(x)}{\partial x_l} x_l = rf(x) \Leftrightarrow \nabla f(x) \cdot x = rf(x). \qquad \square$$

Теорема 6.6 *Нехай функція $e(p, u)$ є невід'ємною, строго зростаючою за u, неперервною, неспадною, однорідною першого порядку, опуклою вгору та диференційовною за p. Тоді для кожного рівня корисності u функція $e(p, u)$ є функцією витрат, пов'язаною з множиною не гірших наборів*

$$V_u = \{x \in \mathbb{R}^L_+ |\ p \cdot x \geq e(p, u),\ \forall p > 0\}.$$

Таким чином $e(p, u) = \min_{x \in V_u} p \cdot x, \forall p > 0$.

Доведення. Із означення випливає, що множина V_u є замкненою і обмеженою знизу. Покажемо, що $V_u \neq \emptyset$. Візьмемо набір $x = \lambda e, \lambda > 0$, $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L_+$. Нам потрібно показати, що існує таке λ, що $\forall p > 0$

$$p \cdot x = \lambda p \cdot e = \lambda \sum_{l=1}^{L} p_l \geq e(p, u). \tag{6.4}$$

Дійсно, щоб виконувалась нерівність (6.4), виберемо λ так

$$\lambda \geq \frac{e(p, u)}{\sum_{l=1}^{L} p_l} = e\left(\frac{p}{\sum_{l=1}^{L} p_l}, u\right). \tag{6.5}$$

Величина у правій частині нерівності (6.5) є обмеженою, бо u фіксоване,

$$\left\| \frac{p}{\sum_{l=1}^{L} p_l} \right\| \leq \sqrt{L}, \qquad \forall p > 0,$$

а функція $e(p, u)$ неперервна. Таким чином для заданих цін $p > 0$ завжди існує $\min_{x \in V_u} p \cdot x$, а з означення V_u випливає

$$e(p, u) \leq \min_{x \in V_u} p \cdot x.$$

Покажемо, що

$$e(p,u) \geq \min_{x \in V_u} p \cdot x.$$

Оскільки функція $e(p,u)$ опукла вгору і диференційовна за p, то згідно леми 6.1 маємо

$$e(p',u) \leq e(p,u) + \nabla_p e(p,u) \cdot (p'-p), \ \forall p,p' > 0. \tag{6.6}$$

Але за формулою Ейлера $\nabla_p e(p,u) \cdot p = e(p,u)$, тому із (6.6) одержимо

$$\begin{aligned} e(p',u) \leq e(p,u) + \nabla_p e(p,u) \cdot p' - \\ -\nabla_p e(p,u) \cdot p = \nabla_p e(p,u) \cdot p'. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Оскільки $e(p,u)$ є неспадною за $p_l, \forall l = \overline{1,L}$ і диференційовною, то $\nabla_p e(p,u) \geq 0$, а отже із (6.7) випливає, що $\nabla_p e(p,u) \in V_u$. Тому

$$\min_{x \in V_u} p \cdot x \leq p \cdot \nabla_p e(p,u) = e(p,u).$$

Тут ми використали формулу Ейлера. Отже

$$e(p,u) = \min_{x \in V_u} p \cdot x. \qquad \square$$

Нехай функція попиту $x(p,w)$ однорідна нульового порядку, задовольняє закон Вальраса і неперервно диференційовна. Щоб відновити функцію витрат $e(p,u)$ за функцією попиту $x(p,w)$ можна скористатись тим, що

$$\nabla_p e(p,u) = h(p,u) \quad \text{і} \quad h(p,u) = x(p,e(p,u)).$$

Таким чином для знаходження функції витрат $e(p,u)$, при фіксованому рівні корисності u, маємо систему рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l} = x_l(p,e(p,u)), \ l = \overline{1,L} \tag{6.8}$$

з початковою умовою $e(p^0,u)=w^0$. Якщо продиференціювати (6.8) за змінною p_k, то одержимо

$$\frac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_k \partial p_l}=\frac{\partial x_l(p,e(p,u))}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(p,e(p,u))}{\partial w}\frac{\partial e(p,u)}{\partial p_k}=$$

$$=\frac{\partial x_l(p,e(p,u))}{\partial p_k}+\frac{\partial x_l(p,e(p,u))}{\partial w}h_k(p,u)=\frac{\partial x_l(p,e(p,u))}{\partial p_k}+$$

$$+\frac{\partial x_l(p,e(p,u))}{\partial w}x_k(p,e(p,u))=s_{lk}(p,e(p,u)),\ \ k,l=\overline{1,L},$$

де $s_{lk}(p,w)$ це елемент матриці Слуцького. Оскільки $x(p,w)$ неперервно диференційовна, то функція витрат $e(p,u)$ є двічі неперервно диференційовною. А тому матриця Слуцького $S(p,w)$ буде симетричною. З теорії рівнянь у частинних похідних випливає, що умова симетричності матриці частинних похідних правої частини системи (6.8) є необхідною і достатньою для існування розв'язку системи (6.8). Крім того, якщо розв'язок $e(p,u)$ існує, то із від'ємної напіввизначеності матриці Слуцького $S(p,w)$ буде випливати опуклість вгору функції витрат $e(p,u)$. Таким чином, необхідними і достатніми умовами відновлення функції витрат є симетричність і від'ємна напіввизначеність матриці Слуцького.

7 Аналіз добробуту споживача

Нехай споживач має раціональне, неперервне, локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на споживчій множині $\mathbb{R}^L_+$. Будемо вивчати як впливає зміна цін на добробут споживача. Вважаємо, що споживчий бюджет $w>0$ є сталим і задано початковий вектор цін p^0. Розглянемо вплив зміни цін з $p^0=(p^0_1,\dots,p^0_L)$ на $p^1=(p^1_1,\dots,p^1_L)$.

Нехай $V(p,w)$ це непряма функція корисності, яка відповідає відношенню переваги $\succsim$. Нагадаємо, що $V(p,w)$ задає максимальну корисність, яку може одержати споживач при цінах p і споживчому бюджеті w. При зміні цін з p^0 на p^1

рівень добробуту споживача падає тоді і тільки тоді, коли $V(p^0, w) > V(p^1, w)$.

Оскільки функція корисності визначається з точністю до строго зростаючого перетворення, то ми можемо розглянути спеціальний вид непрямої функції корисності: **непряму функцію корисності, вимірну у грошових одиницях**. Введемо її за допомогою відповідної функції витрат $e(p, u)$.

Нехай задано довільна непряма функція корисності $V(\cdot, \cdot)$. Зафіксуємо деякий вектор цін $\bar{p} > 0$, і розглянемо функцію $e(\bar{p}, V(p, w))$. Ця функція задає величину капіталу, яка потрібна щоб досягти рівня корисності $V(p, w)$ при цінах $\bar{p}$. Оскільки функція $e(\bar{p}, u)$ строго зростає за змінною u, то функція $e(\bar{p}, V(p, w))$ буде непрямою функцією корисності, яка відповідає відношенню переваги $\succsim$, і різниця

$$e(\bar{p}, V(p^1, w)) - e(\bar{p}, V(p^0, w))$$

буде задавати міру зміни добробуту у грошових одиницях. Якщо вибрати $\bar{p} = p^0$ або $\bar{p} = p^1$, тоді одержимо такі міри зміни добробуту:

Означення 7.1 *Нехай* $u^0 = V(p^0, w)$, $u^1 = V(p^1, w)$. *Величина*

$$EV(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^0, u^1) - w$$

називається **еквівалентною варіацією**.

Величина

$$CV(p^0, p^1, w) = e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) = w - e(p^1, u^0)$$

називається **компенсуючою варіацією**.

Тут ми використали рівності $e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1) = w$.

З'ясуємо зміст введених понять. Почнемо з еквівалентної варіації. При зміні цін з p^0 на p^1 і незмінному споживчому бюджеті w, рівень досягнутої максимальної корисності для споживача змінився з $u^0 = V(p^0, w)$ на $u^1 = V(p^1, w)$. Поставимо питання: на яку величину EV потрібно змінити споживчий бюджет, щоб при цінах p^0 досягти рівня корисності u^1. Ми маємо

$$V(p^0, w + EV) = u^1 \ \Rightarrow \ w + EV = e(p^0, u^1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ EV = EV(p^0, p^1, w).$$

Тут ми використали рівність $V(p, e(p, u)) = u$.

Якщо ж нам потрібно так змінити споживчий бюджет $w - CV$, щоб при нових цінах p^1 споживач залишився на початковому рівні максимальної корисності $u^0 = V(p^0, w)$, то ми будемо мати

$$V(p^1, w - CV) = u^0 \ \Rightarrow \ w - CV = e(p^1, u^0) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ CV = CV(p^0, p^1, w).$$

Одержимо інтегральне представлення еквівалентної варіації $EV(p^0, p^1, w)$ і компенсуючої варіації $CV(p^0, p^1, w)$ через функцію попиту Хікса $h(p.u)$. Нехай маємо зміну цін з p^0 на p^1 таку, що

$$p_1^0 \neq p_1^1, \ p_k^0 = p_k^1 = \bar{p}_k, \ \forall k \neq 1.$$

Позначимо $\bar{p}_{-1} = (\bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_L)$, тоді $p^0 = (p_1^0, \bar{p}_{-1})$ і $p^1 = (p_1^1, \bar{p}_{-1})$. Ми маємо рівності

$$h_l(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_l}.\forall l = \overline{1, L}, w = e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1),$$

тому

$$EV(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - w = e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1) =$$

$$= \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial e(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)}{\partial p_1} dp_1 = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1) dp_1. \qquad (7.1)$$

Аналогічно

$$CV(p^0, p^1, w) = w - e(p^1, u^0) = e(p^0, u^0) - e(p^1, u^0) =$$

$$= \int_{p_1^1}^{p_1^0} \frac{\partial e(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0)}{\partial p_1} dp_1 = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) dp_1.$$

Зрозуміло, що подібні міркування можна застосувати до зміни ціни на довільний l-ий товар, і одержати інтегральне представлення еквівалентної і компенсуючої варіацій через $h_l(p,u)$, $\forall l = \overline{1, L}$.

