Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.Д.Борисенко

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ

для студентів механіко-математичного факультету

Київ
Видавничо-поліграфічний центр
"Київський універсистет"
2016

О.Д.Борисенко. Збірник задач з математичної економіки.- Для студентів механіко-математичного факультету.- К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016.- 84 с.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, професор М.П.Моклячук
д-р економ. наук, професор О.І.Черняк

Наведено завдання для практичних занять з математичної економіки у 9 семестрі в обсязі, передбаченому навчальними планами механіко-математичного факультету. Посібник містить у кожному розділі достатню кількість задач, як для аудиторної роботи так і для домашніх завдань.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №... від 14 вересня 2015 року)

Зміст

Передмова

Збірник задач повністю охоплює теми практичних занять, що проводяться у дев'ятому семестрі при вивченні на механіко-математичному факультеті нормативного курсу з математичної економіки.

Курс математичної економіки, що читається на механіко-математичному факультеті складається із трьох модулів: теорія споживання, теорія виробництва і прийняття рішень в умовах невизначеності. У відповідності з цим після кожного модуля запропоновано варіант модульної контрольної роботи.

Кожне заняття складається з двох частин. Перша частина містить короткі теоретичні дані, а друга частина містить задачі, як для аудиторних занятть, так і для домашніх завдань.

Заняття №1
Відношення переваги і структура вибору

Нехай X – довільна множина. Кажуть, що на X задано **бінарне відношення** $\mathcal{R}$, якщо в $X^2 = \{(x, y) |\ \forall x \in X, \forall y \in X\}$ задано підмножину $\mathcal{R}$. Елемент $x \in X$ знаходиться у відношенні $\mathcal{R}$ до елемента $y \in X$, позначається $x\mathcal{R}y$, якщо впорядкована пара (x, y) належить $\mathcal{R}$. Дамо означення деяких властивостей бінарного відношення.

Означення 1.1. Бінарне відношення $\mathcal{R}$ на X називається
- **рефлексивним**, якщо $x\mathcal{R}x,\ \forall x \in X$;
- **нерефлексивним**, якщо $\urcorner(x\mathcal{R}x),\ \forall x \in X$;
- **симетричним**, якщо $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x,\ \forall x, y \in X$;
- **асиметричним**, якщо $x\mathcal{R}y \Rightarrow \urcorner(y\mathcal{R}x), \forall x, y \in X$;
- **антисиметричним**, якщо $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y)$, $\forall x$, $y \in X$;
- **транзитивним**, якщо $(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$, $\forall x, y$, $z \in X$;
- **від'ємно транзитивним**, якщо $\urcorner(x\mathcal{R}y) \wedge \urcorner(y\mathcal{R}z) \Rightarrow \urcorner(x\mathcal{R}z)$, $\forall x, y, z \in X$;
- **повним**, якщо $(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x),\ \forall x, y \in X$.

Означення 1.2. Відношення переваги $\succsim$ на множині альтернатив X називається **раціональним**, якщо воно є повним і транзитивним.

Означення 1.3. Функція $U:\ X \to \mathbb{R}$ називається **функцією корисності**, що зображає відношення переваги $\succsim$ на X, якщо $\forall x, y \in X:\ x \succsim y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y)$.

Означення 1.4. Структура вибору – це пара $(\mathcal{B}, C(\cdot))$, де $\mathcal{B}$ – це деяка сукупність непорожніх підмножин $B \subseteq X$, які будемо називати **бюджетними множинами**, а $C(\cdot)$ – це правило вибору, яке кожній бюджетній множині $B \in \mathcal{B}$ ставить у відповідність непорожню підмножину вибраних елементів $C(B) \subseteq B$.

Означення 1.5. Структура вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ задовольняє **слабку аксіому виявленої переваги**, якщо виконується умова: нехай для деякого $B \in \mathcal{B}$: $(x, y \in B) \wedge (x \in C(B))$, тоді для $\forall B' \in \mathcal{B}$ такого, що $(x, y \in B') \wedge (y \in C(B'))$ повинно $x \in C(B')$.

Нехай на X задано раціональне відношення переваги $\succsim$. Позначимо $C^*(B, \succsim) = \{x \in B | \ x \succsim y, \forall y \in B\}$ для $\forall B \neq \emptyset, B \subseteq X$. Будемо розглядати такі $\succsim$ і $\mathcal{B}$, що $C^*(B, \succsim) \neq \emptyset, \forall B \in \mathcal{B}$.

Означення 1.6. При заданій структурі вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ будемо говорити, що раціональне відношення переваги $\succsim$ раціоналізує $C(\cdot)$ відносно $\mathcal{B}$, якщо $C(B) = C^*(B, \succsim), \forall B \in \mathcal{B}$.

ЗАДАЧІ

1.1. Довести, що коли відношення переваги $\succsim$ є раціональним, то:

(i) відношення строгої переваги $\succ$ є нерефлексивним і транзитивним.

(ii) відношення байдужості $\sim$ є рефлексивним, транзитивним і симетричним.

(iii) $x \succ y \succsim z \Rightarrow x \succ z$.

1.2. Якщо $\succ$ – це бінарне відношення на множині X, то його транзитивним замиканням називається відношення $\succ^t$, для якого $x \succ^t y \Leftrightarrow x \succ y$, або існують такі $x_1, \ldots, x_m \in X$, що $x_1 \succ x_2, x_2 \succ x_3, \ldots, x_m \succ y$. Показати, що коли відношення $\succ^t$ є асиметричним $(x \succ^t y \Rightarrow \neg(y \succ^t x))$, то воно є нерефлексивним $(\neg(x \succ^t x))$ і транзитивним.

1.3. Показати, що бінарне відношення $\succ$ є від'ємно транзитивним ($\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ z) \Rightarrow \neg(x \succ z), \forall x, y, z \in X$) тоді і тільки тоді, коли $x \succ y \Rightarrow (x \succ z) \vee (z \succ y), \forall x, y, z \in X$.

1.4. Показати, що кожне нерефлексивне, транзитивне бінарне відношення є асиметричним.

1.5. Які властивості має бінарне відношення $\mathcal{R}$ на $\mathbb{R}^2_{++} = \{(x_1, x_2) | \ x_1 > 0, x_2 > 0\}$:
(a) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geq y_1 - y_2$;
(b) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$;
(c) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} \geq \frac{y_1}{y_2}$;
(d) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$;
(e) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geq y_1 y_2$;
(f) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 - y_2\} \geq 0$;
(g) $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} > \min\{y_1, y_2\}$?

1.6. Показати, що коли $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ зростаюча функція і $u : \ X \to \mathbb{R}$ це функція корисності, що зображає відношення переваги $\succsim$ на множині X тоді функція $v(x) = f(u(x)), \ x \in X$ теж є функцією корисності, що зображає відношення переваги $\succsim$ на множині X.

1.7. Нехай відношення переваги $\succsim$ на множині X – раціональне. Показати, що коли $u : \ X \to \mathbb{R}$ і $((u(x) = u(y)) \Rightarrow (x \sim y)) \wedge ((u(x) > u(y)) \Rightarrow (x \succ y)), \ x, y \in X$, тоді $u(\cdot)$ – це функція корисності, що зображає $\succsim$.

1.8. Довести, що коли X – це скінчена множина і $\succsim$ – раціональне, то існує функція корисності, що зображає $\succsim$.

1.9. Нехай на множині альтернатив $X = \{a, b, c, d\}$ задано нестроге відношення переваги $\succsim = \ \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (b, d), (d, c), (b, a), (a, c), (b, c)\}$. Чи можна побудувати функцію корисності, що зображає дане відношення $\succsim$?

1.10. Нехай $(\succsim) = (\succ) \cup (\sim)$ і

	a	b	c
a	$\sim$	$\succ$	$\prec$
b	$\prec$	$\sim$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$

Чи можна побудувати функцію корисності, що зображає дане відношення $\succsim$?

1.11. Нехай $(\succsim) = (\succ) \cup (\sim)$ і

	a	b	c	d
a	$\sim$	$\prec$	$\prec$	$\prec$
b	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$
d	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$

Чи можна побудувати функцію корисності, що зображає дане відношення $\succsim$?

1.12. Довести, що коли відношення $\succsim$ може бути зображене функцією корисності, тоді $\succsim$ є раціональним.

1.13. Нехай $u(\cdot)$ і $\tilde{u}(\cdot)$ – це функції корисності, що зображають одне і теж відношення переваги. Показати, що існує зростаюча функція $f(\cdot)$ така, що $\tilde{u}(\cdot) = f(u(\cdot))$.

1.14. Задано структуру вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$, $\mathcal{B} = (\{x, y\}, \{x, y, z\})$. Нехай виконується слабка аксіома виявленої переваги і $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Які можливі значення для $C(\{x, y, z\})$?

1.15. Показати, що слабка аксіома еквівалентна наступній властивості. Нехай $B, B' \in \mathcal{B}$ такі, що $(x, y \in B) \wedge (x, y \in B')$. Тоді $(x \in C(B)) \wedge (y \in C(B')) \Rightarrow (\{x, y\} \subset C(B)) \wedge (\{x, y\} \subset C(B')$.

1.16. Припустимо, що структура вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ задовольняє слабку аксіому. Розглянемо два відношення виявленої строгої переваги $\succ^*$ і $\succ^{**}$:

$x \succ^* y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}: \ (x, y \in B) \wedge (x \in C(B)) \wedge (y \notin C(B));$

$x \succ^{**} y \Leftrightarrow (x \succsim^{*} y) \wedge \urcorner (y \succsim^{*} x)$, де $x \succsim^{*} y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}: (x, y \in B) \wedge (x \in C(B))$.

(а) Показати, що $x \succ^{*} y \Leftrightarrow x \succ^{**} y$.

(б) Чи виконується попереднє твердження при порушенні слабкої аксіоми?

(в) Чи буде відношення $x \succ^{*} y$ транзитивним?

(г) Показати, що відношення $x \succ^{*} y$ буде транзитивним, якщо $\mathcal{B}$ містить всі трьох-елементні підмножини X.

1.17. Навести приклад структури вибору, для якої існує декілька раціоналізуючих відношень переваги.

1.18. Нехай $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}, \{x, y, z\}\}$, $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{y, z\}) = \{y\}$, $C(\{x, z\}) = \{z\}$. Показати, що для $\forall C(\{x, y, z\})$ структура вибору $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ не задовольняє слабку аксіому.

1.19. Нехай для $(\mathcal{B}, C(\cdot))$ існує раціоналізуюче відношення переваги $\succsim$. Показати, що для кожної пари $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ такої, що $(B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}) \wedge (C(B_1) \cup C(B_2) \in \mathcal{B})$ маємо $C(B_1 \cup B_2) = C(C(B_1) \cup C(B_2))$.

1.20. Нехай $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{z, x\}\}$. Припустимо, що вибір є випадковим, тобто для $\forall B \in \mathcal{B}$, $C(B)$ це імовірнісний розподіл на альтернативах з B. Наприклад для $B = \{x, y\}$ маємо $C(B) = (C_x(B), C_y(B))$, де $C_x(B) + C_y(B) = 1$, $C_x(B) \geq 0, C_y(B) \geq 0$. Будемо говорити, що правило випадкового вибору $C(\cdot)$ можна раціоналізувати за перевагою, якщо існує імовірнісний розподіл P на множині всіх шести можливих строгих переваг для альтернатив із X $(x \succ y \succ z, x \succ z \succ y, \ldots)$ такий, що для кожного $B \in \mathcal{B}$, $C(B)$ породжується розподілом P. Наприклад $B = \{x, y\}$, $C_x(B) = P\{\succ : \ x \succ y\}$.

а) Показати, що правило випадкового вибору $C(\{x, y\}) =$

$C(\{y,z\}) = C(\{z,x\}) = (1/2, 1/2)$ можна раціоналізувати за перевагою.

б) Показати, що правило випадкового вибору $C(\{x,y\}) = C(\{y,z\}) = C(\{z,x\}) = (1/4, 3/4)$ не можна раціоналізувати за перевагою.

в) Знайти всі значення $0 < \alpha < 1$, для яких $C(\{x,y\}) = C(\{y,z\}) = C(\{z,x\}) = (\alpha, 1-\alpha)$ можна раціоналізувати.

Заняття № 2
Відповідність попиту, слабка аксіома виявленої переваги та елементи порівняльної статики

Нехай споживча множина $X = \mathbb{R}^L_+$, задано вектор-стовпчик цін $p = (p_1, \ldots, p_L)^T > 0 \Leftrightarrow p_l > 0, l = \overline{1, L}$ і споживчий бюджет (дохід) $w > 0$. Надалі кожен вектор будемо розуміти як вектор-стовпчик.

Означення 2.1. Множина $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \; p \cdot x = \sum_{l=1}^{L} p_l x_l \leq w\}$ називається конкурентною **бюджетною множиною**. Множина $L_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \; p \cdot x = w\}$ називається **бюджетною гіперплощиною**.

Означення 2.2. Відповідність попиту – це відображення $x(p,w)$, яке задає множину вибраних споживчих наборів із бюджетної множини $B_{p,w}$. Якщо кожній бюджетній множині $B_{p,w}$ відповідає єдиний вибраний споживчий набір, то $x(p,w)$ будемо називати **функцією попиту**.

Для відповідності попиту $x(p,w)$ будемо вимагати виконання таких умов:
1) **Однорідність нульового порядку**: $x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w)$, $\forall \alpha > 0$.
2) **Закон Вальраса**: $p \cdot x = w, \forall x \in x(p,w), \forall p > 0, w > 0$.

Означення 2.3. Функція попиту $x(p,w)$ задовольняє **слабку аксіому виявленої переваги** якщо

$$\begin{cases} p \cdot x(p', w') \leq w, \\ x(p', w') \neq x(p,w), \end{cases} \Rightarrow p' \cdot x(p,w) > w'.$$

Нехай функція попиту $x(p,w)$ неперервно диференційовна за p і w. Позначимо

$$D_p x(p,w) = \left\{ \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \right\}_{l=\overline{1,L}}^{k=\overline{1,L}}, D_w x(p,w) = \left\{ \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \right\}_{l=\overline{1,L}}.$$

Мають місце такі співвідношення порівняльної статики:

$$D_p x(p,w) p + D_w x(p,w) w = 0, \quad x^T(p,w) + p^T D_p x(p,w) = 0^T,$$

$$p^T D_w x(p,w) = 1.$$

Означення 2.4. Функцією Енгеля для заданого вектора цін $\bar{p}$ називається функція $\phi(w) = x(\bar{p}, w)$, яка ставить у відповідність доходу споживача w його попит на товари при фіксованих цінах $\bar{p}$.