Розглянемо приклад застосування еквівалентної варіації і компенсуючої варіації. Припустимо, що уряд увів податок $t > 0$ на продаж одиниці першого товару. Таким чином ціна на перший товар змінилась із p_1^0 на $p_1^0 + t$, а ціни на інші товари не змінились. Сукупний доход держави від споживача зріс на $T = tx_1(p^1, w)$. Цей же приріст сукупного доходу T держава може отримати, обклавши податком весь споживчий бюджет w. З'ясуємо, який податок більше знизить добробут споживача. Споживачеві буде гірше від оподаткування продажу першого товару, якщо $V(p^1, w) < V(p^0, w - T)$. Але для еквівалентної варіації маємо $V(p^1, w) = V(p^0, w + EV(p^0, p^1, w))$, тому споживачеві буде гірше від оподаткування продажу першого товару, якщо

$$V(p^0, w + EV(p^0, p^1, w)) < V(p^0, w - T) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow w + EV(p^0, p^1, w) < w - T \;\Rightarrow\; EV(p^0, p^1, w) < -T.$$

Величина $-EV(p^0, p^1, w) - T$ називається **критичною втратою від оподаткування товару**, і показує на яку суму оподаткування товару відрізняється від сукупного оподаткування споживчого бюджету. Якщо критичні втрати більші нуля, то споживачеві буде гірше від оподаткування продажу товару.

Критичні втрати можна виразити через функцію попиту Хікса. Оскільки

$$w = e(p^1, V(p^1, w)) = e(p^1, u^1),$$

то

$$T = tx_1(p^1, w) = tx_1(p^1, e(p^1, u^1)) = th_1(p^1, u^1).$$

Тому, використавши (7.1), одержимо

$$-T - EV(p^0, p^1, w) = -th_1(p^1, u^1) + \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)dp_1 =$$

$$= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1) - h_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^1)]dp_1. \qquad (7.2)$$

Із компенсованого закону попиту маємо

$$(p_1^1 - p_1)\left[h_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^1) - h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)\right] \leq 0.$$

Тому із (7.2) маємо $-T-EV(p^0, p^1, w) \geq 0$, а значить споживачеві завжди буде не краще від оподаткування продажу товару ніж від сукупного оподаткування споживчого бюджету.

Припустимо, що уряд надає компенсацію споживачеві після введення податку t на продаж одиниці першого товару, так щоб утримати добробут споживача на початковому рівні $u^0 = V(p^0, w)$. Сукупний доход держави від споживача зросте на $th_1(p^1, u^0)$, а витрати на компенсацію будуть дорівнювати $-CV(p^0, p^1, w)$. Держава буде мати дефіцит, якщо

$$th_1(p^1, u^0) < -CV(p^0, p^1, w).$$

Аналогічно міркуванням при виведенні (7.2), використавши інтегральне представлення компенсуючої варіації, одержимо

$$-CV(p^0, p^1, w) - th_1(p^1, u^0) =$$

$$= \int_{p_1^0}^{p_1^0+t} [h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) - h_1(p_1^0 + t, \bar{p}_{-1}, u^0)]dp_1 \geq 0.$$

Тому при виплаті справедливої компенсації держава завжди буде мати дефіцит.

До цього часу ми з'ясовували питання порівняння добробуту споживача при зміні цін з p^0 на p^1. Припусти, що ми хочемо порівняти добробут споживача при зміні цін з p^0 на

p^1 і зміні цін з p^0 на p^2. Яка зміна цін краща для споживача? Для порівняння використаємо еквівалентну варіацію. Дійсно

$$EV(p^0, p^1, w) - EV(p^0, p^2, w) = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^2).$$

Таким чином перехід до цін p^1 буде кращим для споживача ніж перехід до цін p^2 тоді і тільки тоді, коли $EV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^2, w)$.

Прикладом застосування такого порівняння може бути поріняння введення податків на продаж різних товарів. Наприклад, нехай уряд може ввести податок t_1 на продаж одиниці першого товару, що приведе до нового цінового вектору p^1, або може ввести податок t_2 на продаж одиниці другого товару, що приведе до нового цінового вектору p^2. При цьому зростання сукупного доходу уряду передбачається рівним $T = t_1 x_1(p^1, w) = t_2 x_2(p^2, w)$. Оскільки для споживача податок t_1 буде кращим за податок t_2 тоді і тільки тоді, коли

$$EV(p^0, p^1, w) > EV(p^0, p^2, w) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -T - EV(p^0, p^1, w) < -T - EV(p^0, p^2, w),$$

то податок t_1 буде кращим за податок t_2 тоді і тільки тоді, коли критичні втрати від податку t_1 будуть меншими за критичні втрати від податку t_2.

8 Сукупний попит

Нехай маємо I споживачів з раціональними відношеннями переваги $\succsim_i$, $i = \overline{1, I}$ і відповідними функціями попиту $x^i(p, w_i)$, $i = \overline{1, I}$. Усім споживачам відомий вектор цін p і споживачі не можуть впливати на ціни.

Означення 8.1 Сукупним попитом *будемо називати функцію*

$$x(p, w_1, \ldots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w_i).$$

З'ясуємо питання: коли сукупний попит залежить лише від цін p і сукупного споживчого доходу $w = \sum_{i=1}^{I} w_i$?

Зрозуміло, що для виконання

$$x(p, w_1, \ldots, w_I) = x(p, \sum_{i=1}^{I} w_i)$$

необхідно і достатньо виконання рівності

$$x(p, w_1, \ldots, w_I) = x(p, w_1', \ldots, w_I') \text{ при } \sum_{i=1}^{I} w_i = \sum_{i=1}^{I} w_i'.$$

При цьому, якщо сукупний попит диференційовний, то при перерозподілі доходів $\sum_{i=1}^{I} dw_i = 0$ будемо мати незмінний сукупний попит

$$dx_l(p, w_1, \ldots, w_I) = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_l^i(p, w_i)}{\partial w_i} dw_i = 0. \tag{8.1}$$

Тут $x_l(p, w_1, \ldots, w_I)$ це сукупний попит на l-ий товар, $x_l^i(p, w_i)$ це попит на l-ий товар i-го споживача. Оскільки (8.1) має місце для довільного перерозподілу доходів і довільному початковому значенню доходів, то при $dw_i + dw_j = 0$, $\forall i \neq j$, $dw_k = 0$, $\forall k \neq i \neq j$ маємо

$$\frac{\partial x_l^i(p, w_i)}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial x_l^j(p, w_j)}{\partial w_j} dw_j = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_l^i(p, w_i)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_l^j(p, w_j)}{\partial w_j}, \; \forall l = \overline{1, L}, \; \forall (w_1, \ldots, w_I). \tag{8.2}$$

Зрозуміло, що умова (8.2) буде і достатньою для залежності сукупного попиту лише від цін і сукупного доходу.

Теорема 8.1 *Для того щоб виконувалась умова (8.2) необхідно і достатньо, щоб непрямі функції корисності споживачів мали форму Гормена*

$$V_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p) w_i, \; i = \overline{1, I}. \tag{8.3}$$

Доведення. Доведемо лише достатність. Нехай виконується (8.3), тоді за рівністю Роя маємо

$$x_l^i(p, w_i) = -\frac{\partial V_i(p, w_i)/\partial p_l}{\partial V_i(p, w_i)/\partial w_i} = -\frac{1}{b(p)}\left(\frac{\partial a_i(p)}{\partial p_l} + \frac{\partial b(p)}{\partial p_l} w_i\right).$$

Тому

$$\frac{\partial x_l^i(p, w_i)}{\partial w_i} = -\frac{1}{b(p)}\frac{\partial b(p)}{\partial p_l} \Rightarrow \frac{\partial x_l^i(p, w_i)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_l^j(p, w_j)}{\partial w_j},\ \forall l = \overline{1, L},$$

$\forall i, j \in \{1, \ldots, I\}, \forall w_i, w_j.$ $\square$

Зрозуміло, що умова (8.3) накладає дуже сильні обмеження на непряму функцію корисності споживачів. Можна застосувати інший підхід. Якщо споживчий дохід i-го споживача є функцією цін і сукупного доходу $w_i = w_i(p, w)$, $i = \overline{1, I}$, $w = \sum_{i=1}^{I} w_i$, тоді маємо для сукупного попиту

$$x(p, w) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, w_i(p, w)).$$

Сукупність функцій $(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w))$, при умові

$$\sum_{i=1}^{I} w_i(p, w) = w,$$

називають **правилом розподілу доходу**.

Розглянемо тепер питання коли сукупний попит задовольняє слабку аксіому виявленої переваги. Зрозуміло, що властивості неперервності, однорідності нульового порядку і виконання закону Вальраса для сукупного попиту випливають із відповідних властивостей індивідуального попиту споживачів.

Припустимо, що задано правило розподілу доходу

$$w_i(p, w) = \alpha_i w,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1.$$

У цьому випадку ми маємо сукупний попит

$$x(p,w)=\sum_{i=1}^{I}x^i(p,\alpha_i w).$$

Сукупний попит задовольняє слабку аксіому виявленої переваги, якщо $\forall (p,w),(p',w')$ маємо

$$\begin{cases} p\cdot x(p',w')\le w, \\ x(p,w)\ne x(p',w') \end{cases} \Rightarrow\ p'\cdot x(p,w)>w'.$$

Покажемо, що споживачі можуть мати функції попиту, що задовольняють СА, а сукупний попит не буде задовольняти СА.

Приклад 8.1 *Нехай $L=2, I=2$, тобто маємо два товари і два споживача. Правило розподілу доходу $w_1=w_2=w/2$, де w це сукупний доход. Виберемо $x^1(p,w/2), x^1(p',w/2)$, $x^2(p,w/2), x^2(p',w/2)$ так, щоб для обох споживачів виконувалась СА*

$$\begin{cases} p\cdot x^1(p',w/2)\le w/2, \\ x^1(p',w/2)\ne x^1(p,w/2), \\ p'\cdot x^1(p,w/2)>w/2, \end{cases} \quad \begin{cases} p\cdot x^2(p',w/2)\le w/2, \\ x^2(p',w/2)\ne x^2(p,w/2), \\ p'\cdot x^2(p,w/2)>w/2, \end{cases}$$

і щоб

$$p\cdot\frac{x^1(p',w/2)+x^2(p',w/2)}{2}\le\frac{w}{2},$$
$$p'\cdot\frac{x^1(p,w/2)+x^2(p,w/2)}{2}\le\frac{w}{2},$$
$$x^1(p,w/2)+x^2(p,w/2)\ne x^1(p',w/2)+x^2(p',w/2).$$

Оскільки $x(p,w)=x^1(p,w/2)+x^2(p,w/2)$, то для сукупного попиту $x(p,w)$ маємо

$$\begin{cases} p\cdot x(p',w)\le w, \\ x(p',w)\ne x(p,w), \\ p'\cdot x(p,w)\le w, \end{cases}$$

тобто маємо порушення СА.

Нагадаємо, що функція попиту $x(p,w)$ задавольняє СА тоді і тільки тоді, коли $x(p,w)$ задовольняє компенсований закон попиту: $\forall (p,w), (p',w')$ таких, що $p' \cdot x(p,w) = w'$ маємо

$$(p'-p)\cdot(x(p',w') - x(p,w)) \leq 0$$

із строгою нерівністю при $x(p,w) \neq x(p',w')$.

Якщо при зміні (p,w) на (p',w'), де w, w' це сукупний дохід, відбувається компенсація кожному споживачеві

$$\alpha_i w' = p' \cdot x^i(p, \alpha_i w),\ i = \overline{1,I}$$

тоді при виконанні СА для кожного споживача ми маємо

$$(p'-p)\cdot(x^i(p',\alpha_i w') - x^i(p,\alpha_i w) \leq 0,\ i = \overline{1,I}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p'-p)\cdot\sum_{i=1}^{I}(x^i(p',\alpha_i w') - x^i(p,\alpha_i w)) \leq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (p'-p)\cdot(x(p',w') - x(p,w)) \leq 0$$

із строгою нерівністю, якщо $x(p,w) \neq x(p',w')$. При цьому відбувається коменсація і сукупного доходу, бо

$$w' = \sum_{i=1}^{I}\alpha_i w' = \sum_{i=1}^{I} p' \cdot x^i(p,\alpha_i w) = p' \cdot \sum_{i=1}^{I} x^i(p,\alpha_i w) = p' \cdot x(p,w).$$

Порушення СА для сукупного попиту може відбуватись, бо із компенсації сукупного доходу не випливає компенсація індивідуальних доходів. Потрібно підсилити вимоги до індивідуальних функцій попиту.

Означення 8.2 *Будемо говорити, що функція попиту $x^i(p,w_i)$ задовольняє некомпенсований закон попиту (НЗП), якщо*

$$(p'-p)\cdot(x^i(p',w_i) - x^i(p,w_i)) \leq 0,\ \forall p, p', w_i$$

із строгою нерівністю при $x^i(p',w_i) \neq x^i(p,w_i)$.

Теорема 8.2 *Якщо кожна індивідуальна функція попиту* $x^i(p, w_i)$, $w_i = \alpha_i w$, $i = \overline{1, I}$ *задовольняє НЗП, то і сукупний попит*

$$x(p, w) = \sum_{i=1}^{I} x^i(p, \alpha_i w)$$

задовольняє НЗП. Як наслідок, сукупний попит задовольняє СА.

Доведення. Дійсно, із виконання НЗП для $x^i(p, w_i)$, $w_i = \alpha_i w$, $i = \overline{1, I}$ маємо

$$(p' - p) \cdot (x^i(p', w_i) - x^i(p, w_i)) \leq 0 \ \forall p, p', w_i = \alpha_i w, i = \overline{1, I} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p' - p) \cdot \sum_{i=1}^{I} (x^i(p', \alpha_i w) - x^i(p, \alpha_i w)) \leq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (p' - p) \cdot (x(p', w) - x(p, w)) \leq 0.$$

Якщо $x(p, w) \neq x(p', w)$, то

$$\exists i_0 : \ x^{i_0}(p, \alpha_{i_0} w) \neq x^{i_0}(p', \alpha_{i_0} w) \ \Rightarrow$$

$$(p' - p) \cdot (x^{i_0}(p', \alpha_{i_0} w) - x^{i_0}(p, \alpha_{i_0} w)) < 0, \ \Rightarrow$$

$$(p' - p) \cdot (x(p', w) - x(p.w)) < 0.$$

Для перевірки виконання СА візьмемо $\forall (p, w), (p', w')$ такі, що

$$\begin{cases} p \cdot x(p', w') \leq w, \\ x(p', w') \neq x(p, w). \end{cases} \tag{8.4}$$

Позначимо $p'' = \dfrac{w}{w'} p'$. Оскільки функція $x(p, w)$ є однорідною нульового порядку, то

$$x(p'', w) = x(\frac{w}{w'} p', w) = x(p', w').$$

Тоді з виконання НЗП маємо

$$(p'' - p) \cdot (x(p'', w) - x(p, w)) < 0 \ \Rightarrow$$

$$w - p'' \cdot x(p, w) - p \cdot x(p'', w) + w < 0. \tag{8.5}$$

Із (8.4) і означення p'' маємо

$$p \cdot x(p', w') \leq w \;\Rightarrow\; p \cdot x(p'', w) \leq w.$$

Тому із (8.5) одержимо

$$p'' \cdot x(p, w) > w \;\Rightarrow\; \frac{w}{w'} p' \cdot x(p, w) > w \;\Rightarrow p' \cdot x(p, w) > w'.$$

Отже СА виконується. $\square$

9 Теорія виробництва. Властивості виробничих множин.

Розглянемо другу частину ринкової економіки, а саме ту частину, яка забезпечує ринок товарами. Будемо вважати, що виробництво складається з виробничих одиниць, які ми будемо називати **фірмами**. Будемо розглядати економіку з L товарами.

Означення 9.1 **Виробничим вектором** *або* **виробничим планом** *будемо називати вектор* $y = (y_1, \ldots, y_L) \in \mathbb{R}^L$.

Домовимось, що додатні значення y_l означають випуск l-го продукту, а від'ємні значення y_l означають використання l-го продукту, як фактору виробництва. Нульове значення означає, що виробничий процес не витрачає і не випускає відповідний продукт. Для аналізу поведінки фірми необхідно визначити множину технологічно можливих для фірми виробничих планів.

Означення 9.2 *Множину* $Y \subset \mathbb{R}^L$ *технологічно можливих для фірми виробничих планів називають* **виробничою множиною** *фірми.*

Таким чином, при заданій виробничій множині $Y \subset \mathbb{R}^L$ маємо, якщо $y \in Y$, то виробничий план y є технологічно можливим для фірми, а якщо $y \notin Y$, то виробничий план y є технологічно неможливим.

Іноді для опису виробничої множини Y використовують функцію $F(y)$ таку, що

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^L |\ F(y) \leq 0\}$$

і $F(y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $y \in \partial Y$, де ∂Y це границя множини Y.

Таку функцію F називають **трансформаційною функцією**, а множину $\{y \in \mathbb{R}^L |\ F(y) = 0\}$ називають **трансформаційною границею**.

Нехай трансформаційна функція $F(y)$ диференційовна. Для поверхні $F(\bar{y}) = 0$, якщо змінюються тільки величини $\bar{y}_l$ і $\bar{y}_k$, будемо мати

$$\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_k} \Delta y_k + \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_l} \Delta y_l = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_l} / \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_k} = -\frac{\Delta y_k}{\Delta y_l} = MRT_{lk}(\bar{y}).$$

Величина $MRT_{lk}(\bar{y})$ називається **граничною нормою трансформації l-го товару у k-ий товар**.

Часто у виробничих процесах множина продуктів випуску відрізняється від множини продуктів, які витрачаються у виробничому процесі (факторів виробництва). У цьому випадку зручно позначати випуск і витрати різними символами. Наприклад, $q = (q_1, \dots, q_M) \geq 0$ позначає рівень випуску фірмою M товарів і $z = (z_1, \dots, z_{L-M}) \geq 0$ позначає рівень витрат фірмою $L - M$ товарів (виробничих факторів).

Найбільш часто розглядається модель з однопродуктовим випуском. При цьому технологія фірми описується за допомогою **виробничої функції** $f(z)$, яка задає максимальну кількість випуску q при використанні виробничих факторів

$z = (z_1, \ldots, z_{L-1})$. Якщо товар випуску це L-ий товар, то виробнича функція $f(z)$ породжує виробничу множину

$$Y = \{(-z_1, \ldots, -z_{L-1}, q) |\ q - f(z) \leq 0, (z_1, \ldots, z_{L-1}, q) \geq 0\}.$$

Якщо рівень випуску $f(\bar{z}) = const$ і змінюються лише фактори $\bar{z}_k$ і $\bar{z}_l$, а виробнича функція $f(z)$ диференційовна, тоді

$$df(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_l}\Delta z_l + \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_k}\Delta z_k = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_l} / \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z_k} = -\frac{\Delta z_k}{\Delta z_l} = MRTS_{lk}(\bar{z}).$$

Величина $MRTS_{lk}(\bar{z})$ називається **граничною нормою технологічного заміщення l-го товару k-м товаром**.

Наведемо перелік найбільш часто використовуваних властивостей виробничих множин. Вибір властивостей залежить від конкретного випадку виробництва. Деякі із властивостей можуть суперечить одна одній.

1. $Y \neq \emptyset$. Ця властивість означає, що фірма проводить якусь діяльність.

2. Y це замкнена множина. В основному це технічна умова.

3. **No free lunch.** Якщо $y \in Y$ і $y \geq 0$, то $y = 0$. Ця властивість означає, що не можна випустити якусь кількість товару і при цьому нічого не використати як фактор виробництва. Цю властивість можна записати так $Y \cap \mathbb{R}^L_+ \subset \{0\}$.

4. **Можливість бездіяльності:** $0 \in Y$. Ця властивість означає можливість нічого не витрачати і нічого не виробляти. Але якщо підписані контракти на поставку деяких факторів виробництва, то бездіяльність уже неможлива.

5. **Вільне розміщення:** $(y \in Y) \wedge (y' \leq y) \Rightarrow y' \in Y$. Ця властивість означає, що для фірми технологічно можливо більше витрачати факторів виробництва і менше випускати товарів.

6. **Необоротність:** $(y \in Y) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow -y \notin Y$. Ця властивість означає, що неможливо використати товари випуску

у якості виробничих факторів і випустити усі фактори виробництва, які були використані.

7. **Незростання віддачі від масштабу:**

$$(\forall y \in Y) \Rightarrow (\alpha y \in Y), \forall \alpha \in [0, 1].$$

8. **Неспадання віддачі від масштабу:**

$$(\forall y \in Y) \Rightarrow (\alpha y \in Y), \forall \alpha \geq 1.$$

9. **Стала віддача від масштабу:**

$$(\forall y \in Y) \Rightarrow (\alpha y \in Y), \forall \alpha \geq 0.$$

У цьому випадку виробнича множина Y це конус.

Приклад 9.1 *Розглянемо виробничу функцію Кобба-Дугласа*

$$f(z_1, z_2) = z_1^\alpha z_2^\beta, \ \alpha, \beta > 0.$$

Якщо $\alpha + \beta \leq 1$, то відповідна виробнича множина Y має властивість незростання віддачі від масштабу. Дійсно, виробнича множина має вигляд

$$Y = \{(-z_1, -z_2, q) | \ q - z_1^\alpha z_2^\beta \leq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0\}.$$

Нехай $q \leq z_1^\alpha z_2^\beta$, тобто $(-z_1, -z_2, q) \in Y$. Покажемо, що для $\forall \lambda \in [0, 1]$ маємо

$$\lambda q \leq \lambda^{\alpha+\beta} z_1^\alpha z_2^\beta$$

при $\alpha + \beta \leq 1$. Маємо $\lambda^{\alpha+\beta} \geq \lambda$, а тому

$$\lambda^{\alpha+\beta} z_1^\alpha z_2^\beta \geq \lambda^{\alpha+\beta} q \geq \lambda q.$$

Таким чином $(-\lambda z_1, -\lambda z_2, \lambda q) \in Y$, $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Аналогічно можна показати, що при $\alpha + \beta \geq 1$, відповідна виробнича множина Y має властивість неспадання віддачі від масштабу, а при $\alpha + \beta = 1$ виробнича множина Y має властивість сталої віддачі від масштабу.