Означення 2.5. Еластичністю попиту на l-ий товар за ціною на k-ий товар називається величина

$$\varepsilon_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l(p,w)}.$$

Означення 2.6. Еластичністю попиту на l-ий товар за доходом називається величина

$$\varepsilon_{lw}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \frac{w}{x_l(p,w)}.$$

Компенсований закон попиту. Нехай функція попиту $x(p,w)$ є однорідною нульового порядку і задовольняє закон

Вальраса. Для того, щоб функція попиту $x(p,w)$ задовольняла слабку аксіому виявленої переваги необхідно і достатньо, щоб для довільної компенсованої (за Слуцьким) зміни цін $(p,w) \to (p',w'), p' \cdot x(p,w) = w'$ мала місце нерівність

$$(p' - p) \cdot (x(p', w') - x(p, w)) \leq 0,$$

із строгою нерівністю при $x(p,w) \neq x(p',w')$.

Означення 2.7. Матрицею Слуцького або матрицею замін називається матриця

$$S(p,w) = \{s_{lk}(p,w)\}_{l=\overline{1,L}}^{k=\overline{1,L}},$$

$$s_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \quad l,k = \overline{1,L}.$$

Мають місце такі властивості матриці Слуцького.

Твердження 2.1. Якщо диференційовна функція попиту $x(p,w)$ задовольняє закон Вальраса, однорідна нульового порядку за (p,w) і задовольняє слабку аксіому виявленої переваги, тоді матриця Слуцького буде від'ємно напіввизначеною для $\forall (p,w)$.

Твердження 2.1. Якщо диференційовна функція попиту $x(p,w)$ задовольняє закон Вальраса і однорідна нульового порядку за (p,w), тоді $p^T S(p,w) = 0^T$ і $S(p,w)p = 0 \ \forall (p,w)$.

ЗАДАЧІ

2.1. Показати, що мають місце співвідношення:

$$\sum_{l=1}^{L} b_l(p,w)\varepsilon_{lk}(p,w) + b_k(p,w) = 0, \ k = \overline{1,L},$$

$$\sum_{l=1}^{L} b_l(p,w)\varepsilon_{lw}(p,w) = 1, \ b_l(p,w) = \frac{p_l x_l(p,w)}{w}, \ l = \overline{1,L}.$$

2.2. Довести, що $p^T D_p x(p,w)p + w = 0$.

2.3. Нехай функція попиту $x(p,w)$ неперервно диференційовна і однорідна першого порядку за w: $x(p, \alpha w) = \alpha x(p,w)$, $\forall \alpha > 0$. Показати, що $\varepsilon_{lw}(p,w) = 1,\ l = \overline{1,L}$. Що можна сказати про ефект доходу $D_w x(p,w)$ та форму кривої Енгеля?

2.4. Нехай функція попиту $x(p,w)$ неперервно диференційовна, $x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w), \forall \alpha > 0$, $x(p, \alpha w) = \alpha x(p,w)$, $\forall \alpha > 0$, $\dfrac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} = 0, \forall k \neq l$. Тоді $x_l(p,w) = \dfrac{c_l}{p_l} w$, $c_l > 0$, $l = \overline{1,L}$.

2.5. Показати еквівалентність означення 1.5 і означення 2.3 виконання слабкої аксіоми виявленої переваги для структури вибору $(\mathcal{B}, x(\cdot,\cdot))$, де $\mathcal{B} = \{B_{p,w}, p > 0, w > 0\}$, $x(p,w)$ - це функція попиту.

2.6. Нехай $L = 2$, $x_1(p,w) = \dfrac{\alpha w}{p_1}$ і виконується закон Вальраса. Чи буде функція попиту $x(p,w)$ однорідною нульового порядку за (p,w)?

2.7. Нехай виконується закон Вальраса. Споживач при цінах (4, 6) вибирає споживчий набір (6, 6), а при цінах (6, 3) він вибирає споживчий набір (10, 0). Чи задовольняють ці спостереження слабку аксіому виявленої переваги?

2.8. При цінах (1, 4) вибір споживача був (2, 3). Нехай виконується закон Вальраса. Який із наступних споживчих наборів буде виявлено переважним для цього набору: (а) (5, 2), (б) (8, 1), (в) (15, 0)?

2.9. Нехай $L = 3$, $p' = (2,1,2)^T$, $p'' = (2,2,1)^T$, $p'''(3) = (1,2,2)^T$, $w = 8$, $x(p',w) = (1,2,2)^T$, $x(p'',w) = (2,1,2)^T$, $x(p''',w) = (2,2,1)^T$. Показати, що для кожної пари значень заданої функції попиту виконується слабка аксіома виявленої переваги, але при цьому $x(p''', w) \succ^* x(p'', w)$, $x(p'', w) \succ^* x(p', w)$, $x(p', w) \succ^* x(p''', w)$.

2.10. Нехай $L = 2$, $x(p', w') = (100, 100)^T$, $p' = (100, 100)^T$, $x(p'', w'') = (120, \alpha)^T, p'' = (100, 80)^T$ і виконується закон Вальраса. При яких значеннях α:

i) порушується слабка аксіома виявленої переваги?

ii) задовольняється слабка аксіома виявленої переваги і $x(p', w') \succ^* x(p'', w'')$?

iii) задовольняється слабка аксіома виявленої переваги і $x(p'', w'') \succ^* x(p', w')$?

2.11. Нехай маємо два періоди споживання $t = 0, 1$ з відповідними цінами p^t, споживчими бюджетами w_t і попитом $x^t = x(p^t, w_t)$. Розглянемо такі кількісні індекси спожитого: **кількісний індекс Ласпейреса** $L_q = \dfrac{p^0 \cdot x^1}{p^0 \cdot x^0}$ і **кількісний індекс Пааше** $P_q = \dfrac{p^1 \cdot x^1}{p^1 \cdot x^0}$. Показати: (а) Якщо $L_q < 1$ то $x^0 \succ^* x^1$; (б) Якщо $P_q > 1$ то $x^1 \succ^* x^0$.

2.12. Нехай маємо два періоди споживання $t = 0, 1$ з відповідними цінами p^t, споживчими бюджетами w_t і попитом $x^t = x(p^t, w_t)$. Розглянемо **індекс цін Ласпейреса** $L_p = \dfrac{p^1 \cdot x^0}{p^0 \cdot x^0}$ і **індекс цін Пааше** $P_p = \dfrac{p^1 \cdot x^1}{p^0 \cdot x^1}$. Нехай $E = \dfrac{p^1 \cdot x^1}{p^0 \cdot x^0}$ - це відношення споживчих витрат. Який споживчий набір виявиться кращим для споживача (а) якщо $L_p < E$, (б) якщо $P_p > E$?

2.13. Нехай функція попиту $x(p, w)$ задовольняє закон Вальраса, слабку аксіому виявленої переваги, $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w), \forall \alpha > 0$, $x(p, \alpha w) = \alpha x(p, w)$, $\forall \alpha > 0$. Показати, що при цих умовах закон попиту виконується і для некомпенсованої зміни цін, тобто при $x(p,w) \neq x(p',w)$ маємо

$$(p'-p)\cdot(x(p',w)-x(p,w))<0.$$

2.14. Нехай функція попиту $x(p,w)$ є однорідною нульового порядку за (p,w). Довести, що слабка аксіома виявленої переваги виконується тоді і тільки тоді, коли для деякого $\bar{w}>0$ і для всіх p,p' маємо

$$\begin{cases} p\cdot x(p',\bar{w})\leq \bar{w} \\ x(p',\bar{w})\neq x(p,\bar{w}), \end{cases} \Rightarrow p'\cdot x(p,\bar{w})>\bar{w}.$$

2.15. Задано функцію попиту

$$x_1(p,w)=\frac{p_2w}{p_1(p_1+p_2+p_3)},\ x_2(p,w)=\frac{p_3w}{p_2(p_1+p_2+p_3)},$$

$$x_3(p,w)=\frac{p_1w}{p_3(p_1+p_2+p_3)}.$$

Показати, що ця функція попиту не задовольняє слабку аксіому виявленої переваги.

2.16. Нехай диференційовна функція попиту $x(p,w)$ задовольняє закон Вальраса і є однорідною нульового порядку за (p,w). Показати, що при $L=2$: (а) матриця Слуцького завжди симетрична, (б) матриця Слуцького буде від'ємно напіввизначеною тоді і тільки тоді коли її діагональні елементи будуть недодатними.

2.17. Показати, що якщо функція попиту $x(p,w)$ породжена раціональним відношенням переваги то $x(p,w)$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги.

2.18. Показати, що якщо функція попиту $x(p,w)$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги, то $x(p,w)$ буде однорідною нульового порядку за (p,w).

2.19. Нехай $L = 3$ і $X = \mathbb{R}^3$. Розглянемо функцію попиту

$$x_1(p, w) = \frac{p_2}{p_3},\ x_2(p, w) = -\frac{p_1}{p_3},\ x_3(p, w) = \frac{w}{p_3}.$$

Показати, що порушується слабка аксіома виявленої переваги але матриця Слуцького є від'ємно напіввизначеною.

2.20. Для функції попиту $x_k(p, w) = \dfrac{w}{\sum_{l=1}^{L} p_l}$, $k = \overline{1, L}$ обчислити матрицю Слуцького. Чи задовольняє задана функція попиту слабку аксіому виявленої переваги?

2.21. Показати, що для функції попиту $x(p, w)$ Означення 2.3. виконання слабкої аксіоми виявленої переваги співпадає з Означенням 1.5.

2.22. Нехай відповідність попиту $x(p, w)$ є багатозначною.
а) Із Означення 1.5. слабкої аксіоми маємо для $x(p, w)$: $\forall (p, w), (p', w')$

$$\begin{cases} p \cdot x' \le w, \\ p' \cdot x \le w', \\ x \in x(p, w), \\ x' \in x(p', w'). \end{cases} \Rightarrow x \in x(p', w').$$

Показати, що це означення є еквівалентним такому узагальненню Означення 2.3:
$\forall (p, w), (p', w')$

$$\begin{cases} x \in x(p, w), \\ x' \in x(p', w'), \\ p \cdot x' \le w, \\ x' \notin x(p, w). \end{cases} \Rightarrow p' \cdot x > w'.$$

б) Показати, що коли відповідність попиту $x(p, w)$ задовольняє вказаному узагальненню слабкої аксіоми і закону Вальраса, тоді $x(p, w)$ має таку властивість:

$$\begin{cases} \forall x \in x(p, w), \\ \forall x' \in x(p', w'), \quad \Rightarrow p' \cdot x > w'. \\ p \cdot x' < w. \end{cases}$$

в) Показати, що із виконання узагальненої слабкої аксіоми і закону Вальраса випливає такий узагальнений компенсований закон попиту: $\forall (p, w), \forall (p', w'), \forall x \in x(p, w)$ таких, що $p' \cdot x = w'$ маємо $(p' - p) \cdot (x' - x) \leq 0, \ \forall x' \in x(p', w')$, із строгою нерівністю при $x' \notin x(p, w)$.

2.23. Нехай функція попиту $x(p, w)$ диференційовна за цінами і доходом, задовольняє закон Вальраса і матриця Слуцького симетрична. Тоді функція попиту $x(p, w)$ є однорідною нульового порядку за цінами і доходом.

Заняття № 3
Властивості відношення переваги та відповідної функції корисності

Означення 3.1. Відношення переваги $\succsim$ на X є **монотонним**, якщо $(x, y \in X) \wedge (y > x) \Rightarrow (y \succ x)$. Відношення переваги є **сильно монотонним**, якщо $(x, y \in X) \wedge (y \geq x) \wedge (y \neq x) \Rightarrow (y \succ x)$.

Означення 3.2. Відношення переваги $\succsim$ на $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$ є **локально ненасичуваним**, якщо $\forall x \in X$ і $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X$ такий, що $||y - x|| < \varepsilon$ і $y \succ x$.

Означення 3.3. Відношення переваги $\succsim$ на опуклій множині $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$ є **опуклим**, якщо для $\forall x \in X$ множина $\{y \in X | \ y \succsim x\}$ є опуклою. Відношення переваги $\succsim$ на опуклій множині $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$ є **строго опуклим**, якщо для $\forall x \in X$: $(y \succsim x) \wedge (z \succsim x) \wedge (y \neq z) \Rightarrow \alpha y + (1 - \alpha) z \succ x, \forall \alpha \in (0, 1)$.

Означення 3.4. Монотонне відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}_+^L$ називається **гомотетичним**, якщо $x \sim y \Rightarrow \alpha x \sim \alpha y, \forall \alpha \geq 0$.

Означення 3.5. Відношення переваги $\succsim$ на $X = (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}_+^{L-1}$ називається **квазілінійним** відносно l-го товару якщо

- $\forall x, y \in X, x \sim y, \Rightarrow (x + \alpha e_l) \sim (y + \alpha e_l)$ для $e_l = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- $x + \alpha e_l \succ x, \ \forall x \in X, \forall \alpha > 0$.

Означення 3.6. Відношення переваги $\succsim$ на $X \subseteq \mathbb{R}_+^L$ називається **неперервним**, якщо для довільних збіжних послідовностей $x^{(n)} \in X$, $y^{(n)} \in X$ таких, що $x^{(n)} \succsim y^{(n)}, \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} y^{(n)} = y \in X$ маємо $x \succsim y$.

Теорема Дебре. Якщо множина X є зв'язною, а раціональне відношення переваги $\succsim$ на X є неперервним, тоді існує неперервна функція корисності, що зображає дане відношення переваги.

Означення 3.7. Нехай множина X є опуклою. Функція $U: X \to \mathbb{R}$ називається **квазіугнутою**, якщо $\forall u \in \mathbb{R}$ множина $\{x \in X | \ U(x) \geq u\}$ є опуклою. Функція $U: \ X \to \mathbb{R}$ називається **строго квазіугнутою**, якщо $\forall u \in \mathbb{R}, (\forall x', x'' \in X) \wedge (x' \neq x'') \wedge (U(x') \geq u) \wedge (U(x'') \geq u) \Rightarrow U(\alpha x' + (1-\alpha)x'') > u, \forall \alpha \in (0, 1)$.

Твердження 3.1. Нехай множина X є опуклою. Функція $U: X \to \mathbb{R}$ буде квазіугнутою тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність

$$U(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq \min(U(x'), U(x'')), \ \forall x', x'' \in X, \ \forall \alpha \in [0, 1].$$

Функція $U: \ X \to \mathbb{R}$ буде строго квазіугнутою тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність

$$U(\alpha x' + (1-\alpha)x'') > \min(U(x'), U(x'')),$$

$$\forall x', x'' \in X,\ x' \neq x'',\ \forall \alpha \in (0,1).$$

ЗАДАЧІ

3.1. Довести, що коли множина альтернатив X не більш ніж зліченна, то для довільного раціонального відношення переваги $\succsim$ на X існує функція корисності, що зображає $\succsim$ на X.

3.2. Нехай функція $U: X \to \mathbb{R}$ має властивість $\forall(x, y \in X) \wedge (x \succ y) \Leftrightarrow (U(x) > U(y)$ для раціонального відношення переваги $\succsim$ на множині X. Чи буде функція U функцією корисності що зображає відношення переваги $\succsim$ на множині X?

3.3. Нехай $X = \mathbb{R}^L_+$, а відношення переваги задано так: $x \succsim y \Leftrightarrow x_l \geq y_l, \forall l = \overline{1, L}$. Чи існує функція корисності, що зображає задане відношення переваги?

3.4. Розглянемо на $X = \mathbb{R}^2_{++}$ такі відношення переваги:

(a) $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$;
(b) $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \geq \frac{x_2}{y_2}$;
(c) $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geq y_1 y_2$;
(d) $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geq 0$;
(e) $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} \geq \min\{y_1, y_2\}$;
(f) $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geq \min\{y_1, y_2\}$.

Для яких з наведених відношень переваги існує функція корисності, що їх зображає? Запишіть у явному вигляді відповідні функції корисності.

3.5. Доведіть, що коли сукупність множин байдужості для раціонального відношення переваги є зліченною, то існує функція корисності, що зображає це відношення переваги.

3.6. Показати, що 1) із сильної монотонності відношення переваги $\succsim$ випливає монотонність; 2) із монотонності відношення переваги $\succsim$ випливає властивість локальної ненасичуваності.

3.7. Відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}_+^L$ називається **слабо монотонним**, якщо $(x \geq y) \Rightarrow (x \succsim y)$. Показати, що коли відношення переваги є транзитивним, локально ненасичуваним і слабо монотонним, тоді це відношення переваги буде монотонним.

3.8. Відношення переваги $\succsim^L$ на $\mathbb{R}_+^2$ називається **лексикографічним**, якщо $((x_1, x_2) \succsim^L (y_1, y_2)) \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \vee ((x_1 = y_1) \wedge (x_2 \geq y_2))$. Показати, що лексикографічне відношення переваги є повним, транзитивним, сильно монотонним і строго опуклим.

3.9. Нехай $X = X_1 \times X_2$, де $X_1 = \{1, 2, \ldots\}$, а $X_2 = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. На X задано лексикографічне відношення переваги. Доведіть, що існує функція корисності, що зображає це відношення переваги. Запропонуйте явний вигляд цієї функції корисності.

3.10. Показати, що коли неперервна функція корисності зображає відношення переваги $\succsim$, то це відношення переваги буде неперервним.

3.11. Довести, що відношення переваги $\succsim$ на $X = \mathbb{R}_+^L$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли для $\forall x \in X$ множини $\{y \in X \mid y \succsim x\}$, $\{y \in X \mid x \succsim y\}$ будуть замкнені.

3.12. Довести, що відношення переваги $\succsim$ на $X = \mathbb{R}_+^L$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли для $\forall (x, y \in X) \wedge (x \succ y)$ існують околи V_x і V_y точок x і y відповідно, такі що $\forall x' \in V_x \cap X$ і $\forall y' \in V_y \cap X$ виконується $x' \succ y'$.

3.13. Нехай на опуклій множині X задано раціональне неперервне відношення переваги $\succsim$. Нехай для $x, y \in X$ маємо $x \succ y$. Довести, що існує таке $z \in X$, що $x \succ z \succ y$.

3.14. Покажіть, що неперервне відношення переваги на компактній множині X не може задовольняти умову локальної ненасичуваності.

3.15. Наведіть приклад опуклого, локально ненасичуваного відношення переваги яке не є монотонним.

3.16. Показати, що неперервне відношення переваги $\succsim$ на $X = \mathbb{R}^L_+$ є гомотетичним тоді і тільки тоді, коли існує відповідна функція корисності $U(x)$, яка є однорідною першого порядку.

3.17. Довести, що неперервне відношення переваги $\succsim$ на $X = (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ буде квазілінійним відносно першого товару тоді і тільки тоді, коли існує відповідна функція корисності вигляду $U(x) = x_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_L)$.

3.18. Довести, що неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}$, є квазіугнутою тоді і тільки тоді, коли її множина визначення X опукла, і виконується одна з умов:
- функція f – неспадна;
- функція f – незростаюча;
- існує точка $x^* \in X$, така що на множині $X \cap (-\infty, x^*]$ функція f неспадна, а на множині $X \cap [x^*, +\infty)$ – незростаюча.

3.19. Нехай $g : X \to \mathbb{R}$ – квазіугнута функція з областю значень Y і нехай $h : Y \to \mathbb{R}$ – неспадна функція. Довести, що функція $f(x) = h(g(x))$ – квазіугнута.

3.20. Які властивості (монотонність, сильна монотонність, локальна ненасичуваність, опуклість, строга опуклість, гомотетичність) мають відношення переваги на $\mathcal{R}^2_+$, що задані наступними функціями корисності?

(a) $u(x) = x_1 + x_2$;

(b) $u(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;

(c) $u(x) = \sqrt{x_1} + x_2$;

(d) $u(x) = x_1 x_2$;

(e) $u(x) = \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$;

(f) $u(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$;

(g) $u(x) = x_1^2 + x_2^2$;

(h) $u(x) = \min(x_1, x_2)$;

(i) $u(x) = \max(x_1, x_2)$;

(j) $u(x) = \min(2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1)$.

Які з цих функцій є угнутими? Які квазіугнутими? Для кожної з цих функцій побудуйте схеми кривих байдужості.

3.21. Покажіть, що функція корисності

$$U(x) = \lim_{\rho \to 0} \left(\sum_{i=1}^{L} \alpha_i x_i^{\rho} \right)^{1/\rho}, \alpha_i \geq 0, \forall i = \overline{1, L}, \sum_{i=1}^{L} \alpha_i = 1$$

зображає теж саме відношення переваги на $X = \mathbb{R}_+^L$, що і функція Кобба-Дугласа $U(x) = \prod\limits_{i=1}^{L} x_i^{\alpha_i}$.

3.22. Покажіть, що функція корисності

$$U(x) = \lim_{\rho \to -\infty} \left(\sum_{i=1}^{L} \alpha_i x_i^{\rho} \right)^{1/\rho}, \alpha_i \geq 0, \forall i = \overline{1, L}, \sum_{i=1}^{L} \alpha_i = 1$$

зображає теж саме відношення переваги на $X = \mathbb{R}_+^L$, що і функція Леонтьєва $U(x) = \min\{x_1, \ldots, x_L\}$.

Заняття № 4
Задача максимізації корисності. Відповідність попиту, непряма функція корисності та їх властивості

Нехай відношення переваги споживача $\succsim$ на споживчій множині $X = \mathbb{R}_+^L$ є раціональним, неперервним і задовольняє умову локальної ненасичуваності. Нехай $U(x)$ - це відповідна функція корисності, що зображає $\succsim$ на $X = \mathbb{R}_+^L$. Задачу вибору оптимального споживчого набору при заданих цінах $p = (p_1, \ldots, p_L)^T > 0 \Leftrightarrow p_l > 0, l = \overline{1, L}$ і заданому споживчому бюджеті $w > 0$ сформулюємо як задачу максимізації корисності

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}_+^L} U(x), \\ p \cdot x \leq w. \end{cases} \tag{4.1}$$

Твердження 4.1. Якщо $p > 0$ і функція корисності $U(x), x \in \mathbb{R}_+^L$ неперервна, тоді задача максимізації корисності має розв'язок.

Означення 4.1. Відображення, яке кожній парі (p, w) ставить у відповідність множину $x(p, w)$ розв'язків задачі максимізації корисності (4.1)називається **відповідністю попиту Вальраса** (використовують також термін відповідність попиту Маршалла). Якщо для кожної пари (p, w) множина $x(p, w)$ розв'язків задачі максимізації корисності (4.1) одноточкова, тоді $x(p, w)$ називається **функцією попиту**.

Твердження 4.2. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}_+^L$. Тоді відповідність попиту $x(p, w)$ має такі властивості:

1. $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w), \forall p > 0, \forall w > 0, \forall \alpha > 0$ – умова однорідності нульового порядку за (p, w);

2. $p \cdot x = w, \forall x \in x(p, w)$ – виконується закон Вальраса;

3. Якщо $\succsim$ – опукле, тоді множина $x(p,w)$ – опукла. Якщо $\succsim$ – строго опукле, тоді множина $x(p,w)$ – одноточкова для кожного (p,w);

4. Функція попиту $x(p,w)$ неперервна.

Означення 4.2. Функція $V(p,w) = \max\limits_{x\in B(p,w)} U(x) = U(x(p,w))$ називається непрямою функцією корисності.

Твердження 4.3. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді непряма функція корисності $V(p,w)$ має такі властивості:

1. $V(\alpha p, \alpha w) = V(p,w), \forall p > 0, \forall w > 0, \forall \alpha > 0$ – умова однорідності нульового порядку за (p,w);

2. Функція $V(p,w)$ строго зростає за w і незростає за p_l, $l = \overline{1,L}$;

3. Функція $V(p,w)$ – квазіопукла (множина $\{(p,w) | V(p,w) \le v\}$ – опукла для $\forall v \in \mathbb{R}$);

4. Функція $V(p,w)$ неперервна.

ЗАДАЧІ

4.1. Розглянемо відношення переваги на $\mathbb{R}^2_+$: $(x_1,x_2) \succ (y_1,y_2)$ якщо $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$. Чи задовольняє це відношення переваги умову локальної ненасичуваності? Чи буде споживач з таким відношенням переваги витрачати весь свій споживчий бюджет при додатних цінах?

4.2. Споживач має функцію корисності $U(x_1,x_2) = \max\{x_1,x_2\}$. Знайти функцію попиту і непряму функцію корисності.

4.3. Споживач має функцію корисності із сталою еластичністю заміщення (CES-функція) $U(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$. Знайти функцію попиту і непряму функцію корисності.

4.4. Споживач має функцію корисності $U(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - b_1)^\alpha (x_2 - b_2)^\beta (x_3 - b_3)^\gamma, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$. Показати, що можна вважати $\alpha + \beta + \gamma = 1$. При цій умові знайти функцію попиту і непряму функцію корисності.

4.5. Споживач має функцію корисності $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Знайти відповідну функцію попиту і непряму функцію корисності. Показати, що знайдені функції можна одержати з функції попиту і непрямої функції корисності для CES-функції корисності (задача 4.3) при $\rho \to 1$.

4.6. Споживач має функцію корисності Леонтьєва $U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Знайти функцію попиту і непряму функцію корисності. Показати, що знайдені функції можна одержати з функції попиту і непрямої функції корисності для CES-функції корисності (задача 4.3) при $\rho \to -\infty$.

4.7. Для кожної із заданих функцій корисності знайти функцію попиту і непряму функцію корисності. Перевірити теоретичні властивості функції попиту і непрямой функції корисності.

(a) $U(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$; (b) $U(x) = \sqrt{x_1} + x_2$;
(c) $U(x) = x_1 x_2$; (d) $U(x) = \ln x_1 + x_2^2/2$;

(e) $U(x) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$; (f) $U(x) = x_1^2 + x_2^2$;

(g) $U(x) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$;

(h) $U(x) = 28x_1 + 28x_2 - 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2$;

(i) $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 + 6$.

4.8. Нехай $w = 1$ і $V(p) = V(p,1)$ – це відповідна непряма функція корисності, тобто $V(p) = \max\limits_{x \geq 0} U(x),\ p \cdot x = 1$. Показати, що функцію корисності $U(x)$ можна знайти розв'язавши задачу $U(x) = \min\limits_{p>0} V(p),\ p \cdot x = 1$.

4.9. Припустимо, що задано непряму функцію корисності $V(p,1) = V(p_1, p_2) = -a \ln p_1 - b \ln p_2$. Який вигляд має відповідна пряма функція корисності?

4.10. Припустимо, що задано непряму функцію корисності $V(p_1, p_2, w) = \dfrac{w}{p_1 + p_2}$. Який вигляд має відповідна пряма функція корисності?

4.11. Якщо функція корисності $U(x)$ неперервна, строго квазіугнута і однорідна першого порядку: $U(\alpha x) = \alpha U(x)$, $\forall \alpha > 0$, тоді $x(p, \alpha w) = \alpha x(p,w)$, $V(p, \alpha w) = \alpha V(p,w)$, $\forall \alpha > 0$, а отже функцію попиту і непряму функцію корисності можна записати у вигляді $x(p,w) = w\tilde{x}(p)$, $V(p,w) = w\tilde{V}(p)$.

4.12. Нехай непряма функція корисності $V(p,w)$ диференційовна. Показати, що $\forall (p,w) :\ w\dfrac{\partial V(p,w)}{\partial w} = -p \cdot \nabla_p V(p,w)$.

4.13. Нехай на $X = (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}_+^{L-1}$ задано строго опукле і квазілінійне відносно першого товару відношення переваги. Покладемо $p_1 = 1$.

(a) Покажіть, що функції попиту Вальраса для товарів $2, \ldots, L$ не будуть залежати від споживчого бюджету w. Який буде ефект за доходом попиту на товар 1?

(b) Покажіть, що відповідна непряма функція корисності може бути записана у вигляді $V(p,w) = w + \varphi(p)$ для деякої функції $\varphi(\cdot)$.

(c) Нехай $L = 2$ і функція корисності споживача має вигляд $U(x_1, x_2) = x_1 + \varphi(x_2)$. Нехай $X = \mathbb{R}^2_+$, тобто маємо невід'ємність попиту на обидва товари. Зафіксуйте ціни p і перевірте як змінюється функція попиту Вальраса при зміні w. Коли вимога невід'ємності для першого товару є несуттєвою?

4.14. Задано функцію корисності $U(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_2 + x_3/(1 + x_3)$.

(a) Покажіть, що функція корисності сильно монотонна $((x \geq y) \wedge (x \neq y) \Rightarrow U(x) > U(y), x, y \in X)$, строго угнута і неперервна.

(b) Покажіть, що коли $(x \in \mathbb{R}^3_+) \wedge (x_3 > 0)$, тоді $(x_1, x_2 + x_3, 0) \succ (x_1, x_2, x_3)$.