Мають місце і обернені твердження. Так, якщо виробнича множина Y, яка відповідає виробничій функції Кобба-Дугласа має властивість незростання віддачі від масштабу, тоді $\alpha + \beta \leq 1$. *Дійсно при* $\lambda \in (0,1)$ *маємо*

$$\begin{cases} q \leq z_1^{\alpha} z_2^{\beta}, \\ \lambda q \leq \lambda^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha} z_2^{\beta}. \end{cases}$$

Звідси при $z_1 = z_2 = 1, q = 1$ *одержимо*

$$\lambda \leq \lambda^{\alpha+\beta} \quad \Rightarrow \ \alpha + \beta \leq 1.$$

10. **Адитивність:** $\forall y, y' \in Y \quad \Rightarrow \quad y + y' \in Y$. З економічної точки зору це означає, що якщо y і y' є технологічно можливими виробничими планами, то можна організувати два виробництва, які на впливають одне на одне і виконують виробничі плани y і y' відповідно. Результатом буде виробничий план $y + y'$. Адитивність також має відношення до поняття доступу на ринок. Якщо $y \in Y$ і виконується фірмою, а інша фірма виходить на ринок і виконує план $y' \in Y$, то при адитивності Y результуючий виробничий план $y + y' \in Y$ буде технологічно можливим. Таким чином агрегована виробнича множина повинна задовольняти умову адитивності, якщо є вільний доступ на ринок.

11. **Опуклість** виробничої множини Y. Ця властивість має два наслідки. Якщо є можливість бездіяльності $0 \in Y$, то $\forall y \in Y$ і $\forall \alpha \in [0,1]$ маємо $\alpha y + (1-\alpha)0 = \alpha y \in Y$. Таким чином маємо властивість незростання віддачі від масштабу. Другий наслідок означає, що збалансовані витрати факторів виробництва призводять до збалансованого випуску.

12. **Виробнича множина є опуклим конусом:** $\forall y, y' \in Y$ і $\forall \alpha \geq 0, \forall \beta \geq 0$ маємо $\alpha y + \beta y' \in Y$.

Теорема 9.1 *Виробнича множина Y буде адитивною і буде задовольняти умову незростання віддачі від масштабу тоді і тільки тоді коли Y є опуклим конусом.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Візьмемо $\forall\alpha > 0, \forall\beta > 0$ і $y, y' \in Y$. Виберемо ціле $k > \max(\alpha, \beta)$. Тоді за адитивністю $ky \in Y$ і $ky' \in Y$. Оскільки

$$\frac{\alpha}{k} < 1,\ \alpha y = \frac{\alpha}{k}(ky),\ \frac{\beta}{k} < 1,\ \beta y' = \frac{\beta}{k}(ky')$$

то за властивістю незростання віддачі від масштабу маємо $\alpha y \in Y$ і $\beta y' \in Y$. За адитивністю одержимо $\alpha y + \beta y' \in Y$. Отже Y це опуклий конус.

($\Leftarrow$) Нехай Y це опуклий конус. Тоді при $\alpha = \beta = 1$ і $y, y' \in Y$ маємо $y + y' \in Y$. Отже Y адитивна. А при $\forall\alpha \in [0,1], \forall y \in Y$ маємо $\alpha y \in Y$. Отже виробнича множина Y має властивість незростання віддачі від масштабу. $\square$

10 Задача максимізації прибутку. Задача мінімізації видатків виробництва.

Будемо вважати, що задано вектор цін $p = (p_1, \ldots, p_L) > 0$ і ціни не залежать від виробничих планів. Крім того будемо вважати, що виробнича множина Y непорожня, замкнена і має властивість вільного розміщення. Метою фірми будемо вважати максимізацію прибутку

$$p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l.$$

Враховуючи нашу домовленість про знаки компонент у виробничому плані, $p \cdot y$ дорівнює різниці доходу і повних витрат виробництва. Тому **задача максимізації прибутку** (ЗМП) має вигляд

$$\begin{cases} \max_y p \cdot y, \\ y \in Y, \end{cases} \qquad \text{або} \begin{cases} \max_y p \cdot y, \\ F(y) \le 0, \end{cases}$$

де $F(y)$ це трансформаційна функція.

Означення 10.1 *При заданій виробничій множині Y функція $\pi(p) = \max_{y \in Y} p \cdot y$ називається* **функцією прибутку** *фірми, а відображення, яке вектору цін $p > 0$ ставить у відповідність множину розв'язків ЗМП $y(p) = \{y \in Y |\ p \cdot y = \pi(p)\}$ називається* **відповідністю пропозиції**.

Якщо маємо однопродуктове виробництво з диференційовною виробничою функцією $f(z)$, то можна розглядати ЗМП на множині факторів виробництва $z = (z_1, \ldots, z_{L-1})$. Неха $p > 0$ це ціна одиниці товару випуску, а $w = (w_1, \ldots, w_{L-1}) > 0$ це вектор цін на виробничі фактори. Тоді ЗМП для однопродуктової фірми матиме вигляд

$$\max_{z \geq 0}(pf(z) - w \cdot z).$$

Маємо необхідні умови максимуму

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_l}(pf(z^*) - w \cdot z^*) \leq 0, \\ z_l^* \frac{\partial}{\partial z_l}(pf(z^*) - w \cdot z^*) = 0, \ l = \overline{1, L-1}. \end{cases}$$

Звідси одержимо

$$\begin{cases} p\frac{\partial}{\partial z_l} f(z^*) \leq w_l, l = \overline{1, L-1}, \\ p\frac{\partial}{\partial z_l} f(z^*) = w_l, \text{ при } z_l^* > 0. \end{cases}$$

Якщо $z_l^* > 0, z_k^* > 0$, то гранична норма технологічного заміщення l-го виробничого фактору k-м дорівнює

$$MRTS_{l,k}(z^*) = \frac{\partial f(z^*)/\partial z_l}{\partial f(z^*)/\partial z_k} = \frac{w_l}{w_k}.$$

Якщо виробнича множина Y опукла, тоді необхідні умови першого порядку будуть і достатніми для визначення розв'язку ЗМП.

Аналогічно тому як були встановлені властивості функції попиту і непрямої функції корисності можна одержати властивості відповідності пропозиції і функції прибутку.

Теорема 10.1 *Нехай виробнича множина $Y \neq \emptyset$ є замкненою і задовольняє умову вільного розміщення. Нехай$\pi(p)$,$y(p)$ це відповідно функція прибутку і відповідність пропозиції. Тоді*

1. $\forall \alpha > 0, \pi(\alpha p) = \alpha \pi(p)$ *- однорідність 1-го порядку;*

2. *Функція прибутку $\pi(p)$ опукла вниз;*

3. $\forall \alpha > 0, y(\alpha p) = y(p)$ *- однорідність 0-го порядку;*

4. *Якщо виробнича множина Y опукла, тоді множина $y(p)$ опукла. Якщо виробнича множина Y строго опукла, тоді множина $y(p)$ одноточкова (відповідність пропозиції однозначна).*

5. *Якщо $y(\bar{p})$ однозначна, тоді функція прибутку $\pi(p)$ диференційовна у точці $p = \bar{p}$ і $\nabla \pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$;*

6. *Якщо відповідність пропозиції $y(p)$ однозначна і неперервно диференційовна, тоді*

$$Dy(p) = D^2\pi(p),\ Dy(p) = \left\{ \frac{\partial y_l(p)}{\partial p_k} \right\}_{l,k=\overline{1,L}},$$

$$D^2\pi(p) = \left\{ \frac{\partial^2 \pi(p)}{\partial p_l \partial p_k} \right\}_{l,k=\overline{1,L}}.$$

7. *Матриця $Dy(p)$ симетрична, додатно напіввизначена і $Dy(p)p = 0$;*

8. **Закон пропозиції:** $\forall p, p'$, $\forall y \in y(p), \forall y' \in y(p')$

$$(p - p') \cdot (y - y') \geq 0.$$

Розглянемо однопродуктову фірму. Нехай $f(z)$ це виробнича функція фірми, $z = (z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0$ це вектор факторів виробництва, q це кількість випущеного продукту, $w = (w_1, \ldots, w_{L-1}) > 0$ це вектор цін на фактори виробництва.

Задача мінімізації видатків виробництва (ЗМВВ) має вигляд

$$\begin{cases} \min\limits_{z\geq 0} w\cdot z, \\ f(z)\geq q. \end{cases} \tag{10.1}$$

Означення 10.2 *Функція* $c(w,q)=\min_{z\geq 0, f(z)\geq q} w\cdot z$ *називається* **функцією видатків виробництва**. *Відображення* $z(w,q)$, *яке ставить у відповідність парі* (w,q) *множину* $z(w,q)$ *розв'язків ЗМВВ (10.1) називається* **умовною відповідністю попиту на фактори виробництва**. *Якщо множина розв'язків* $z(w,q)$ *одноточкова, то* $z(w,q)$ *називається* **умовною функцією попиту на фактори виробництва**.

Функція Лагранжа задачі (10.1)

$$L(\lambda,z)=w\cdot z+\lambda(q-f(z))$$

і необхідні умови мінімуму мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\lambda,z^*)}{\partial z_l}\geq 0,\ l=\overline{1,L-1}, \\ z_l^*\frac{\partial L(\lambda,z^*)}{\partial z_l}=0,\ l=\overline{1,L-1}, \\ \lambda(q-f(z^*))=0. \end{cases}$$

Зауважимо повну аналогію задачі мінімізації видатків виробництва із задачею мінімізації витрат теорії споживання

$$\begin{cases} \min\limits_{x\geq 0} p\cdot x, \\ U(x)\geq u, \end{cases}$$

де $U(x)$ це функція корисності, p – вектор цін, u – рівень корисності.