(c) Нехай $(p \in \mathbb{R}^3_{++}) \wedge (p_2 = p_3)$. Покажіть, що тоді для функції попиту на третій товар маємо $x_3(p, w) = 0$.

(d) Нехай послідовність цін має вигляд $p_n = (1, 1/n, 1/n)$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_2(p_n, w)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_3(p_n, w)$

4.15. Зафіксуємо $w = 1$ і покладемо $x(p) = x(p, 1), V(p) = V(p, 1)$. **Непрямою функцією попиту** $g(x)$ будемо називати функцію обернену до функції $x(p) > 0$, тобто непряма функція попиту кожному споживчому набору $x > 0$ ставить у відповідність вектор цін $g(x)$ такий, що $x(g(x), 1) = x$. Показати, що мають місце співвідношення

$$g(x) = \frac{1}{x \cdot \nabla U(x)} \nabla U(x), \quad x(p) =) = \frac{1}{p \cdot \nabla V(p)} \nabla V(p).$$

4.16. Яким умовам повинні задовольняти функції $a(p)$ і $b(p)$, щоб функція у формі Гормена $V(p, w) = a(p) + b(p)w$ була непрямою функцією корисності?

4.17. Перевірте, що для непрямої функції корисності у формі Гормена лінії доход-споживання (IEP-лінії) є прямими.

4.18. Які обмеження для непрямої функції корисності у формі Гормена відповідають гомотетичному відношенню переваги і квазілінійному відношенню переваги?

Заняття № 5
Задача мінімізації витрат. Компенсована відповідність попиту Хікса, функція витрат та їх властивості. Зв'язок між задачею максимізації корисності та задачею мінімізації витрат.

Нехай відношення переваги споживача $\succsim$ на споживчій множині $X = \mathbb{R}^L_+$ є раціональним, неперервним і задовольняє умову локальної ненасичуваності. Нехай $U(x)$ - це відповідна функція корисності, що зображає $\succsim$ на $X = \mathbb{R}^L_+$. Задачу вибору оптимального споживчого набору при заданих цінах $p = (p_1, \dots, p_L)^T > 0 \Leftrightarrow p_l > 0, l = \overline{1, L}$ і заданому рівні корисності $u > U(0)$ сформулюємо як задачу мінімізації витрат:

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^L_+} p \cdot x, \\ U(x) \geq u. \end{cases} \tag{5.1}$$

Означення 5.1. Відображення, яке кожній парі (p, u) ставить у відповідність множину $h(p, u)$ розв'язків задачі мінімізації витрат (5.1) називається **відповідністю попиту Хікса** (або компенсованою відповідністю попиту). Якщо для кожної пари (p, u) множина $h(p, u)$ розв'язків задачі мінімізації витрат (5.1) одноточкова, тоді $h(p, u)$ називається **функцією попиту Хікса**.

Твердження 5.1. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді відповідність попиту Хікса $h(p, u)$ має такі властивості:

1. $h(\alpha p, u) = h(p, u), \forall p > 0, \forall u > U(0), \forall \alpha > 0$ – умова однорідності нульового порядку за p;

2. $U(x) = u, \forall x \in h(p,u)$ – відсутність надлишкової корисності;

3. Якщо $\succsim$ – опукле, тоді множина $h(p,u)$ – опукла. Якщо $\succsim$ – строго опукле, тоді множина $h(p,u)$ – одноточкова для кожного (p,w);

4. Функція попиту Хікса $h(p,u)$ неперервна.

Означення 5.2. Функція $e(p,u) = \min\limits_{U(x)\geq u,\ x\in\mathbb{R}^L_+} p\cdot x$ називається **функцією витрат**.

Твердження 5.2. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді функція витрат $e(p,u)$ має такі властивості:

1. $e(\alpha p, u) = \alpha e(p,u), \forall p > 0, \forall u > U(0), \forall \alpha > 0$ – умова однорідності першого порядку за p;

2. Функція $e(p,u)$ строго зростає за u і неспадає за p_l, $l = \overline{1,L}$;

3. Функція $e(p,u)$ – угнута по p;

4. Функція $e(p,u)$ неперервна.

Твердження 5.3. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді мають місце такі співвідношення:

- $h(p,u) = x(p,e(p,u))$ і $x(p,w) = h(p,V(p,w))$;
- $V(p,e(p,u)) = u$ і $e(p,V(p,w)) = w$.

ЗАДАЧІ

5.1. Якщо функція корисності $U(x)$ неперервна, $p > 0$ і $\exists x^* \in \mathbb{R}^L_+ : U(x^*) \geq u > U(0)$, тоді існує розв'язок задачі мінімізації витрат (5.1). Довести.

5.2. Припустимо, що функція корисності $U(x)$ диференційовна. Показати, що співвідношення

$$p \geq \lambda \nabla U(x^*),\ x^* \cdot [p - \lambda \nabla U(x^*)] = 0,\ U(x^*) = u,$$

для деякого $\lambda \geq 0$ є необхідними умовами першого порядку того, що $x^* \in h(p, u)$.

5.3. Показати, що при однорідній першого порядку функції корисності $U(x)$, функції $h(p, u)$ і $e(p, u)$ будуть однорідними першого порядку по u.

5.4. Споживач має функцію корисності $U(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$. Знайти функцію попиту Хікса і функцію витрат.

5.5. Споживач має функцію корисності із сталою еластичністю заміщення (CES-функція) $U(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$. Знайти функцію попиту Хікса і функцію витрат.

5.6. Споживач має функцію корисності $U(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - b_1)^\alpha (x_2 - b_2)^\beta (x_3 - b_3)^\gamma, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 1$. Знайти функцію попиту Хікса і функцію витрат.

5.6. Показати, що коли відношення переваги $\succsim$ є квазілінійним відносно товару 1, тоді функції попиту Хікса $h_l(p, u)$ для $l = 2, \ldots, L$ не залежать від u. Який вигляд має функція витрат?

5.7. Для кожної із заданих функцій корисності знайти функцію попиту Хікса і функцію витрат. Перевірити теоретичні властивості функції попиту Хікса і функції витрат.

(a) $U(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$; (b) $U(x) = \sqrt{x_1} + x_2$;
(c) $U(x) = x_1 x_2$; (d) $U(x) = \ln x_1 + x_2^2/2$;

(e) $U(x) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$; (f) $U(x) = x_1^2 + x_2^2$;

(g) $U(x) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$;

(h) $U(x) = 28x_1 + 28x_2 - 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 2x_2^2$;

(i) $U(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 + 6$.

5.8. Покажіть як із функції попиту

$$x_1(p,w) = \frac{\alpha w}{p_1}, \quad x_2(p,w) = \frac{(1-\alpha)w}{p_2}$$

для функції корисності Кобба-Дугласа $U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ можна одержати функцію попиту Хікса.

5.9. Використовуючи співвідношення із Твердження 5.3 довести, що властивості відповідності попиту Хікса $h(p,u)$ (Твердження 5.1) випливають із властивостей відповідності попиту Вальраса $x(p,w)$ (Твердження 4.2) і навпаки.

5.10. Використовуючи співвідношення із Твердження 5.3 довести, що властивості функції витрат $e(p,u)$ (Твердження 5.2) випливають із властивостей непрямої функції корисності $V(p,w)$ (Твердження 4.3) і навпаки.

5.11. Нехай функція попиту деякого споживача має вигляд $x(p,w) = \left(\frac{\alpha w}{p_1}, \frac{(1-\alpha)w}{p_2}\right)$, $\alpha \in (0,1)$, а непряма функція корисності дорівнює $V(p,w) = \frac{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}w}{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}}$. Знайдіть функцію витрат і функцію попиту Хікса.

5.12. Розглянемо функцію витрат

$$e(p,u) = \exp\left\{\sum_{l=1}^{L} \alpha_l \ln p_l + \left(\prod_{l=1}^{L} p_l^{\beta_l}\right) u\right\}.$$

Які умови повинні задовольняти параметри α_l, β_l, $l = 1, \dots, L$? Знайти відповідну непряму функцію корисності.

Заняття № 6
Співвідношення між попитом, непрямою функцією корисності і функцією витрат

Твердження 6.1. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$.

Твердження 6.2. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$, а функція попиту Хікса $h(p,u)$ неперервно диференційовна за p. Позначимо $D_p h(p,u) = \left\{\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j}\right\}_{i=\overline{1,L}}^{j=\overline{1,L}}$. Тоді:

1. $D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u) = \left\{\dfrac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_i \partial p_j}\right\}_{i=\overline{1,L}}^{j=\overline{1,L}}$.
2. Матриця $D_p h(p,u)$ від'ємно напіввизначена і симетрична.
3. $\forall p \geq 0 : D_p h(p,u) p = 0$.

Твердження 6.3.(**Рівняння Слуцького.**) Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$. Тоді для $\forall(p,w)$ і $u = V(p,w)$ має місце рівняння Слуцького

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \quad \forall l,k = 1,\dots,L,$$

або у векторно-матричній формі

$$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x^T(p,w).$$

Із рівняння Слуцького випливає, що при $u = V(p,w)$ маємо рівність $D_p h(p,u) = S(p,w)$, де $S(p,w) = \{s_{l,k}(p,w)\}_{i=\overline{1,L}}^{j=\overline{1,L}}$ – це **матриця Слуцького** (або матриця замін),

$$s_{l,k}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w), \quad \forall l,k = 1,\ldots,L.$$

Із Твердження 6.2 і 6.3 випливає, що коли попит визначається максимізацією корисності, тоді матриця Слуцького має властивості:

1. Матриця $S(p,w)$ – від'ємно напіввизначена.

2. Матриця $S(p,w)$ – симетрична.

3. $S(p,w)p = 0$.

Твердження 6.4.(**Рівність Роя.**) Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}_+^L$ і непряма функція корисності $V(p,w)$ диференційовна в точці $(\bar{p},\bar{w}) > 0$. Тоді має місце рівність Роя

$$x(\bar{p},\bar{w}) = -\frac{1}{\nabla_w V(\bar{p},\bar{w})} \nabla_p V(\bar{p},\bar{w}).$$

Таким чином для кожного $l = 1,\ldots,L$:

$$x_l(\bar{p},\bar{w}) = -\frac{\partial V(\bar{p},\bar{w})/\partial p_l}{\partial V(\bar{p},\bar{w})/\partial w}.$$

ЗАДАЧІ

6.1. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає неперервне, раціональне, локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}_+^L$ і непряма функція корисності $V(p,w)$ диференційовна. Показати, що з рівності Роя випливає співвідношення $h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$.

6.2. Споживач має функцію корисності $U(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - b_1)^\alpha (x_2 - b_2)^\beta (x_3 - b_3)^\gamma, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ і функцію попиту $x(p, w) = (b_1, b_2, b_3)^T + (w - p \cdot b)(\alpha/p_1, \beta/p_2, \gamma/p_3)^T$. Перевірити виконання рівняння Слуцького. Показати, що матриця Слуцького $S(p, w)$ від'ємно напіввизначена і має ранг рівний 2.

6.3. Непряма функція корисності $V(p, w)$ є логарифмічно однорідною за w, якщо $V(p, \alpha w) = V(p, w) + \ln \alpha$, $\forall \alpha > 0$ (інакше $V(p, w) = \ln V^*(p, w)$, де $V^*(p, w)$ – це функція однорідна першого порядку за w). Показати, що для такої непрямої функції корисності маємо $x(p, 1) = -\nabla_p V(p, 1)$.

6.4. Функція витрат має вигляд

$$e(p, u) = \prod_{l=1}^{L} p_l^{\alpha_l} e^u, \quad \sum_{l=1}^{L} \alpha_l = 1, \ \alpha_l \geq 0, l = 1, \ldots, L.$$

(a) Перевірити виконання рівності Роя і рівняння Слуцького.

(b) Знайти відповідну функцію корисності.

6.5. Задано функція корисності $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$.

(a) Знайти функцію попиту $x(p, w)$ і функцію попиту Хікса $h(p, u)$.

(b) Функцію витрат $e(p, u)$ і перевірити рівність $h(p, u) = \nabla_p e(p, u)$.

(c) Знайти непряму функцію витрат $V(p, w)$ і перевірити рівність Роя.

6.6. Задано непряму функцію корисності $V(p, w)$. Як знайти функцію витрат $e(p, u)$, функцію попиту $x(p, w)$ і функцію корисності $U(x)$?

6.7. Нехай функція попиту має вигляд

$$x_k(p,w) = \frac{w}{\sum\limits_{l=1}^{L} p_l}, \quad k = 1, \ldots, L.$$

Відомо, що $U(1,\ldots,1) = 1$. Чому дорівнює $e(p,1)$?

6.8. Для цін $p = (1,2,6)$ матриця замін $D_p h(p,u)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} -10 & * & * \\ * & -4 & * \\ 3 & * & * \end{pmatrix}$$

Відновити пропущені значення.

6.9. Нехай відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$ – гомотетичне. Показати, що

$$\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k(p,w)}{\partial p_l}, \qquad \forall l,k = 1,\ldots,L.$$

6.10. Нехай функція витрат $e(p,u)$ двічі диференційовна за (p,u). Показати, що l-й товар суперіорний тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{\partial^2 e(p,u)}{\partial p_l \partial u} > 0$.

6.11. Нехай $L = 2$ і задано непряму функцію корисності

$$V(p,w) = \exp\left\{-\frac{bp_1}{p_2}\right\}\left[\frac{w}{p_2} + \frac{1}{b}\left(\frac{ap_1}{p_2} + \frac{a}{b} + c\right)\right],$$

$a,b,c > 0$.

(a) Перевірити, шо функція попиту на перший товар має вигляд

$$x_1(p,w) = a\frac{p_1}{p_2} + b\frac{w}{p_2} + c.$$

(b) Перевірити, що функція витрат має вигляд

$$e(p,u) = p_2 u \exp\left\{\frac{bp_1}{p_2}\right\} - \frac{1}{b}\left(ap_1 + \frac{a}{b}p_2 + cp_2\right).$$

(c) Перевірити, шо функція попиту Хікса на перший товар має вигляд

$$h_1(p,u) = ub \exp\left\{\frac{bp_1}{p_2}\right\} - \frac{a}{b}.$$

6.12. Нехай у економіці є 3 товари. Попит на перший і другий товари має вигляд:

$$x_1(p,w) = \frac{w}{2p_1\left(1+\sqrt{p_2/p_1}\right)}, x_2(p,w) = \frac{w}{2p_2\left(1+\sqrt{p_2/p_1}\right)}.$$

Перевірити виконання рівняння Слуцького.