Тому має місце

Теорема 10.2 *Нехай* $c(w,q)$ *це функція видатків виробництва однопродуктової фірми з неперервною виробничою функцією* $f(z)$ *і* $z(w,q)$ *це умовна відповідність попиту на фактори виробництва. Тоді*

1. *$\forall \alpha > 0, c(\alpha w, q) = \alpha c(w, q)$;*

2. *Функція $c(w, q)$ строго зростає за q і не спадає за w_l, $\forall l = \overline{1, L-1}$;*

3. *Функція $c(w, q)$ є опуклою вгору (угнутою) по w;*

4. *$\forall \alpha > 0$, $z(\alpha w, q) = z(w, q)$;*

5. **Відсутність надлишкового випуску.** *$\forall z \in z(w, q)$: $f(z) = q$;*

6. *Якщо функція $f(z)$ квазіугнута (множина $\{z \geq 0 | f(z) \geq q\}$ опукла для $\forall q \geq 0$), тоді множина $z(w, q)$ опукла. Якщо функція $f(z)$ строго квазіугнута, тоді множина $z(w, q)$ одноточкова;*

7. *(**Лема Шепарда.**) Якщо $z(\bar{w}, q)$ містить лише одну точку, тоді функція $c(w, q)$ диференційовна у точці $w = \bar{w}$ і $\nabla_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$;*

8. *Якщо функція $z(w, q)$ неперервно диференційовна за w, тоді*

$$D_w z(w, q) = D_w^2 c(w, q), D_w z(w, q) = \left\{ \frac{\partial z_l(w, q)}{\partial w_k} \right\}_{l,k=\overline{1,L-1}},$$

$$D_w^2 c(w, q) = \left\{ \frac{\partial^2 c(w, q)}{\partial w_l \partial w_k} \right\}_{l,k=\overline{1,L-1}};$$

9. *Матриця $D_w z(w, q)$ симетрична, від'ємно напіввизначена і*

$$D_w z(w, q) w = 0.$$

Для однопродуктової фірми задачу максимізації прибутку можна сформулювати використавши функцію видатків виробництва $c(w, q)$:

$$\max_{q \geq 0} (pq - c(w, q)).$$

Необхідні умови максимуму мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{d}{dq}(pq - c(w,q)) \le 0, \\ q\frac{d}{dq}(pq - c(w,q)) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - \frac{\partial c(w,q)}{dq} \le 0, \\ q(p - \frac{\partial c(w,q)}{dq}) = 0. \end{cases}$$

11 Сукупна пропозиція. Ефективне виробництво.

Припустимо, що в економіці функціонує J фірм з виробничими множинами $Y_1, \ldots, Y_J$, відповідно. Задано вектор цін $p = (p_1, \ldots, p_L) > 0$ і фірми не можуть впливати на ціни. Нехай кожна виробнича множина не порожня, замкнена і задовольняє умову вільного розміщення. Позначимо для кожної виробничої множини $Y_j, j = \overline{1, J}$ функцію прибутку через $\pi_j(p), j = \overline{1, J}$ і відповідність пропозиції через $y_j(p), j = \overline{1, J}$.

Означення 11.1 Відповідністю сукупної пропозиції *будемо називати відображення*

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) = \left\{ y \in \mathbb{R}^L | \ y = \sum_{j=1}^{J} y_j, \ y_j \in y_j(p), \ j = \overline{1, J} \right\}.$$

Якщо кожна відповідність пропозиції $y_j(p), j = \overline{1, J}$ є однозначна, неперервно диференційовна функція, то за Теоремою 10.1

$$Dy_j(p) = D^2\pi_j(p), j = \overline{1, J}$$

і матриця $Dy_j(p), j = \overline{1, J}$ буде симетричною і додатно напіввизначеною. А значить і функція сукупної пропозиції буде мати ці властивості. Крім того за Теоремою 10.1 функція пропозиції $y_j(p), j = \overline{1, J}$ задовольняє закон пропозиції

$$(p - p') \cdot (y_j(p) - y_j(p')) \ge 0, \ j = \overline{1, J}, \forall p, p' > 0.$$

Звідси маємо справедливість закону пропозиції для сукупної пропозиції

$$(p - p') \cdot (y(p) - y(p')) \geq 0 \ \forall p, p' > 0.$$

Для заданих виробничих множин $Y_1, \dots, Y_J$ визначимо агреговану (сукупну) виробничу множину

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L | \ y = \sum_{j=1}^{J} y_j, y_j \in Y_j, j = \overline{1, J} \right\}.$$

Нехай $\pi^*(p)$ і $y^*(p)$ це функція прибутку і відповідність пропозиції для агрегованої виробничої множини Y. Покажемо, що сукупний прибуток одержаний максимізацією прибутку кожною окремо взятою фірмою, яка приймає встановлені на ринку ціни, буде таким самим, як і при координованій роботі всіх фірм (тобто можна вважати, що всі фірми працюють як одна фірма).

Теорема 11.1 *Для всіх $p > 0$ маємо:*

1. $\pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$;

2. $y^*(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$

$$= \left\{ y \in \mathbb{R}^L | \ y = \sum_{j=1}^{J} y_j, y_j \in y_j(p), j = \overline{1, J} \right\}.$$

Доведення. 1). Для довільного набору виробничих планів

$$y_j \in Y_j, j = \overline{1, J} \text{ маємо } \sum_{j=1}^{J} y_j \in Y.$$

Тому за означенням функції прибутку одержимо

$$\pi^*(p) \geq p \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} y_j\right) = \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j \;\Rightarrow\; \pi^*(p) \geq \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p).$$

З другого боку

$$\forall y \in Y,\ \exists y_j \in Y_j,\ j = \overline{1, J}:\ y = \sum_{j=1}^{J} y_j.$$

Отже

$$p \cdot y = p \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} y_j\right) = \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j \leq \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p),\ \forall y \in Y.$$

Значить

$$\pi^*(p) = \max_{y \in Y} p \cdot y \leq \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p).$$

2). Покажемо, що

$$\sum_{j=1}^{J} y_j(p) \subseteq y^*(p).$$

Візьмемо довільний набір оптимальних виробничих планів $y_j \in y_j(p), j = \overline{1, J}$. Тоді

$$p \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} y_j\right) = \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) = \pi^*(p).$$

Тому

$$\sum_{j=1}^{J} y_j \in y^*(p) \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{J} y_j(p) \subseteq y^*(p).$$

Тепер покажемо, що

$$y^*(p) \subseteq \sum_{j=1}^{J} y_j(p).$$

Візьмемо довільний виробничий план $y \in y^*(p)$.

Оскільки $y \in Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j$, то

$$\exists y_j \in Y_j, j = \overline{1, J} : \ y = \sum_{j=1}^{J} y_j.$$

Покажемо, що $y_j \in y_j(p), j = \overline{1, J}$. Дійсно

$$\sum_{j=1}^{J} \pi_j(p) = \pi^*(p) = p \cdot y = p \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} y_j \right) = \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j.$$

Але $p \cdot y_j \leq \pi_j(p), \forall j = \overline{1, J}$. Тому $p \cdot y_j = \pi_j(p), \forall j = \overline{1, J}$, а значить $y_j \in y_j(p), j = \overline{1, J}$. Тому

$$y = \sum_{j=1}^{J} y_j, y_j \in y_j(p), \forall j = \overline{1, J} \ \Rightarrow \ y^*(p) \subseteq \sum_{j=1}^{J} y_j(p). \quad \square$$

Означення 11.2 *Виробничий план $y \in Y$ називається* **ефективним**, *якщо не існує $y' \in Y$ такого, що $y' \geq y$ і $y' \neq y$.*

Із означення зрозуміло, що ефективний план повинен лежати на границі множини Y, але обернене твердження не вірне.

Покажемо, що поняття ефективності тісно пов'язане з проблемою максимізації прибутку.

Теорема 11.2 *Якщо виробничий план $y \in Y$ максимізує прибуток при деяких цінах $p > 0$, тобто $y \in y(p)$, тоді y буде ефективним виробничим планом.*

Доведення. Доведення проведемо від супротивного. Нехай $\exists y' \in Y$ такий, що $y' \geq y$ і $y' \neq y$. Оскільки $p > 0$, то $p \cdot y' > p \cdot y$, а це суперечить оптимальності y у задачі максимізації прибутку з цінами p. $\square$

Стверджувати, що ефективний виробничий план буде максимізувати прибуток при деякому векторі цін $p > 0$ у загальному випадку не можна.

Теорема 11.3 *Нехай виробнича множина Y непорожня, замкнена, опукла і задовольняє умову вільного розміщення. Тоді довільний ефективний виробничий план $y \in Y$ буде максимізувати прибуток для деяких цін $p \geq 0$, тобто $y \in y(p)$.*

Доведення. Нехай $y_0 \in Y$ ефективний. Визначимо множину

$$P_{y_0} = \{y' \in \mathbb{R}^L | \; y' > y_0\}.$$

Множина P_{y_0} опукла, і оскільки y_0 ефективний, то $P_{y_0} \cap Y = \emptyset$. Якщо замкнути множину P_{y_0}, то будемо мати дві замкнені опуклі множини які мають лише одну спільну точку y_0. Отже існує розділяюча гіперплощина: $\exists p \neq 0$ такий, що

$$p \cdot y' \geq p \cdot y'', \; \forall y' \in P_{y_0}, \forall y'' \in Y.$$

Оскільки для $\forall y' \in P_{y_0}$ маємо $p \cdot y' \geq p \cdot y_0$, то $p \geq 0$. Дійсно, якщо $p_l < 0$ для деякого $1 \leq l \leq L$, тоді одержимо $p \cdot y' < p \cdot y_0$ для достатньо великого $y'_l - y_{0l} > 0$.

Покажемо, що виробничий план y_0 максимізує прибуток при цінах $p \geq 0$. Візьмемо $\forall y'' \in Y$. Тоді

$$p \cdot y' \geq p \cdot y'', \quad \forall y' \in P_{y_0}.$$

Виберемо послідовність $y'_{(n)} \to y_0$ при $n \to \infty$. Тоді

$$p \cdot y'_{(n)} \geq p \cdot y'' \;\Rightarrow\; p \cdot y_0 \geq p \cdot y'', \; \forall y'' \in Y.$$

Тому ефективний виробничий план $y_0 \in Y$ максимізує прибуток при цінах $p \geq 0$. $\square$

Зауважимо, що вибрати $p > 0$ в загальному випадку неможливо.

12 Лінійні моделі діяльності фірми.

Будемо розглядати фірму із сталою віддачею від масштабу:

$$\forall y \in Y,\ \forall \alpha \geq 0 \ \Rightarrow \ \alpha y \in Y.$$

Якщо маємо справу з однопродуктовою фірмою з виробничою функцією $f(z)$, то маємо

$$\forall \alpha \geq 0,\ f(\alpha z) = \alpha f(z).$$

При виконанні умови сталої віддачі від масштабу виробнича множина Y є конусом і для кожного виробничого плану $\bar{y} \in Y$ множині Y належить промінь

$$\{y \in Y|\ y = \alpha \bar{y},\ \forall \alpha \geq 0\}.$$

Кожен такий промінь представляє певну **виробничу активність**, яку можна проводити при будь-якому масштабі діяльності. Припустимо, що нам задано M скінченну кількість активностей, які можна проводити у будь-якому масштабі і які можна проводити одночасно. Позначимо ці M активностей через $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^L, \ldots, \mathbf{a}_M \in \mathbb{R}^L$ і будемо називати їх **елементарними активностями**. Тоді виробнича множина матиме вигляд

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L|\ y = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \mathbf{a}_m,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \geq 0 \right\}. \qquad (12.1)$$

Скаляр $\alpha_m \geq 0$ називають **рівнем елементарної активності** m. α_m показує масштаб діяльності для m-ої елементарної активності. Таким чином виробнича множина Y це багатогранний конус – множина, яка є опуклою оболонкою скінченної кількості променів, що виходять із початку координат.