6.13. Перевірте, що функція $V(p,w) = \dfrac{w}{p_1} + \dfrac{w}{p_2}$ задовольняє всі властивості непрямої функції корисності і обчислити відповідну функцію витрат та функції попиту $x(p,w)$ і $h(p,u)$.

6.14. Відношення переваги представлене функцією корисності $U(x) = \phi(x)$ і нехай $e(p,u)$ – це відповідна функція витрат, $V(p,w)$ – непряма функція корисності, $h(p,u)$ – функція попиту Хікса, $x(p,w)$ – функція попиту Вальраса (Маршалла). Нехай теж саме відношення переваги представлене функцією корисності $U^*(x) = \psi(\phi(x))$ для строго зростаючої функції $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Показати, що у цьому випадку функція витрат буде мати вигляд $e(p, \psi^{-1}(u))$, непряма функція корисності – $\psi(V(p,w))$ і функція попиту Хікса – $h(p, \psi^{-1}(u))$. Перевірте, що функція попиту $x(p,w)$ при цьому не зміниться.

Заняття № 7
Відновлення відношення переваги за спостереженнями. Інтегровність. Аналіз зміни добробуту споживача.

Означення 7.1. Раціональне відношення переваги $\succsim$ на $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$ раціоналізує поведінку споживача за спостереженнями $(p^1, x^1), \ldots, (p^n, x^n)$, $x^i \in X, \forall i$, якщо $x^i \succsim x, \forall i$ і для всіх $x \in X$, таких що $p^i \cdot x \leq p^i \cdot x^i$.

Будемо надалі вважати, що відношення переваги задовольняє умову локальної ненасичуванності.

Означення 7.2.(Узагальнена аксіома виявленої переваги). Говорять, що сукупність даних $(p^1, x^1), \ldots, (p^n, x^n)$ задовольняє узагальнену аксіому виявленої переваги, якщо не існує ланцюжків виду $p^i \cdot x^j \leq p^i \cdot x^i, p^j \cdot x^k \leq p^j \cdot x^j, \ldots, p^r \cdot x^i \leq p^r \cdot x^r$, де принаймні одна нерівність строга.

Означення 7.3.(Сильна аксіома виявленої переваги). Функція попиту $x(p, w)$ задовольняє сильну аксіому виявленої переваги, якщо для довільних $(p^1, w^1), \ldots, (p^N, w^N)$ для яких $x(p^{n+1}, w^{n+1}) \neq x(p^n, w^n)$ і $p^n \cdot x(p^{n+1}, w^{n+1}) \leq w^n, \forall n \leq N-1$ ми маємо $p^N \cdot x(p^1, w^1) > w^N$.

Мають місце наступні твердження.

Твердження 7.1. (Теорема Афріата). Набір даних (p^1, x^1), $\ldots, (p^n, x^n)$ задовольняє узагальнену аксіому виявленої переваги тоді і тільки тоді, коли існує кусково-лінійна, неперервна і угнута функція корисності, яка їх породжує.

Твердження 7.2. Функція попиту $x(p, w)$ задовольняє сильну аксіому виявленої переваги, тоді і тільки тоді, коли існує раціональне відношення переваги $\succsim$ яке раціоналізує $x(p, w)$, тобто таке, що для всіх (p, w): $x(p, w) \succ y$ для кожного $y \neq x(p, w), y \in B_{p,w}$.

Означення 7.4. Нехай функція корисності $U(x)$ неперервна і зображає локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}^L_+$, а $e(p, u)$ і $V(p, w)$ – це функція витрат і непряма функція корисності, відповідно. **Грошовою функцією корисності** називають функцію $m(p, x) = e(p, U(x))$, а **грошовою непрямою функцією корисності** називають функцію $\mu(\bar{p}, p, w) = e(\bar{p}, V(p, w))$, де $\bar{p}$ – фіксований вектор цін.

Припустимо, що задана функція попиту $x(p, w)$, яка є однорідною нульового порядку, задовольняє закон Вальраса і неперервно диференційовна. Зафіксуємо деяку точку $x^0 = x(p^0, w^0)$ і довільно визначимо u^0 – корисність цього споживчого набору. Для знаходження відповідної функції витрат $e(p, u^0)$ потрібно розв'язати систему рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial e(p, u^0)}{\partial p_l} = x_l(p, e(p, u^0)), e(p^0, u^0) = w^0, l = 1, \dots L. \qquad (7.1)$$

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь у частинних похідних (7.1) є симетричність матриці

$$D_p x(p, e(p, u^0)) + D_w x(p, e(p, u^0)) x^T(p, e(p, u^0)) = S(p, e(p, u^0)),$$

тобто матриці Слуцького. Якщо функція попиту $x(p, w)$ однорідна нульового порядку, неперервно диференційовна, задовольняє закон Вальраса і задовольняє слабку аксіому виявленої переваги, то відповідна матриця Слуцького буде від'ємно напіввизначена, а значить функція $e(p, u^0)$ буде угнутою по p. Таким чином необхідною і достатньою умовою відновлення функції витрат $e(p, u)$ за функцією попиту $x(p, w)$ є симетричність і від'ємна напіввизначеність матриці Слуцького.

Наступна система рівнянь у частинних похідних називається **рівняннями інтегровності**

$$\frac{\partial \mu(\bar{p}, p, w)}{\partial p_l} = x_l(p, \mu(\bar{p}, p, w)), \mu(\bar{p}, \bar{p}, w) = w, l = \overline{1, L}. \quad (7.2)$$

Розв'язок $\mu(\bar{p}, p, w)$ системи (7.2) дає **грошову непряму функцію корисності**, яка відповідає функції попиту $x(p, w)$.

Нехай початковий вектор цін p^0 змінився на вектор цін p^1, а споживчий доход $w > 0$ сталий. Різниця $\mu(\bar{p}, p^1, w) - \mu(\bar{p}, p^0, w)$ задає міру зміни добробуту споживача при зміні цін.

Означення 7.5. Величина

$$\begin{aligned} &EV(p^0, p^1, w) = \mu(p^0, p^1, w) - \mu(p^0, p^0, w) = \\ &= e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^0, u^1) - w, \end{aligned}$$

де $u^i = V(p^i, w), i = 0, 1$, називається **еквівалентною варіацією**.
Величина

$$\begin{aligned} &CV(p^0, p^1, w) = \mu(p^1, p^1, w) - \mu(p^1, p^0, w) = \\ &e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) = w - e(p^1, u^1) \end{aligned}$$

називається **компенсуючою варіацією**.

Нехай ціни змінилися так, що $p_1^0 \neq p_1^1$, $p_k^0 = p_k^1 = \bar{p}_k, \forall k \neq 1$. Введемо позначення $\bar{p}_{-1} = (\bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_L)$. Нехай $h(p, u)$ – це компенсована функція попиту, тоді мають місце представлення:

$$EV(p^0, p^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1) dp_1,$$

$$CV(p^0, p^1, w) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) dp_1.$$

ЗАДАЧІ

7.1. Нехай для цін $p^1 = (2,1,2), p^2 = (2,2,1), p^3 = (1,2,2)$ і споживчого доходу $w = 8$ маємо відповідно єдиний вибір споживача для кожної бюджетної множини: $x^1 = (1,2,2), x^2 = (2,1,2), x^3 = (2,2,1)$. Чи задовільняє функція попиту споживача сильну аксіому виявленої переваги?

7.2. Споживач зробив однозначний вибір $x(10,10,10) = (10, 10,10)$; $x(10,1,2) = (9,25,15/2)$; $x(1,1,10) = (15,5,9)$ (попит споживача для цін $(10,10,10)$ є $(10,10,10)$ і т.д.). Чи може цей вибір бути узгоджений з локально ненасичуваною функцією корисності споживача?

7.3. Розглянемо споживача, який має попит на два товари. Коли ціни на товари дорівнюють (2,4), він має попит рівний (1,2), а коли ціни дорівнюють (6,3), споживач має попит рівний (2,1). Чи максимізує споживач корисність?

7.4. Чи зодовільняють узагальнену аксіому виявленої переваги наступні спостереження за вибором споживача: $x^1 = (5,3), p^1 = (1,4); x^2 = (2,2), p^2 = (1,3); x^3 = (2,5), p^3 = (3,1)$?

7.5. Функція попиту споживача має вигляд

$$x_l(p,w) = \frac{\alpha_l w}{p_l},\ l = \overline{1,L},\ \sum_{l=1}^{L} \alpha_l = 1,\ \alpha_l \geq 0, l = \overline{1,L}.$$

Знайти відповідну функцію витрат $e(p,u)$ і функцію корисності $U(x)$.

7.6. Функція попиту споживача має вигляд

$$x_1(p,w) = \frac{wp_2}{p_1p_2 + a^2p_1^2},\ x_2(p,w) = \frac{a^2wp_1}{p_2^2 + a^2p_2p_1}$$

Знайти відповідну функцію витрат $e(p,u)$.

7.7. Показати, що якщо $e(p,u)$ – це неперервна, зростаюча по u, однорідна першого порядку, неспадна і угнута по p функція, то функція корисності $u(x) = \sup\{u : \ x \in V_u\}$, де $V_u = \{y : \ p \cdot y \geq e(p,u), \forall p > 0\}$, визначена для $x > 0$, задовольняє умову $e(p,u) = \min\{p \cdot x : \ \ u(x) \geq u\}$ для довільного $p > 0$.

7.8. Статистик має функцію корисності $U(x,y) = \min\{x,y\}$, споживчий доход 150 грошових одиниць (г.о.), а ціни на товари x і y дорівнюють 1 г.о.. Шеф статистика думає послати його у інше місто, де ціна товару x дорівнює 1 г.о., а ціна товару y дорівнює 2 г.о.. Шеф не пропонує підвищення платні. Статистик, розуміючи значення компенсуючої і еквівалентної варіації, сказав, що переїзд до нового міста для нього так само поганий, як і зменшення його споживчого доходу на A г.о., але він не проти переїзду, якщо йому доплатять B г.о. Визначити A і B.

7.9. Розв'яжіть задачу 7.8 для випадку $U(x,y) = 4xy, \ w = 10$.

7.10. В умовах задачі 7.6 знайти еквівалентну і компенсуючу варіацію при зміні цін з $p^0 = (2,1)$ на $p^1 = (1,2)$.

7.11. Нехай у економіці є два товари і ціна на перший товар змінилася. При цьому ціна другого товару і бюджет споживача залишились без змін. Як співвідносяться еквівалентна і компенсуюча варіації у випадку якщо:

(а) ціна першого товару зросла і перший товар суперіорний;

(б) ціна першого товару зросла і перший товар – це товар Гіффена;

(в) ціна першого товару впала і перший товар інферіорний;

(г) ціна першого товару впала і перший товар суперіорний?

7.12. Припустимо, що зміна цінового вектора p^0 на ціновий вектор p^1 відбулась завдяки зміні ціни на товар 1 (з p_1^0 на p_1^1) і зміні ціни на товар 2 (з p_2^0 на p_2^1). Одержати інтегральне представлення для еквівалентної варіації і компенсуючої варіації через компенсовані функції попиту Хікса для товарів 1 і 2. Покажіть що при відсутності ефекту доходу для кожного товару, еквівалентна і компенсуюча варіації співпадають.

7.13. Припустимо, що ціни $\bar{p}_{-1}$ на всі товари, крім першого, є незмінними, дохід сталий і дорівнює w_0, а ціна першого товару змінюється з p_1^0 до p_1^1. Непряма функція корисності має форму Гормена $V(p,w) = a(p) + b(p)w$ і є неперервно диференційовною.

(а) Записавши означення компенсуючої варіації CV за допомогою непрямої функції корисності, покажіть, що

$$\begin{aligned}&V(p_1^1, \bar{p}_{-1}, w_0) - V(p_1^1, \bar{p}_{-1}, w_0 - CV) = \\ &= V(p_1^1, \bar{p}_{-1}, w_0) - V(p_1^0, \bar{p}_{-1}, w_0).\end{aligned}$$

Звідси за допомогою рівності Роя виведіть співвідношення

$$\int\limits_{w_0 - CV}^{w_0} \frac{\partial V(p_1^1, \bar{p}_{-1}, w)}{\partial w} dw = \int\limits_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, w_0) \frac{\partial V(p_1, \bar{p}_{-1}, w_0)}{\partial w} dp_1.$$

(б) Використавши задану форму непрямої функції корисності, покажіть, що

$$CV = \int\limits_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, w_0) \frac{b(p_1, \bar{p}_{-1})}{b(p_1^1, \bar{p}_{-1})} dp_1.$$

(в) Застосувавши рівність Роя, показати, що для непрямої функції корисності у формі Гормена виконується

$$\frac{\partial b(p_1, \bar{p}_{-1})}{\partial p_1} = -\frac{\partial x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, w)}{\partial w} b(p_1, \bar{p}_{-1}).$$

г) Використавши результати пунктів б) і в), вивести формулу Сіда:

$$CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \exp\left\{-\int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1(t, \bar{p}_{-1}, w_0)}{\partial w} dt\right\} x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, w_0) dp_1.$$

Заняття № 8
Варіант модульної контрольної №1

1. Нехай функція попиту $x(p, w)$ задовольняє закон Вальраса, слабку аксіому виявленої переваги, $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w), \forall \alpha > 0$, $x(p, \alpha w) = \alpha x(p, w)$, $\forall \alpha > 0$. Показати, що при цих умовах закон попиту виконується і для некомпенсованої зміни цін, тобто при $x(p, w) \neq x(p', w)$ маємо

$$(p' - p) \cdot (x(p', w) - x(p, w)) < 0.$$

2. Показати, що якщо функція попиту $x(p, w)$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги, то $x(p, w)$ буде однорідною нульового порядку за (p, w).

3. Яким умовам повинні задовольняти функції $a(p)$ і $b(p)$, щоб функція у формі Гормена $V(p, w) = a(p) + b(p)w$ була непрямою функцією корисності?

4. Споживач має функцію корисності із сталою еластичністю заміщення (CES-функція) $U(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$, $\rho < 0$. Знайти функцію попиту Хікса і функцію витрат.

5. Нехай відношення переваги $\succsim$ на $\mathbb{R}_+^L$ – гомотетичне. Показати, що

$$\frac{\partial x_l(p, w)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_k(p, w)}{\partial p_l}, \qquad \forall l, k = 1, \ldots, L.$$

Заняття № 9
Властивості виробничих множин і виробничих функцій

Означення 9.1. **Виробничим планом** будемо називати вектор $y = (y_1, \ldots, y_L) \in \mathbb{R}^L$, де при $y_l > 0$ маємо l-й товар – це товар випуску, а при $y_l < 0$ маємо l-й товар – це фактор виробництва.