Активність виду $(0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$, де “$-1$” стоїть на l-ому місці, називається **активністю розміщення** l-го продукту. Будемо вважати, що промені, які відповідають активностям розміщення для усіх продуктів, належать виробничій множині Y. Моделі діяльності фірми, для яких виробнича множина Y має вигляд (12.1), називаються лінійними моделями діяльності фірми.

Теорема 12.1 *Для заданого вектора цін* $p = (p_1, \ldots, p_L) \geq 0$ *виробничий план, який дає максимальний скінченний прибуток, існує в* Y *тоді і тільки тоді, коли*

$$p \cdot \mathbf{a}_m \leq 0, \ \forall m = \overline{1, M}.$$

Доведення.($\Rightarrow$) Нехай $y^* \in y(p)$ і $\pi(p) = p \cdot y^* = \max_{y \in Y} p \cdot y < +\infty$. Оскільки $y^* \in Y$, то $\exists (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_M^*) \geq 0$ такі, що

$$y^* = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m^* \mathbf{a}_m \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \pi(p) = p \cdot y^* = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m^* (p \cdot \mathbf{a}_m) < +\infty. \tag{12.2}$$

Припустимо, що для деякого $\mathbf{a}_{m_0}$ маємо $p \cdot \mathbf{a}_{m_0} > 0$. Маємо

$$\forall \lambda > 0 : \ \lambda \mathbf{a}_{m_0} \in Y \ \Rightarrow \ \lim_{\lambda \to \infty} \lambda (p \cdot \mathbf{a}_{m_0}) = +\infty,$$

що суперечить (12.2).

($\Leftarrow$) Нехай

$$p \cdot \mathbf{a}_m \leq 0, \ \forall m = \overline{1, M}.$$

Тоді

$$\forall y \in Y : \ p \cdot y = p \cdot \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \mathbf{a}_m = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m (p \cdot \mathbf{a}_m) \leq 0.$$

Якщо $p \cdot \mathbf{a}_m < 0$, тоді для максимізації прибутку потрібно для елементарної активності $\mathbf{a}_m$ вибрати рівень активності $\alpha_m = 0$. Якщо $p \cdot \mathbf{a}_m = 0$, тоді довільний рівень активності $\alpha_m \geq 0$ дає нульовий прибуток. Тому

$$\pi(p) = \max_{y \in Y} p \cdot y = 0. \qquad \square$$

Для довільного вектора цін $p \geq 0$, який породжує нульовий прибуток, позначимо

$$A(p) = \{\mathbf{a}_m | \ p \cdot \mathbf{a}_m = 0\}.$$

Якщо $\mathbf{a}_m \notin A(p)$, то $p \cdot \mathbf{a}_m < 0$ і елементарна активність $\mathbf{a}_m$ не використовується при цінах p. Таким чином відповідність пропозиції $y(p)$ буде опуклим конусом, породженим активностями із $A(p)$:

$$y(p) = \{y \in Y | \ y = \sum_{m:\mathbf{a}_m \in A(p)} \alpha_m \mathbf{a}_m, \alpha_m \geq 0, \forall m\}.$$

Зауваження 12.1 *Для лінійних моделей виробництва довільний ефективний виробничий план $y \in Y$ максимізує прибуток при деякому векторі цін $p > 0$.*

Важливим випадком лінійних моделей є модель Леонтьєва "витрати – випуск". Ця модель характеризується двома припущеннями:

1. Існує продукт, припустимо L-й, який неможливо виробити ні при якій активності. З цієї причини його називають **первинним фактором**. Найчастіше це людська праця.

2. Кожна елементарна активність $\mathbf{a}_m$ має щонайбільше один додатний елемент:

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{a}_{1m}, \mathbf{a}_{2m}, \ldots, \mathbf{a}_{Lm}), \ m = \overline{1, M}, \ \mathbf{a}_{im} > 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_{jm} \leq 0, \forall j \neq i.$$

Модель Леонтьєва без можливості заміщення.

Найпростішою моделлю Леонтьєва є така, в якій кожен товар, що може вироблятись, випускається лише при одній елементарній активності. Оскільки не може випускатись лише первинний фактор, то ми маємо $L - 1$ елементарну активність.

Будемо позначати елементарну активність, яка випускає l-ий товар, через

$$\mathbf{a}_l = (\mathbf{a}_{1l}, \mathbf{a}_{2l}, \ldots, \mathbf{a}_{Ll}),\ l = \overline{1, L-1}.$$

Пронормуємо вектори елементарних активностей так, щоб $\mathbf{a}_{ll} = 1$, $\forall l = \overline{1, L-1}$. Тоді вектор рівнів активності

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{L-1}),\ \alpha_l \geq 0,\ \forall l = \overline{1, L-1}$$

дорівнює вектору **валового випуску** товарів.

Щоб визначити рівні **чистого (нетто) випуску** розглянемо матрицю такого виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{a}_{1,2} & \ldots & -\mathbf{a}_{1,L-1} \\ -\mathbf{a}_{2,1} & 0 & \ldots & -\mathbf{a}_{2,L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{a}_{L-1,1} & -\mathbf{a}_{L-1,2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Це матриця "витрати – випуск". Елемент $-\mathbf{a}_{k,l} \geq 0$ задає кількість k-го продукту необхідного для випуску одиниці l-го продукту. Нехай I це одинична матриця розмірності $(L-1)\times(L-1)$. Вектор $(I-A)\alpha$ задає чистий рівень випуску $L-1$ продуктів при рівнях активності $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{L-1})$. Дійсно, l-та компонента цього вектора дорівнює

$$\alpha_l + \sum_{i=1, i\neq l}^{L-1} \mathbf{a}_{li}\alpha_i.$$

Тут $\alpha_l \geq 0$ це валовий випуск l-го продукту, а

$$\sum_{i=1, i\neq l}^{L-1} \mathbf{a}_{li}\alpha_i$$

це кількість l-го продукту, яка витрачена на випуск всіх інших продуктів. Позначимо

$$b = (-\mathbf{a}_{L,1}, \ldots, -\mathbf{a}_{L,L-1})$$

вектор, який задає кількість первинного фактору необхідного для виробництва однієї одиниці кожного з $L-1$ товару. Тоді $b \cdot \alpha$ задає кількість витраченого первинного фактору. Враховуючи властивість вільного розміщення, виробничу множину можна подати у вигляді

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L |\ y \leq \begin{pmatrix} I - A \\ -b \end{pmatrix} \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^{L-1} \right\}.$$

Означення 12.1 *Якщо* $(I-A)\bar{\alpha} > 0$ *для деякого* $\bar{\alpha} \geq 0$*, тоді матриця* A *називається* **продуктивною**.

Таким чином матриця A буде продуктивною, якщо існує деякий виробничий план у якого всі $L-1$ продуктів випускаються у додатній кількості, використовуючи тільки достатню кількість первинного фактору.

Теорема 12.2 *Якщо матриця "витрати – випуск"* A *є продуктивною, тоді для кожного вектору* $c \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ *випущеної продукції існує вектор рівнів активностей* $\alpha \geq 0$ *такий, що* $(I-A)\alpha = c$.

Доведення. Покажемо, що $\exists (I-A)^{-1}$ і ця матриця має невід'ємні елементи. Тоді

$$\alpha = (I-A)^{-1} c \geq 0.$$

Дійсно, оскільки елементи матриці A невід'ємні, то кожен елемент матриці $\sum_{n=0}^{N} A^n$ буде неспадним за N. Покажемо, що

$$\exists \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} A^n.$$

Для цього достатньо показати обмеженість зверху для елементів матриці $\sum_{n=0}^{N} A^n$.

Оскільки матриця A продуктивна, то існує такі $\bar{\alpha} \geq 0$ і $\bar{c} > 0$, що

$$\bar{c} = (I-A)\bar{\alpha}.$$

Тому

$$\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)\bar{c} = \left(\sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^{n+1}\right)\bar{\alpha} =$$

$$= \left(I - A^{N+1}\right)\bar{\alpha} = \bar{\alpha} - A^{N+1}\bar{\alpha} \le \bar{\alpha}.$$

Звідси маємо $\forall i, j = \overline{1, L-1}$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)_{ij} \le \frac{\max(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{L-1})}{\min(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{L-1})}.$$

Таким чином для кожного елемента $\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)_{ij}$ існує $\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)_{ij}$, а значить існує

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} A^n.$$

Тому $\lim_{n\to\infty} A^N = 0$ і

$$\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)(I - A) = \left(\sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^{n+1}\right) = I - A^{N+1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} A^n = (I - A)^{-1}.$$

Оскільки

$$\left(\sum_{n=0}^{N} A^n\right)_{ij} \ge 0,\ \forall i, j = \overline{1, L-1},$$

то $\left((I - A)^{-1}\right)_{ij} \ge 0.$ $\square$

Зауваження 12.2 *Припустимо, що нам для кінцевого споживання потрібна кількість продукції $c \in \mathbb{R}_{+}^{L-1}$. Скільки потрібно всього виробити кожного продукту? Щоб одержати* *кінцевий споживчий набір ми повинні використати Ac виробничих факторів. Щоб одержати цей вектор потрібно використати $A(Ac) = A^2c$ виробничих факторів і т.д. Таким чином сукупне виробництво задається вектором*

$$\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}A^n\right)c.$$

Отже споживчий вектор $c \geq 0$ можна виробити, якщо визначена матриця

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}A^n.$$

Модель Леонтьєва з можливістю заміщення.

Розглянемо тепер модель Леонтьєва, у якій кожен товар може вироблятись більш ніж при одній активності. Нехай $M_l \geq 1, l = \overline{1, L-1}$ це кількість елементарних активностей, які випускають l-ий продукт.

Для $\forall y \in \mathbb{R}^L$ будемо використовувати позначення $y = (y_{-L}, y_L)$, де $y_{-L} = (y_1, \ldots, y_{L-1})$.

Означення 12.2 *Будемо називати модель* **продуктивною**, *якщо $\exists y \in Y$ такий, що $y_{-L} > 0$.*

Теорема 12.3 *Розглянемо продуктивну модель Леонтьєва з $L-1$-м товаром випуску і $M_l \geq 1, l = \overline{1, L-1}$. Тоді існують $L-1$ активність $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{L-1}$ такі, що всі ефективні виробничі плани з $y_{-L} > 0$ породжуються цими активностями. Тут $\mathbf{a}_l, \forall l$ є невід'ємною лінійною комбінацією M_l елементарних активностей, які випускають l-ий продукт.*

Доведення. Нехай $y \in Y$ ефективний виробничий план з $y_{-L} > 0$. Оскільки ми маємо $M_1 + \ldots + M_{L-1}$ елементарних активностей, то

$$y = \sum_{l=1}^{L-1}\sum_{i=1}^{M_l}\alpha_l^i\mathbf{a}_l^i,$$

де $\mathbf{a}_l^i$, $i = \overline{1, M_l}$ це активності, які випускаю l-ий продукт. Значить існують активності $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{L-1}$ виду

$$\mathbf{a}_l = \sum_{i=1}^{M_l} \bar{\alpha}_l^i \mathbf{a}_l^i, \ \mathbf{a}_{ll} = 1, \ \forall l = \overline{1, L-1}$$

такі, що

$$y = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \mathbf{a}_l, \ \alpha_l > 0, \ \forall l = \overline{1, L-1}.$$

Дійсно, якщо $\alpha_{l_0} = 0$, тоді $y_{l_0} \leq 0$, тобто l_0-ий продукт не випускається, що суперечить умові $y_{-L} > 0$.

Покажемо, що для довільного ефективного плану $y' \in Y$ з $y'_{-L} > 0$ маємо

$$y' = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha'_l \mathbf{a}_l, \ \alpha'_l \geq 0, \ \forall l = \overline{1, L-1}.$$

Оскільки $y \in Y$ це ефективний виробничий план, то із Зауваження 1 випливає існування вектору цін $p > 0$ такого, що $y \in y(p)$ і $\pi(p) = p \cdot y = 0$. При цьому за Теоремою 10.2 маємо $p \cdot \mathbf{a}_l \leq 0$, $\forall l = \overline{1, L-1}$. Тому

$$\pi(p) = 0 = p \cdot y = p \cdot \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \mathbf{a}_l = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l (p \cdot \mathbf{a}_l).$$

Значить $p \cdot \mathbf{a}_l = 0$, $\forall l = \overline{1, L-1}$, бо $\alpha_l > 0$, $\forall l = \overline{1, L-1}$.

Розглянемо матрицю "витрати – випуск" A, яка відповідає активностям $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{L-1}$. Ми маємо

$$y_{-L} > 0, y = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l \mathbf{a}_l \Rightarrow y_{-L} = (I - A)\alpha > 0, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{L-1}).$$

Отже матриця A є продуктивною. Візьмемо ефективний виробничий план $y' \in Y$ з $y'_{-L} > 0$. За Теоремою 10.2 існують такі $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{L-1}) \geq 0$, що

$$y'_{-L} = (I - A)\alpha'$$

Розглянемо виробничий план

$$y'' = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l' \mathbf{a}_l$$

і покажемо, що $y'' = y'$. Дійсно

$$p{\cdot}\mathbf{a}_l = 0,\ \forall l = \overline{1, L-1}\ \Rightarrow\ p{\cdot}y'' = 0 = \pi(p)\ \Rightarrow\ y'' \in y(p),\ p > 0.$$

За Теоремою 11.2 y'' є ефективним. Але y' теж ефективний і $y'_{-L} = y''_{-L}$. Тому

$$y' = y'' = \sum_{l=1}^{L-1} \alpha_l' \mathbf{a}_l. \qquad \square$$

13 Ринкова рівновага та її основні властивості добробуту.

Будемо розглядати економіку, яка складається із $I > 0$ споживачів і $J > 0$ фірм і в якій існує L товарів. Кожен i-й споживач характеризується споживчою множиною X_i і відношенням переваги $\succeq_i$ на X_i, $i = \overline{1, I}$. Будемо вважати відношення переваги $\succeq_i, i = \overline{1, I}$ раціональним. Кожна j-та фірма характеризується виробничою множиною Y_j, $j = \overline{1, J}$. Будемо вважати кожну виробничу множину Y_j замкнутою і не порожньою. Початкові запаси товарів у економіці задаються вектором $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_L)$, $\bar{\omega}_l \geq 0, \forall l = \overline{1, L}$.

Означення 13.1 **Розподілом ресурсів** *(або скорочено* **розподілом***) будемо називати набір* $(x,y) = (x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$*, де* $x_i \in X_i$ *– це споживчий набір i-го споживача,* $i = \overline{1, I}$ *і* $y_j \in Y_j$ *це виробничий план j-ї фірми,* $j = \overline{1, J}$*.*

Розподіл (x, y) *є* **допустимим***, якщо*

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li} = \bar{\omega}_l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj},\ \forall l = \overline{1, L},$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j,$$

де $x_i = (x_{1i}, \ldots, x_{Li}), y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{Lj})$.

Позначимо множину допустимих розподілів через

$$A = \left\{ (x, y)| \ \sum_{i=1}^{I} x_i = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j \right\}.$$

Означення 13.2 *Допустимий розподіл* (x, y) *є* **Парето - оптимальним** *(або Парето ефективним), якщо не існує іншого розподілу* $(x', y') \in A$ *такого, що* $x'_i \succsim_i x_i, \forall i = \overline{1, I}$ *і* $x'_{i_0} \succ_{i_0} x_{i_0}$ *для деякого* i_0.

Ми будемо вивчати властивості економіки із досконалою конкуренцією основаною на приватній власності. У цій економіці кожен товар продається на ринку за відомими усім цінами, які ні споживачі ні фірми не можуть змінити своїми діями. Споживачі намагаються одержати найбільш переважний споживчий набір, а фірми виробляють і продають товари, щоб максимізувати прибуток. Багатство споживачів складається із індивідуальних запасів товарів та із доходів фірм, акціями яких володіють споживачі. Таким чином споживач i має початковий запас товарів $\omega_i \in \mathbb{R}^L_+$ і частку (пай) $\theta_{ij} \in [0, 1]$ у прибутках фірми j, тут

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{I} \omega_i, \text{ і } \sum_{i+1}^{I} \theta_{ij} = 1 \text{ для кожної фірми } j.$$

Отже у економіці, яку ми розглядаємо, відношення переваги, технологічні можливості, ресурси і характеристики власності задаються набором

$$\left(\{X_i, \succsim_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \{(\omega_i, \theta_{i1}, \ldots, \theta_{iJ})\}_{i=1}^{I}\right).$$

Означення 13.3 *Для економіки приватної власності, визначеної набором* $\left(\{X_i, \succsim_i\}_{i=1}^I, \{Y_j\}_{j=1}^J, \{(\omega_i, \theta_{i1}, \ldots, \theta_{iJ})\}_{i=1}^I\right)$, *розподіл* (x^*, y^*) *і вектор цін* $p = (p_1, \ldots, p_L)$ *утворюють* **рівновагу за Вальрасом** *(або конкурентну рівновагу), якщо*

(i) *Для кожного* j, y_j^* *максимізує на* Y_j *прибуток:*

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*, \ \forall y_j \in Y_j.$$

(ii) *Для кожного* i, x_i^* *є найбільш переважним споживчим набором на бюджетній множині*

$$\left\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^J \theta_{ij} p \cdot y_j^*\right\}.$$

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^I x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^J y_j^*.$

Розглянемо економіку більш загального виду, а саме економіку, де агреговане суспільне багатство перерозподіляється серед споживачів.

Означення 13.4 *Для економіки, визначеної набором* $\left(\{X_i, \succsim_i\}_{i=1}^I,\ \{Y_j\}_{j=1}^J,\ \bar{\omega}\right)$, *розподіл* (x^*, y^*) *і вектор цін* $p = (p_1, \ldots, p_L)$ *утворюють* **цінову рівновагу з перерозподілом**, *якщо існує розподіл рівнів багатства* $(w_1, \ldots, w_I)$ *такий, що*

$$\sum_{i=1}^I w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^J p \cdot y_j^*$$

і

(i) *Для кожного* j, y_j^* *максимізує на* Y_j *прибуток:*

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*, \ \forall y_j \in Y_j.$$

(ii) *Для кожного i, x_i^* є найбільш переважним споживчим набором на бюджетній множині*

$$\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}.$$

(iii) $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^*.$

Зауважимо, що рівновага за Вальрасом є частинним випадком цінової рівноваги з перерозподілом, бо у цьому випадку рівень багатства i-го споживача визначається його запасами ω_i і часткою у доходах фірм $(\theta_{i1}, \ldots, \theta_{iJ})$ без подальшого перерозподілу багатства, тому у цьому випадку маємо

$$w_i = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1} \theta_{ij} p \cdot y_j^*,\ \forall i = \overline{1, J}.$$

Теорема 13.1 (Перша фундаментальна теорема економіки добробуту).

Якщо відношення переваги $\succsim_i, i = \overline{1, I}$ є локально ненасичувані і якщо (x^*, y^*, p) утворюють цінову рівновагу з перерозподілом багатства, тоді розподіл (x^*, y^*) буде Парето оптимальним. Зокрема розподіл рівноважний за Вальрасом буде Парето оптимальним.

Доведення. Нехай (x^*, y^*, p) утворюють цінову рівновагу з перерозподілом багатства і відповідні рівні багатства задані вектором $(w_1, \ldots, w_I)$. Маємо

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j^*.$$

Із того, що x_i^* є найбільш переважним споживчим набором у бюджетній множині $\{x_i \in X_i | \ p \cdot x_i \leq w_i\}$ випливає, що якщо $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i > w_i$. Якщо $x_i \succsim_i x_i^*$, то з умови локальної ненасичуваності випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий споживчий набір x_i^ε, що $x_i^\varepsilon \succ_i x_i$ і $||x_i - x_i^\varepsilon|| \leq \varepsilon$. Тому $\lim_{\varepsilon \to 0} x_i^\varepsilon = x_i$ і за транзитивністю маємо $x_i^\varepsilon \succ_i x_i^*$, а значить $p \cdot x_i^\varepsilon > w_i$. Перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ в останній нерівності і одержимо

$$p \cdot x_i \geq w_i. \tag{13.1}$$

Нехай (x, y) це розподіл, який домінує за Парето розподіл (x^*, y^*), тобто $x_i \succsim_i x_i^*, \forall i = \overline{1, I}$, та існує i_0 таке, що $x_{i_0} \succ_{i_0} x_{i_0}^*$. Із (13.1) випливає, що $p \cdot x_i \geq w_i$ і $p \cdot x_{i_0} > w_{i_0}$. Таким чином

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i > \sum_{i=1}^{I} w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j^* \geq p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j,$$

бо y_j^* максимізує прибуток. Отже

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i > p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j.$$

Але це означає, що розподіл (x, y) не є допустимим, бо за Означенням 13.1 для допустимого розподілу маємо

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j.$$

Таким чином ми одержали суперечність, а значить розподіл (x^*, y^*) є Парето оптимальним. $\square$

Означення 13.5 *Для економіки, визначеної набором* $\left(\{X_i, \succsim_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \bar{\omega}\right)$, *розподіл* (x^*, y^*) *і вектор цін* $p = (p_1, \ldots, p_L) \neq 0$ *утворюють* **цінову квазірівновагу з перерозподілом багатства**, *якщо існує розподіл рівнів багатства* $(w_1, \ldots, w_I)$ *такий, що*

$$\sum_{i=1}^{I} w_i = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j^*$$

і

(i) *Для кожного* j, y_j^* *максимізує на* Y_j *прибуток:*

$$p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*, \ \forall y_j \in Y_j.$$

(ii) *Для кожного* i, *якщо* $x_i \succ_i x_i^*$ *то* $p \cdot x_i \geq w_i$.