Для кожної фірми визначається множина технологічно можливих товарів $Y \subset \mathbb{R}^L$ – **виробнича множина**. Часто у виробничих процесах зручно позначати вектор товарів випуску через $q = (q_1, \ldots, q_M) \geq 0$, а вектор факторів виробництва через $z = (z_1, \ldots, z_{L-M}) \geq 0$. Тоді виробничий план можна записати у вигляді $y = (-z_1, \ldots, -z_{L-M}, q_1, \ldots, q_M)$.

Якщо фірма має лише один товар випуску q, і вектор факторів виробництва $z = (z_1, \ldots, z_{L-1})$ тоді виробничий план має вигляд $y = (-z_1, \ldots, -z_{L-1}, q)$ і таку фірму будемо називати **однопродуктовою**.

Означення 9.2. **Виробничою функцією** однопродуктової фірми називають функцію $f(z)$, яка задає максимальну кількість випуску q при використанні факторів виробництва $z = (z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0$.

Виробнича функція $f(z)$ однопродуктової фірми породжує виробничу множину $Y = \{(-z_1, \ldots, -z_{L-1}, q) \in \mathbb{R}^L | \ q \leq f(z),$ $z = (z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0, q \geq 0\}$.

Деякі властивості виробничих множин:

1) **"Відсутність безкоштовних сніданків"** : $(y \in Y) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow y = 0$.

2) **Умова вільного розміщення**: $(y \in Y) \wedge (y' \leq y) \Rightarrow y' \in Y$.

3) **Необоротність**: $(y \in Y) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow -y \notin Y$.

4) **Незростання віддачі від масштабу**:
$(\forall y \in Y) \wedge (\forall \alpha \in [0, 1]) \Rightarrow \alpha y \in Y$.

5) **Неспадання віддачі від масштабу**:
$(\forall y \in Y) \wedge (\forall \alpha \in [1, +\infty]) \Rightarrow \alpha y \in Y$.

6) **Стала віддача від масштабу**:
$(\forall y \in Y) \wedge (\forall \alpha \in [0, +\infty]) \Rightarrow \alpha y \in Y$.

7) **Адитивність**: $\forall y, y' \in Y \Rightarrow y + y' \in Y$.

8) **Можливість бездіяльності**: $0 \in Y$.

9) **Виробнича множина є опуклий конус**: $\forall y, y' \in Y$, $\forall \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha y + \beta y' \in Y$.

ЗАДАЧІ

9.1. Перевірити, що із незростаючої віддачі від масштабу і адитивності виробничої множини випливає її опуклість.

9.2. Перевірити, що із опуклості виробничої множини і можливості бездіяльності випливає незростання віддачі від масштабу.

9.3. Перевірити, що виробнича множина має властивість адитивності і незростання віддачі від масштабу тоді і лише тоді, коли вона є опуклим конусом.

9.4. Нехай $f(z)$ – це виробнича функція однопродуктової фірми, а Y – її виробнича множина. Показати, що Y задовольняє умову сталої віддачі від масштабу тоді і лише тоді, коли $f(z)$ є однорідною першого порядку.

9.5. Нехай $f(z)$ – це виробнича функція однопродуктової фірми, а Y – її виробнича множина. Показати, що Y задовольняє умову незростання віддачі від масштабу тоді і лише тоді, коли $\forall t > 1, \; f(tz) \leq tf(z)$.

9.6. Нехай $f(z)$ – це виробнича функція однопродуктової фірми, а Y – її виробнича множина. Показати, що Y задовольняє умову неспадання віддачі від масштабу тоді і лише тоді, коли $\forall t > 1,\ f(tz) \geq tf(z)$.

9.7. Нехай $f(z)$ – це виробнича функція однопродуктової фірми, а Y – її виробнича множина. Показати, що Y буде опуклою тоді і лише тоді, коли функція $f(z)$ буде угнутою (опуклою вгору).

9.8. Показати: якщо виробнича множина Y задовольняє умову вільного розміщення, то виробнича функція $f(z)$ є неспадною: $f(z') \leq f(z'')$ при $z'_l \leq z''_l, l = \overline{1, L-1}$.

9.9. Нехай виробнича функція $f(z)$ диференційовна, а Y – це відповідна виробнича множина. У точці $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$, де $f(z) > 0$, визначимо локальну еластичність масштабу

$$e(z) = \frac{df(\lambda z)}{d\lambda} \frac{\lambda}{f(z)}\bigg|_{\lambda=1} = \frac{1}{f(z)} \sum_{l=1}^{L-1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_l} z_l.$$

Показати:

(a) Якщо виробнича множина Y має властивість незростання віддачі від масштабу, то $e(z) \leq 1$.

(b) Якщо виробнича множина Y має властивість неспадання віддачі від масштабу, то $e(z) \geq 1$.

(c) Якщо виробнича множина Y має властивість сталої віддачі від масштабу, то $e(z) = 1$.

9.10. Виробнича множина задається умовами $y_1 \leq \ln(1 - y_2)$, $y_2 < 1$. Які властивості має ця виробнича множина?

9.11. Показати: якщо виробнича множина Y замкнена, опукла і $-\mathbb{R}_+^L \subset Y$ тоді Y задовольняє умову вільного розміщення.

9.12. Нехай виробнича функція $f(z_1, z_2) = z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. При яких умовах на α, β відповідна виробнича множина задовольняє:

(a) умову незростання віддачі від масштабу,

(b) умову неспадання віддачі від масштабу,

(c) умову сталої віддачі від масштабу.

9.13. Вектор ψ називається напрямком рецесії виробничої множини Y, якщо існує $y \in Y$ і послідовність додатних чисел $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, така що $y + \lambda_n \psi \in Y, \forall n$.

(a) Покажіть: якщо виробнича множина Y замкнута і опукла, то множина напрямків рецесії Ψ є замкненим опуклим конусом. Якщо Y задовольняє умову вільного розміщення, то $-\mathbb{R}_+^L \subset \Psi$.

(b) Нехай виробнича множина Y замкнута і опукла, $\mathbf{0} \in Y$. Доведіть, що ψ є напрямком рецесії Y тоді і лише тоді, коли $\lambda\psi \in Y, \forall \lambda \geq 0$.

(c) Доведіть: якщо виробнича множина Y замкнута і опукла, то $Y + \Psi = Y$.

Заняття № 10
Задача максимізації прибутку і задача мінімізації видатків виробництва

Нехай задано вектор цін $p = (p_1, \ldots, p_L) > 0$ і ціни не залежать від виробничих планів. Нехай виробнича множина Y є непорожня, замкнена і має властивість вільного розміщення. **Задача максимізації прибутку** має вигляд:

$$p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l \to \max, \ y \in Y.$$

Означення 10.1. Функція $\pi(p) = \max_{y \in y} p \cdot y$ називається **функцією прибутку** фірми, а відображення, яке вектору цін $p > 0$ ставить у відповідність множину $y(p) = \{y \in Y|\ p \cdot y = \pi(p)\}$ називається **відповідністю пропозиції** фірми.

Якщо розглядається однопродуктова фірма з виробничою функцією $f(z)$, то можна розглядати задачу максимізації прибутку на множині факторів виробництва $z = (z_1, \ldots, z_{L-1}) \geq 0$. Якщо $p > 0$ – це ціна одиниці випуску, а $w = (w_1, \ldots, w_{L-1}) > 0$ – це вектор цін на фактори виробництва, то задача максимізації прибутку для однопродуктової фірми має вигляд

$$pf(z) - w \cdot z \to \max,\ z \in \mathbb{R}_+^{L-1}.$$

Теорема 10.1. Нехай виробнича множина Y є замкнена і задовольняє умову вільного розміщення. Якщо $\pi(p)$ і $y(p)$ – це відповідно функція прибутку і відповідність попиту, тоді:

1. $\pi(p)$ однорідна першого порядку : $\pi(\lambda p) = \lambda\pi(p), \forall\lambda \geq 0$.

2. $\pi(p)$ опукла вниз.

3. $y(p)$ однорідна нульового порядку: $y(\lambda p) = y(p), \forall\lambda > 0$.

4. Якщо виробнича множина Y опукла, тоді $y(p)$ опукла множина. Якщо Y строго опукла, тоді $y(p)$ однозначна (якщо розв'язок задачі максимізації прибутку існує).

5. Якщо $y(\bar{p})$ – одноточкова, тоді $\pi(p)$ диференційовна в точці $\bar{p}$ і $\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$.

6. Якщо $y(p)$ однозначна і неперервно диференційовна при $p = \bar{p}$, тоді $Dy(\bar{p}) = D^2\pi(\bar{p})$, $Dy(\bar{p})$ – симетрична, додатньо напіввизначена матриця і $Dy(\bar{p})\bar{p} = 0$.

7. **Закон пропозиції**: $(p - p') \cdot (y - y') \geq 0, \forall p, p', y \in y(p), y' \in y(p')$.

Розглянемо однопродуктову фірму з виробничою функцією $f(z)$. Нехай $q \geq 0$ – це заданий рівень випуску продукту,

$w = (w_1, \ldots, w_{L-1}) > 0$ – це вектор цін на виробничі фактори $z = (z_1, \ldots, z_{L-1})$.

Задача мінімізації видатків виробництва задається так:

$$w \cdot z \to \min, \; f(z) \geq q, z \geq 0.$$

Означення 10.2. Відображення, яке кожному набору (w, q) ставить у відповідність множину розв'язків задачі мінімізації видатків виробництва $z(w, q)$ називається **умовною відповідністю попиту на фактори виробництва**, а функція

$$c(w, q) = \min_{f(z) \geq q, z \geq 0} w \cdot z$$

називається **функцією видатків**.

Теорема 10.2. Нехай $c(w, q)$ – це функція видатків виробництва однопродуктової фірми з неперервною виробничою функцією $f(z)$, і $z(w, q)$ – це умовна відповідність попиту на фактори виробництва. Тоді:

1. $c(\alpha w, q) = \alpha c(w, q), \forall \alpha > 0$.
2. $c(w, q)$ зростає по q і неспадна по $w_l, l = \overline{1, L-1}$.
3. $c(w, q)$ є угнутою (опуклою вгору)по w.
4. $z(\alpha w, q) = z(w, q), \forall \alpha > 0$.
5. $\forall z \in z(w, q) : \; f(z) = q$ (відсутність надлишкового випуску при мінімальних видатках).
6. Якщо функція $f(z)$ квазіугнута, то множина $z(w, q)$ є опуклою; якщо функція $f(z)$ строго квазіугнута, то множина $z(w, q)$ є одноточковою.
7. Якщо множина $z(\bar{w}, q)$ є одноточковою, тоді функція видатків $c(w, q)$ диференційовна в точці $w = \bar{w}$ і $\nabla_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$.

8. Якщо функція $z(w,q)$ неперервно диференційовна в точці $w=\bar{w}$, тоді матриця $D_w z(\bar{w},q) = D_w^2 c(\bar{w},q)$ є симетричною, від'ємно напіввизначеною і $D_w z(\bar{w},q)\bar{w} = 0$.

Якщо для однопродуктової фірми відома функція видатків виробництва $c(w,q)$, то задачу максимізації прибутку можна звести до вигляду

$$pq - c(w,q) \to \max,\ \ q \geq 0.$$

ЗАДАЧІ

10.1. Довести: якщо виробнича множина Y задовольняє умову неспадання віддачі від масштабу, то або $\pi(p) \leq 0$ або $\pi(p) = +\infty$.

10.2. Довести, що функція прибутку $\pi(p)$ є опуклою вниз.

10.3. Довести: якщо виробнича функція $f(z)$ неперервна, то $\forall z \in z(w,q):\ \ f(z) = q$.

10.4. Довести: якщо виробнича функція $f(z)$ однорідна першого порядку, то $c(w,\alpha q) = \alpha c(w,q)$, $z(w,\alpha q) = \alpha z(w,q)$, $\forall \alpha > 0$.

10.5. Довести: якщо виробнича функція $f(z)$ опукла вгору, то функція видатків виробництва $c(w,q)$ є опуклою вниз по q.

10.6. Нехай виробнича множина фірми має вигляд $Y = \{(y_1,y_2)|\ y_1 \leq \ln(1-y_2), y_2 < 1\}$. Розв'язати задачу максимізації прибутку.

10.7. Відомо, що при цінах $(1,2)$ фірма обрала виробничий план $(1,-1)$, а при цінах $(2,1)$ – виробничий план $(-1,1)$. Чи узгоджується такий вибір з максимізацією прибутку?

10.8. Відомо, що при цінах $(1, 4)$ фірма обрала виробничий план $(-4, 3)$, при цінах $(1, 1)$ – виробничий план $(0, 0)$, а при цінах $(2, 1)$ – виробничий план $(3, -4)$. Чи можна гарантувати, що виробничий план a) $(-1, 2)$, b) $(-9, 4)$ не належить виробничій множині фірми?

10.9. Розв'язати задачу максимізації прибутку для однопродуктової фірми з виробничою функцією $f(z) = z^\alpha$.

10.10. Знайти функцію видатків виробництва $c(w, q)$ і функцію прибутків $\pi(p, w)$ для фірми з виробничою функцією Кобба-Дугласа $f(z_1, z_2) = z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

10.11. Знайти функцію видатків виробництва $c(w, q)$ і умовну відповідність попиту на фактори виробництва $z(w, q)$ для однопродуктової фірми з виробничою функцією:

(a) $f(z) = z_1 + z_2$;

(b) $f(z) = \min(z_1, z_2)$;

(c) $f(z) = \min(3z_1 + z_2, z_1 + 3z_2)$;

(d) $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$.

10.12. Фірма має таку умовну функцію попиту на фактори виробництва при $q = 1$:

$$z_1(w, 1) = 1 + 3w_1^{-1/2} w_2^a,$$
$$z_2(w, 1) = 1 + b w_1^{1/2} w_2^c.$$

Які значення повинні мати параметри a, b, c?

10.13. Фірма має виробничу функцію $f(z) = z_1 z_2$. Мінімальні видатки виробництва при $w_1 = w_2 = 1$ дорівнюють 4. Чому дорівнює випуск q?

10.14. Фірма має при $\bar{w}_l = 1, \forall l$ функцію видатків виробництва:

$$c(q) = c(\bar{w}, q) = \begin{cases} q^2 + 1, & q > 0, \\ 0, & q = 0. \end{cases}$$

Нехай p – це ціна товару випуску. Максимізуючи прибуток, який рівень випуску повинна мати фірма при $p = 2$ і при $p = 1$? Знайти функцію прибутку фірми.