(iii) $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$.

Зрозуміло, якщо (x^*, y^*, p) утворюють цінову рівновагу, то при $x_i \succ_i x_i^*$ маємо $p \cdot x_i > w_i$, а тому (x^*, y^*, p) утворюють цінову квазірівновагу.

Зауважимо, що при виконанні умови локальної ненасичуваності з умови (ii) Означення 13.5 випливає нерівність $p \cdot x_i^* \geq w_i$. Дійсно, якщо $p \cdot x_i^* < w_i$, то за умовою локальної ненасичуваності існує такий набір $x_i \succ_i x_i^*$ у достатньо малому околі $||x_i - x_i^*|| \leq \varepsilon$, що $p \cdot x_i < w_i$. Але це суперечить умові (ii) Означення 13.5. Отже $p \cdot x_i^* \geq w_i$. Але

$$\sum_{i=1}^{I} p \cdot x_i^* = p \cdot \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} p \cdot y_j^* = \sum_{i=1}^{I} w_i,$$

тому $p \cdot x_i^* = w_i$. Таким чином, при виконанні умови локальної ненасичуваності, в Означенні 13.5 умову (ii) можна замінити умовою

(ii') Для кожного i, якщо $x_i \succ_i x_i^*$, то $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$.

Теорема 13.2 (Друга фундаментальна теорема економіки добробуту).

Нехай економіка задана набором $\left(\{X_i, \succsim_i\}_{i=1}^{I}, \{Y_j\}_{j=1}^{J}, \bar{\omega}\right)$ *і нехай усі* Y_j, $j = \overline{1, J}$ *замкнені, непорожні, опуклі і задовольняють умову вільного розміщення, а усі відношення переваги* $\succsim_i$, $i = \overline{1, I}$ *раціональні, опуклі і задовольняють умову локальної ненасичуваності. Тоді для довільного Парето-оптимального розподілу* (x^*, y^*) *існує такий ціновий вектор*

$p = (p_1, \dots, p_L) \neq 0$, *що* (x^*, y^*, p) *утворюють цінову квазірівновагу з перерозподілом.*

Доведення. Нехай розподіл (x^*, y^*) є Парето-оптимальним. Позначимо

$$V_i = \{x_i \in X_i |\ x_i \succ_i x_i^*\} \subset \mathbb{R}^L, i = \overline{1, I},$$

$$V = \sum_{i=1}^{I} V_i = \left\{ \sum_{i=1}^{I} x_i |\ x_i \in V_i, i = \overline{1, I} \right\},$$

$$Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j = \left\{ \sum_{j=1}^{J} y_j |\ y_j \in Y_j, j = \overline{1, J} \right\}.$$

Кожна множина V_i, $i = \overline{1, I}$ опукла. Дійсно, для $\forall x_i \succsim_i x_i'$ таких що $x_i \succ_i x_i^*$ і $x_i' \succ_i x_i^*$ за опуклістю $\succsim_i$ маємо

$$\alpha x_i + (1 - \alpha) x_i' \succsim_i x_i',\ \forall \alpha \in [0, 1].$$

А за транзитивністю $\succsim_i$ одержимо

$$\alpha x_i + (1 - \alpha) x_i' \succ_i x_i^*,\ \forall \alpha \in [0, 1].$$

Тому $V_i, \forall i = \overline{1, I}$ опуклі множини. Значить множини V і $Y + \bar{\omega}$ опуклі, як суми опуклих множин. Крім того маємо

$$V \cap (Y + \bar{\omega}) = \emptyset.$$

Дійсно, якщо $z \in V$ і $z \in Y + \bar{\omega}$, то

$$z = \sum_{i=1}^{I} x_i = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j,$$

тобто розподіл (x, y) є допустимим і крім того $x_i \succ_i x_i^*$, $\forall i = \overline{1, I}$. Але це суперечить Парето-оптимальності розподілу (x^*, y^*). Із теорем про розділяючу гіперплощину випливає, що існує вектор $p = (p_1, \dots, p_L) \neq 0$ і число r, такі що

$$p \cdot z \geq r, \forall z \in V \text{ і } p \cdot z \leq r, \forall z \in Y + \bar{\omega}.$$

Зауважимо, що $p_l \geq 0, \forall l = \overline{1,L}$. Дійсно, якщо $p_{l_0} < 0$, то для $z \in Y + \bar{\omega}$

$$p \cdot z = \sum_{l=1}^{L} p_l \bar{\omega}_l + \sum_{l=1}^{L} p_l \sum_{j=1}^{J} y_{jl} \to +\infty, \text{ при } y_{l_0} \to -\infty.$$

Тут ми використали умову вільного розміщення. Одержане співвідношення суперечить умові $p \cdot z \leq r, \forall z \in Y + \bar{\omega}$

Покажемо, що з умови $x_i \succsim_i x_i^*$, $\forall i = \overline{1,I}$ випливає нерівність

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i \right) \geq r. \qquad (13.2)$$

Дійсно, якщо $x_i \succsim_i x_i^*$, то за умовою локальної ненасичуваності існує таке $\hat{x}_i$, що $\hat{x}_i \to x_i$ і $\hat{x}_i \succ_i x_i$, $\forall i = \overline{1,I}$. За транзитивністю маємо $\hat{x}_i \succ_i x_i^*$, $\forall i = \overline{1,I}$. Тому $\hat{x}_i \in V_i$, $\forall i = \overline{1,I}$ і $\sum_{i=1}^{I} \hat{x}_i \in V$. За вибором p і r маємо

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} \hat{x}_i \right) \geq r.$$

Звідси граничним переходом, при $\hat{x}_i \to x_i$, $\forall i = \overline{1,I}$ одержимо (13.2).

Доведемо, що

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^* \right) = p \cdot \left(\bar{\omega} + \sum_{J=1}^{J} y_j^* \right) = r. \qquad (13.3)$$

Дійсно, оскільки розподіл (x^*, y^*) є допустимим, то

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{J=1}^{J} y_j^*.$$

Із (13.2) маємо

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i^* \right) \geq r.$$

З іншого боку

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_j^* \in \bar{\omega} + Y.$$

Тому $p \cdot \sum_{i=1}^{I} x_i^* \leq r$ і одержимо рівність (13.3).

Покажемо, що $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$, $\forall y_j \in Y_j, j = \overline{1, J}$. Для кожної фірми j і $y_j \in Y_j$ маємо

$$y_j + \sum_{k \neq j} y_j^* \in Y$$

тому, використавши (13.3), одержимо

$$p \cdot \left(\bar{\omega} + y_j + \sum_{k \neq j} y_k^* \right) \leq r = p \cdot \left(\bar{\omega} + \sum_{j=1}^{J} y_k^* \right).$$

Таким чином $p \cdot y_j \leq p \cdot y_j^*$.

Покажемо, що для кожного i, якщо $x_i \succ_i x_i^*$ то $p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*$. Із (13.2) і (13.3) маємо

$$p \cdot \left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^* \right) \geq r = p \cdot \sum_{k=1}^{I} x_k^* \;\Rightarrow\; p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^*.$$

Рівні багатства $w_i = p \cdot x_i^*$, $i = \overline{1, I}$ забезпечують те, що (x^*, y^*, p) утворюють цінову квазірівновагу. $\square$

(x^*, y^*, p) можуть утворювати квазірівновагу але не цінову рівновагу.

Теорема 13.3 *Нехай X_i опукла множина і $\succsim_i$ неперервне відношення переваги. Нехай $x_i^* \in X_i$, ціни p і рівень багатства w_i такі, що із $x_i \succ_i x_i^*$ випливає нерівність $p \cdot x_i \geq w_i$. Якщо існує $x_i' \in X_i$ такий, що $p \cdot x_i' < w_i$ тоді із співвідношення $x_i \succ_i x_i^*$ випливає нерівність $p \cdot x_i > w_i$.*

Доведення. Проведемо доведення від супротивного. Нехай існує таке $x_i \in X_i$, що $x_i \succ_i x_i^*$ і $p \cdot x_i = w_i$. Візьмемо дешевший набір $x_i' \in X_i: \; p \cdot x_i' < w_i$. Тоді із опуклості споживчої множини X_i випливає

$$\forall \alpha \in [0,1): \; \alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \in X_i \text{ і } p \cdot (\alpha x_i + (1-\alpha)x_i') < w_i.$$

Значить існує таке $\alpha_0 \in [0,1)$, що $x_i'' = \alpha_0 x_i + (1-\alpha_0)x_i' \succ_i x_i^*$. Дійсно, якщо $\forall \alpha \in [0,1): \; \alpha x_i + (1-\alpha)x_i' \preceq_i x_i^*$ то за неперервністю $\succsim_i$ одержимо при $\alpha \to 1$: $x_i \preceq_i x_i^*$, що суперечить вибору $x_i \succ_i x_i^*$. Таким чином ми одержали споживчий набір $x_i'' \succ_i x_i^*$ такий, що $p \cdot x_i'' < w_i$. А це суперечить умові теореми, що із $x_i \succ_i x_i^*$ випливає нерівність $p \cdot x_i \geq w_i$. $\square$

Наслідок 13.1 *Якщо для всіх $i = \overline{1, I}$: споживчі множини X_i опуклі, $0 \in X_i$ (існує найдешевший набір) і відношення переваги $\succsim_i$ неперервні. Тоді цінова квазірівновага з перерозподілом багатства $(w_1, \ldots, w_I) > 0$ буде ціновою рівновагою з перерозподілом.*

ЛІТЕРАТУРА

1. *Mas-Colell, A.* Microeconomic Theory/ A. Mas-Colell, M.D. Whinston, J.R. Green. - Oxford University Press, 1995.

2. *Varian, H.R.* Microeconomic Analysis/ H.R. Varian. - W.W. Norton & Company, Inc. 1992.

3. *Базилевич, В.* Мікроекономіка. Підручник/ В. Базилевич, К. Базилевич, А. Ігнатюк, С. Слухай. - Знання, 2008.

4. *Скорик, Г.І.* Вступ до макро- і мікроекономіки. Друге видання/ Г.І. Скорик, М. Б. Швецова, П. І. Стецюк. - Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2019.