10.15. Фірма має виробничу функцію $f(z) = \min\{2z_1 + z_2, z_3 + 2z_4\}$. Знайти функцію видатків виробництва.

10.16. (a) Однопродуктова фірма має виробничу функцію $f(z) = \min\{z_1, z_2\} + \min\{z_3, z_4\}$. Знайти вектор умовного попиту на фактори виробництва для виробництва однієї одиниці товару випуску при цінах на фактори виробництва $w = (1, 2, 3, 4)$. Знайти функцію видатків виробництва. Який тип віддачі від масштабу має це виробництво?

(b) Розв'язати задачу для виробничої функції $f(z) = \min\{z_1 + z_2, z_3 + z_4\}$.

Заняття № 11
Сукупна пропозиція. Ефективне виробництво. Лінійні моделі виробництва

Припустимо, що в економіці функціонує J фірм з виробничими множинами $Y_1, \dots, Y_J$ відповідно. Нехай кожна виробнича множина не порожня, замкнена і задовольняє умову вільного розміщення. Позначимо для кожної виробничої множини Y_j відповідну функцію прибутку через $\pi_j(p)$, а відповідність пропозиції через $y_j(p)$, $j = \overline{1, J}$.

Означення 11.1. Відповідністю сукупної пропозиції будемо називати відображення, яке кожному вектору цін p ставить у відповідність множину виробничих планів

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p) = \left\{ y \in \mathbb{R}^L \mid y = \sum_{j=1}^{J} y_j, y_j \in y_j(p), j = \overline{1, J} \right\}.$$

Для заданих виробничих множин $Y_1, \ldots, Y_J$ визначимо **агрегованy (сукупну) виробничу множину**

$$Y_\Sigma = \sum_{j=1}^{J} Y_j = \left\{ y \in \mathbb{R}^L \mid y = \sum_{j=1}^{J} y_j, y_j \in Y_j, j = \overline{1, J} \right\}.$$

Нехай $\pi^*(p)$ і $y^*(p)$ – це функція прибутку і відповідність пропозиції для агрегованої виробничої множини Y_Σ.

Теорема 11.1. Для всіх $p > 0$ маємо:

1. $\pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$;
2. $y^*(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$.

Означення 11.2. Виробничий план $y \in Y$ називається **ефективним** якщо не існує $y' \in Y$ такого, що $(y' \geq y) \wedge (y' \neq y)$.

Теорема 11.2. Якщо виробничий план $y \in Y$ максимізує прибуток при деяких цінах $p > 0$, то цей виробничий план y буде ефективним.

Теорема 11.3. Нехай виробнича множина Y замкнена, опукла і допускає вільне розміщення. Тоді кожен ефективний виробничий план буде максимізувати прибуток для деякого вектора цін $p \geq 0$.

Нехай задано M виробничих планів $a_1, \ldots, a_M \in \mathbb{R}^L$, які ми будемо називати **елементарними активностями**. **Лінійною моделлю виробництва** будемо називати виробничу множину виду

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L \quad y = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m a_m, (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \geq 0 \right\}.$$

Скаляр $\alpha_m \geq 0$ називають рівнем елементарної активності a_m. Будемо вважати, що активності розміщення l-го продукту

$d_l = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$, де -1 стоїть на l-му місці $l = \overline{1, L}$, завжди входять у виробничу множину Y.

Теорема 11.4. Для лінійної моделі виробництва Y кожен ефективний виробничий план $y \in Y$ буде максимізувати прибуток для деякого вектора цін $p > 0$.

Теорема 11.5. Для заданого вектора цін $p \in \mathbb{R}_+^L$ виробничий план, який дає максимальний скінчений прибуток, існує в лінійній моделі виробництва Y тоді і лише тоді, коли $p \cdot a_m \leq 0, \forall m = \overline{1, M}$.

Для **моделі Леонтьєва без можливості заміщення** роблять такі припущення:

1. Існує продукт, припустимо L-й, який не можливо випустити ні при якій активності. Будемо називати цей продукт **первинним фактором**.

2. Кожна елементарна активність $a_m = (a_{1m}, \ldots, a_{Lm})$ має щонайбільше один позитивний елемент.

3. Кожен продукт випуску може вироблятись лише при одній елементарні активності.

У моделі Леонтьєва без можливості заміщення елементарні активності будемо розглядати у вигляді $a_l = (a_{1l}, \ldots, a_{Ll})$, $l = \overline{1, L-1}$, де $a_{ll} = 1$, $a_{kl} \leq 0, \forall k \neq l$.

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \ldots & -a_{1,L-1} \\ -a_{21} & 0 & \ldots & -a_{2,L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{L-1,1} & -a_{L-1,2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

називається матрицею "витрати – випуск". Тут елемент $-a_{kl} \geq 0$ задає кількість k-го продукту необхідного для випуску одніїї одиниці l-го продукту.

Означення 11.3. Якщо $(I - A)\bar{\alpha} > 0$ для деякого вектора рівнів активності $\bar{\alpha} \geq 0$, тоді матриця "витрати – випуск" A називається **продуктивною**. Тут I – це одинична матриця.

Теорема 11.6. Якщо матриця "витрати – випуск" A є продуктивною, тоді для довільного вектора випущеної продукції $c \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ існує вектор рівнів активності $\alpha \geq 0$ такий, що $(I - A)\alpha = c$.

Якщо позначити через $b = (-a_{L,1}, \ldots, -a_{L,L-1})$ вектор, який задає кількість первинного фактору необхідного для виробництва одиниці кожного з $L-1$ товарів, які можуть вироблятись, тоді виробничу множину моделі Леонтьєва без можливості заміщення (при умові виконання умови вільного розміщення) можна подати у вигляді:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L | \ y \leq \begin{pmatrix} I - A \\ -b \end{pmatrix} \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}_+^{L-1} \right\}.$$

ЗАДАЧІ

11.1. Виробничі множини n фірм однакові і складаються із двох технологій $(0, 0)$ і $(-1, 1)$. Описати агреговану виробничу множину Y_Σ.

11.2. Виробничі множини n фірм однакові і задаються нерівностями

$$(y_{j1} + 1)^2 + (y_{j2} + 1)^2 \leq 2, \ j = \overline{1, n}.$$

Знайти нерівність, яка описує відповідну агреговану виробничу множину Y_Σ.

11.3. Виробничі множини n фірм однакові і задаються нерівностями

$$y_{j1} + y_{j2}^2 \leq 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Знайти нерівність, яка описує відповідну агреговану виробничу множину Y_Σ.

11.4. Нехай маємо J однопродуктових фірм, які випускають один і той же продукт, з виробничими функціями $f_j(z^j)$, $j = \overline{1, J}$. Показати, що виробнича функція $f_\Sigma(z)$ агрегованої фірми (з виробничою множиною Y_Σ) задається як значення задачі

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{J} f_j(z^j) \to \max\limits_{z^j}, \\ \sum\limits_{j=1}^{J} z^j = z \end{cases}$$

11.5. Для заданих виробничих функцій, $j = \overline{1, n}$, $\alpha_j > 0, \forall j$ знайти агреговану виробничу функцію $f_\Sigma(z)$:

(a) $f_j(z) = \alpha_j z$;

(b) $f_j(z) = \alpha_j \ln(1 + z)$;

(c) $f_j(z) = \alpha_j \sqrt{z}$;

(d) $f_j(z) = \alpha_j (1 - \exp\{-z\})$

11.6. Фірма має два заводи. Нехай вектор цін на фактори виробництва $\bar{w}$ – фіксований. Перший завод має виробництво з функцією видатків $c_1(q_1) = c_1(\bar{w}, q_1) = q_1^2$, а другий завод з функцією видатків $c_2(q_2) = c_2(\bar{w}, q_2) = q_2^2$. Яка функція видатків виробництва фірми?

11.7. Фірма має два заводи. Нехай вектор цін на фактори виробництва $\bar{w}$ – фіксований. Перший завод має виробництво з функцією видатків $c_1(q_1) = c_1(\bar{w}, q_1) = q_1^2/2$, а другий завод з функцією видатків $c_2(q_2) = c_2(\bar{w}, q_2) = q_2$. Яка функція видатків виробництва фірми?

11.8. Фірма має два заводи. Нехай вектор цін на фактори виробництва $\bar{w}$ – фіксований. Перший завод має виробництво з функцією видатків $c_1(q_1) = c_1(\bar{w}, q_1) = 4\sqrt{q_1}$, а другий завод з функцією видатків $c_2(q_2) = c_2(\bar{w}, q_2) = 2\sqrt{q_2}$. Яка функція видатків виробництва фірми?

11.9. Нехай маємо модель Леонтьєва без можливості заміщення. Припустимо, що матриця "витрати – випуск" A є продуктивною і що вектор значень первинного фактору b є строго додатнім.

(a) Показати, що для довільного $\alpha \geq 0$ виробничий план

$$y = \begin{pmatrix} I - A \\ -b \end{pmatrix} \alpha$$

є ефективним.

(b) Нехай ціна первинного фактору дорівнює одиниці: $p_L = 1$. Показати, що довільний виробничий план з рівнем активностей $\alpha > 0$ максимізує прибуток при єдиному векторі цін.

11.10. Розглянемо лінійну модель з елементарними активностями:

$$\begin{array}{l} a_1 = (1, \ -1, \ \ 0, \ \ 0), \\ a_2 = (0, \ -1, \ \ 1, \ \ 0), \\ a_3 = (0, \ \ 0, \ -1, \ \ 1), \\ a_4 = (2, \ \ 0, \ \ 0, \ -1). \end{array}$$

(a) Перевірити, які із наступних виробничих планів належать заданій виробничій множині:

$$\begin{array}{l} y_1 = (6, \ \ 0, \ 0, \ -2), \\ y_2 = (5, \ -3, \ 0, \ -1), \\ y_3 = (6, \ -3, \ 0, \ \ 0), \\ y_4 = (0, \ -4, \ 0, \ \ 4), \\ y_5 = (0, \ -3, \ 4, \ \ 0) \end{array}$$

(b) Виробничий план $y = (0, -5, 5, 0)$ є ефективний. Доведіть це, знайшовши вектор цін $p > 0$ для якого y буде максимізувати прибуток.

(c) Виробничий план $y = (1, -1, 0, 0)$ є технологічно можливим, але не є ефективним. Чому?

11.11. Лінійна модель виробництва задається елементарними активностями:

$$\begin{array}{rcrrrr}
a_1 & = & (-3, & -6, & 4, & 0), \\
a_2 & = & (-7, & -9, & 3, & 2), \\
a_3 & = & (-1, & -2, & 3, & -1), \\
a_4 & = & (-8, & -13, & 3, & 1), \\
a_5 & = & (-11, & -19, & 12, & 0), \\
a_6 & = & (-4, & -3, & -2, & 5), \\
a_7 & = & (-8, & -5, & 0, & 10), \\
a_8 & = & (-2, & -4, & 5, & -2),
\end{array}$$

(a) Перевірити, чи виконується для виробничої множини

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L \quad y = \sum_{m=1}^{8} \alpha_m a_m, (\alpha_1, \ldots, \alpha_8) \geq 0 \right\}$$

властивість “відсутності безкоштовних сніданків”.

(b) Перевірити, що Y не задовольняє умову вільного розміщення.

(c) Порівняйте елементарні активності a_1 з a_5, a_2 з a_4, a_3 з a_8, a_6 з a_7, і вкажіть не ефективні.

(d) Покажіть, що активності a_1 і a_2 не є ефективними, порівнявши їх з відповідними лінійними комбінаціями активностей a_3 і a_7.

(e) Знайдіть множину усіх ефективних виробничих планів у заданій лінійній моделі.

(f) Нехай початкові запаси чотирьох продуктів такі: $s_1 = 480$, $s_2 = 300$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$. Знайти на множині ефективних виробничих планів план, який максимізує випуск третього продукту.

Заняття № 12
Варіант модульної контрольної №2

1. Нехай маємо три товари. Товари 1 і 2 – це фактори виробництва, товар 3 – це товар випуску, кількість якого будемо позначати q. Товар випуску може бути вироблено за двома технологіями, які можна використовувати як окремо так і разом. Перша технологія використовує лише фактор виробництва 1, а друга – лише фактор виробництва 2. Нехай функція $\phi_i(q_i)$ задає мінімальну кількість фактору виробництва i достатню для виробництва q_i товару випуску, $i = 1, 2$. Функції $\phi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ строго зростають і $\phi_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Показати: якщо функції $\phi_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ є строго угнуті, тоді виробничий план, який мінімізує видатки виробництва не буде використовувати обидві технології разом.

2. Для виробничої функції $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{1/\rho}$, $\rho > 1$ розв'язати задачу мінімізації видатків виробництва.

3. Для виробничої функції $f(z) = z_1 z_2$ мінімальні видатки при цінах $w_1 = w_2 = 1$ дорівнюють 4. Чому дорівнює випуск?

4. Показати, що для одно-продуктової фірми з угнутою виробничою функцією $f(z)$ функція видатків $c(w, q)$ буде опуклою по q.

5. У моделі Лєонтьєва без можливості заміщення $L = 3$, $a_1 = (1, -1, -2)$, $a_2 = (-\beta, 1, -4)$, $\beta \geq 0$. Знайти необхідні і достатні умови того, що матриця A "витрати – випуск" буде продуктивною.

Заняття № 13
Вибір в умовах невизначеності. Аксіома незалежності. Функція корисності фон Неймана – Моргенштерна

Нехай задано скінчену множину результатів $C = \{1, 2, \ldots, N\}$. **Простою лотереєю** L будемо називати імовірнісний розподіл на множині C:

$$L = (p_1, \ldots, p_N),\ p_n \geq 0, \forall n,\ \sum_{n=1}^{N} p_n = 1.$$

p_n – це ймовірність n-го результату.

Для заданих простих лотерей $L_i = (p_1^i, \ldots, p_N^i)$, $i = \overline{1,k}$, ймовірностей $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, **складною лотереєю** $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ називається ризикова альтернатива яка приводить до простої лотереї L_i з ймовірністю α_i, $i = \overline{1,k}$.

Для заданої складної лотереї $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ визначено відповідну просту **зведену лотерею** $L = (p_1, \ldots, p_N)$, де $p_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_n^i$, $\forall n = \overline{1,N}$.

Позначимо через $\mathcal{L}$ множину простих лотерей над множиною результатів C. Нехай на $\mathcal{L}$ задано раціональне відношення переваги $\succsim$.

Означення 13.1. Відношення переваги $\succsim$ на множині простих лотерей $\mathcal{L}$ є **неперервним**, якщо для $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ множини $\{\alpha \in [0,1] :\ \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\}$, $\{\alpha \in [0,1] :\ L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\}$ замкнені.

Означення 13.2. Відношення переваги $\succsim$ на множині простих лотерей $\mathcal{L}$ задовольняє **аксіому незалежності**, якщо для $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ і $\forall \alpha \in (0,1)$ маємо

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \left(\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''\right).$$

Означення 13.3. Функція корисності $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ має форму середньої корисності (називається **функцією корисності фон Неймана – Моргенштерна**), якщо існують дійсні числа $u_n, n = \overline{1,N}$, n-му результату із множини C відповідає єдине число $u_n, n = \overline{1,N}$ так, що

$$\forall L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L} : \; U(L) = \sum_{n=1}^{N} u_n p_n.$$

Теорема 13.1. Функція корисності $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ має форму середньої корисності тоді і лише тоді, коли $\forall k \in \mathbb{N}, \forall L_1, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$, $\forall \alpha_i \geq 0, i = \overline{1,k}$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$

$$U\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i L_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U(L_i).$$

Теорема 13.2. Нехай $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ – це функція корисності фон Неймана – Моргенштерна, що зображає відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$. Функція $\tilde{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ буде функцією корисності фон Неймана – Моргенштерна, що зображає відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ тоді і лише тоді, коли існують такі дійсні числа $\beta > 0$ і γ, що $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$, $\forall L \in \mathcal{L}$.

Теорема 13.3. (Про існування функції корисності у формі середньої корисності). Нехай раціональне відношення переваги $\succsim$ на просторі простих лотерей $\mathcal{L}$ задовольняє умову неперервності і аксіому незалежності. Тоді існує відповідна функція корисності, яка має форму середньої корисності.

ЗАДАЧІ

13.1. Якщо відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ задовольняє аксіому незалежності, тоді для всіх $\alpha \in (0,1)$ і $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ маємо

$$L \succ L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

і

$$L \sim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

13.2. Довести: якщо відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ зображається функцією корисності фон Неймана – Моргенштерна $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, тоді відношення переваги $\succsim$ задовольняє аксіому незалежності.

13.3. Довести: якщо множина можливих результатів C – скінчена, а раціональне відношення переваги $\succsim$ на $\mathcal{L}$ задовольняє аксіому незалежності, тоді

$$\exists \overline{L} \in \mathcal{L}, \exists \underline{L} \in \mathcal{L} : \quad \overline{L} \succsim L \succsim \underline{L}, \ \forall L \in \mathcal{L}.$$

13.4. Нехай відношення переваги $\succsim$ на множині простих лотерей $\mathcal{L}$ є раціональне, неперервне і задовольняє аксіому незалежності. Показати: якщо $(L' \succ L'') \wedge (L' \succsim L \succsim L'')$ тоді існує єдине число $\alpha \in [0,1]$, таке що $L \sim \alpha L' + (1 - \alpha)L''$.

13.5. Нехай маємо три можливі грошові призи $C = \{2500000\$, 500000\$, 0\$\}$. Приймаючий рішення робить вибір між лотереями $L_1 = (0,1,0)$ і $L_1' = (0.1, 0.89, 0.01)$ та лотереями $L_2 = (0, 0.11, 0.89)$ $L_2' = (0.1, 0, 0.9)$. Нехай $L_1 \succ L_1'$ і $L_1' \succ L_2$. Показати, що такий вибір суперечить існуванню функції корисності фон Неймана – Моргенштерна, яка зображає це відношення переваги.

13.6. Припустимо, що деяка агенція з надзвичайних ситуацій хоче вибрати критерій, за яким буде відбуватись евакуація населення з території можливого затоплення. Ймовірність затоплення дорівнює 0.01. Можливі чотири результати:

(**A**) Евакуація не потрібна, і не проводилась.

(**B**) Евакуацію провели, але вона була не потрібна.

(**C**) Евакуацію провели і вона була потрібна.

(**D**) Евакуацію не провели, але вона була потрібна.

Припустимо для агенції напевний результат **B** пов'язаний відношенням байдужості з лотереєю, у якій результат **A** має ймовірність p, а результат **D** має ймовірність $1-p$. Крім того напевний результат **C** пов'язаний відношенням байдужості з лотереєю, у якій результат **B** має ймовірність q, а результат **D** має ймовірність $1-q$. Припустимо, що результат **A** строго переважає результат **D**. Нехай виконуються умови теореми про існування функції корисності у формі середньої корисності.

(a) Побудувати функцію корисності у формі середньої корисності.

(b) Розглянемо два критерії:
Критерій 1: Результатом цього критерію є евакуація у 90% випадків, коли відбулось затоплення, і необов'язкова евакуація у 10% випадків, коли затоплення не було.
Критерій 2: Результатом цього критерію є евакуація у 95% випадків, коли відбулось затоплення, і необов'язкова евакуація у 5% випадків, коли затоплення не було.

Знайти розподіли ймовірностей на множині результатів, які породжені цими критеріями. Використавши побудовану функцію корисності, порівняти вказані критерії.

13.7. Розглянемо **аксіому еквівалентності проміжних значень**:

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in (0,1): \ L \sim L' \Rightarrow \lambda L + (1-\lambda)L'.$$

(a) Показати: якщо відношення переваги на множині простих лотерей задовольняє аксіомі незалежності, то воно задовольняє і аксіому еквівалентності проміжних значень.

(b) Нехай маємо три можливих результати: $C = \{1, 2, 3\}$. Розглянемо представлення множини простих лотерей, як множину точок $L = (p_1, p_2, p_3)$ рівностороннього трикутника з одиничною висотою, де $p_i, i = 1, 2, 3$ – це віддаль від точки L до сторони трикутника, протилежної вершині, яка відповідає результату i, $i = 1, 2, 3$. Показати: якщо відношення переваги на $\mathcal{L}$ задовольняє умову неперервності і аксіому еквівалентності проміжних значень, тоді лінії байдужості для заданого відношення переваги є прямі лінії. Покажіть справедливість оберненого твердження: якщо лінії байдужості є прямі, то відповідне відношення переваги задовольняє аксіому еквівалентності проміжних значень. Чи обов'язково ці прямі лінії будуть паралельними?

13.8. Розглянемо лотереї

$$\begin{aligned} L:&\ P\{X = 200\$\} = 0.7, P\{X = 0\$\} = 0.3,\\ L':&\ P\{X = 1200\$\} = 0.1, P\{X = 0\$\} = 0.9. \end{aligned}$$

Нехай $x_L \sim L, x_{L'} \sim L'$, де $x_L, x_{L'}$ – це суми грошей, які ми одержуємо з ймовірністю одиниця. Показати: якщо відповідне відношення переваги є транзитивне і монотонне, то

$$L \succ L' \Leftrightarrow x_L > x_{L'}.$$

13.9. В урні знаходиться 300 куль: 100 куль червоні, а інші 200 або сині або зелені. Навмання виймається куля і розглядаються лотереї:

L_1: Ви одержуєте 1000$ якщо куля червона.

L_2: Ви одержуєте 1000$ якщо куля синя.

L_3: Ви одержуєте 1000$ якщо куля не червона.

L_4: Ви одержуєте 1000\$ якщо куля не синя.

Порівняйте лотереї L_1 і L_2, L_3 і L_4. Покажіть: якщо $L_1 \succ L_2$ і $L_3 \succ L_4$, то такий вибір суперечить властивостям ймовірності.

13.10. Нехай монета з ймовірністю p падає гербом. В лотереї ви одержуєте 2^j\$, якщо вперше герб випав при j-ому підкиданні.

(a) Який середній виграш цієї лотереї при $p = 1/2$?

(b) Нехай корисність виграшу $u(x) = \ln x$. Знайти середню корисність заданої лотереї.

(c) Нехай c – це сума грошей, яка еквівалентна заданій лотереї. Знайдіть c.

Заняття № 14
Несхильність до ризику та її вимірювання.

Нехай можливі результати рішень виражені у грошових одиницях. При цьому будемо вважати, що сума грошей $x \in [a, +\infty)$, $a \geq 0$ змінюється неперервно. Простою лотереєю F будемо називати функцію розподілу $F : [a, +\infty) \to [0, 1]$, а множину всіх простих лотерей позначимо через $\mathcal{L}$. Нехай на множині $\mathcal{L}$ задано раціональне відношення переваги $\succsim$.

Означення 14.1. Функція корисності $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ називається **функцією корисності фон Неймана – Моргенштерна (має форму середньої корисності)** якщо

$$U(F) = \int_a^{+\infty} u(x) dF(x), \ \forall F \in \mathcal{L},$$

де строго зростаюча, обмежена, неперервна функція $u(x), x \in [a, +\infty)$ називається **функцією корисності грошей (функцією корисності Бернуллі)**.

Означення 14.2. Приймаючий рішення є **несхильним до ризику**, якщо $\forall F \in \mathcal{L}: \ \bar{F} \succsim F$, де $\bar{F}$ – це функція розподілу, яка відповідає виродженому розподілу $P\left\{X = \int_a^{+\infty} x dF(x)\right\} = 1$. Якщо $\bar{F} \sim F, \forall F \in \mathcal{L}$, тоді приймаючий рішення є **нейтральним до ризику**. Якщо $\bar{F} \sim F \Leftrightarrow F = \bar{F}$, тоді приймаючий рішення є **строго несхильним до ризику**.

Означення 14.3. Нехай $u(x)$ – це функція корисності Бернуллі. **Напевний еквівалент** лотереї $F \in \mathcal{L}$ – це такий капітал $c(F,u)$, що

$$u(c(F,u)) = U(F) = \int_a^{+\infty} u(x) dF(x).$$

Означення 14.4. Для довільної фіксованої суми грошей $x \in [a, +\infty)$ і $\varepsilon > 0$ **імовірнісною премією** називають таку дійсну величину $\pi(x, \varepsilon, u)$, що

$$u(x) = \left(\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right) u(x+\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right) u(x-\varepsilon).$$

Теорема 14.1. Нехай на $\mathcal{L}$ задано функцію корисності фон Неймана – Моргенштерна з функцією корисності Бернуллі $u(x)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1. Приймаючий рішення з заданою функцією Бернуллі $u(x)$ є несхильним до ризику.

2. Функція корисності Бернуллі $u(x)$ – угнута (опукла вгору).

3. $c(F,u) \leq \int_a^{+\infty} x dF(x)$, $\forall F \in \mathcal{L}$.

4. $\pi(x,\varepsilon,u) \geq 0$, $\forall x \in [a, +\infty), \varepsilon > 0$.

Означення 14.5. Для заданої двічі диференційовної функції корисності грошей $u(x)$ **коефіцієнтом Ерроу – Пратта абсолютної несхильності до ризику** називається величина

$$r_A(x,u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

ЗАДАЧІ

14.1. Приймаючий рішення має функцію корисності фон Неймана – Моргенштерна. Лотерея F_1 : $P\{X = 3\$\} = P\{X = 5\$\} = 1/2$ і лотерея F_2 : $P\{X = 3\$\} = 2/3$, $P\{X = 9\$\} = 1/3$ для нього еквівалентні. Чи може бути, що приймаючий рішення

(a) є строго несхильним до ризику,

(b) є нейтральним до ризику,

(c) є строго схильним до ризику?

14.2. Нехай приймаючий рішення з функцією корисності грошей $u(x) = \sqrt{x}$ має капітал 9\$. Лотерея F має вигляд: $P\{X = 0\$\} = P\{X = 7\$\} = 1/2$.

(a) За яку максимальну ціну приймаючий рішення купить лотерею F?

(b) За яку мінімальну ціну приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її організує за рахунок свого початкового капіталу?

(c) За яку мінімальну ціну приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її уже має?

14.3. Приймаючий рішення несхильний до ризику з функцією грошей $u(x)$ має капітал W. Лотерея F має вигляд: $P\{X = G\} = p$, $P\{X = B\} = 1 - p$.

(a) За яку максимальну ціну приймаючий рішення купить лотерею F?

(b) За яку мінімальну ціну приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її уже має?

(c) Показати, що при сталому коефіцієнті абсолютної несхильності до ризику ціна купівлі і продажу лотереї F буде однакова.

14.4. Розглянемо таку гру: якщо гравець вибирає число a, то одержує додатково до свого капіталу w суму грошей a з ймовірністю $1/3$ і $-a$ з ймовірністю $2/3$. Яке число вибере гравець з функцією корисності грошей $u(x)$?

$(a)\ u(x) = \sqrt{x}$; $(b)\ u(x) = -e^{-\alpha x}$;
$(c)\ u(x) = -1/x$; $(d)\ u(x) = \ln x$;
$(e)\ u(x) = \alpha x - \beta x^2$; $(f)\ u(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta x$.

14.5. Нехай приймаючий рішення з функцією корисності грошей $u(x) = \sqrt{x}$ має капітал 100\$. Лотерея F має вигляд: $P\{X = 0\$\} = \pi$, $P\{X = 20\$\} = 1 - \pi$. Ціна лотереї 5\$. При яких значеннях ймовірності π приймаючий рішення

(a) купить лотерею F?

(b) продасть лотерею F, якщо він її організує за рахунок свого початкового капіталу?

(c) продасть лотерею F, якщо він її уже має?

14.6. Строго несхильний до ризику інвестор з неперервно диференційовною функцією корисності грошей $u(x)$ має капітал W і з ймовірністю p може втратити капітал D. Пропонується страховий поліс ціною q, який відшкодовує 1 у випадку втрат. Показати: якщо $q > p$, то інвестор не буде страхувати всю можливу втрату D.

14.7. а) Розглянемо функцію $u(x) = \beta x^2 + \gamma x$. При яких умовах цю функцію можна розглядати як функцію корисності Бернуллі несхильного до ризику приймаючого рішення? Показати, що при такій функції корисності Бернуллі корисність лотереї F визначається її математичним сподіванням $m(F)$ і дисперсією $D(F)$.

b) Нехай функція корисності фон Неймана – Моргенштерна має вигляд $U(F) = m(F) - rD(F)$, $r > 0$. Показати, що ця функція корисності не має форму середньої корисності. Для цього навести приклад лотерей $F: \; P\{X = x''\} = p$, $P\{X = x'\} = 1 - p$, $F': \; P\{X = x''\} = p'$, $P\{X = x'\} = 1 - p'$, де $x'' > x', p' > p$ але $U(F') > U(F)$.

14.8. Розглянемо споживача з початковим капіталом W і можливістю споживання в кінці кожного з двох періодів часу. Нехай $C_i, i = 1, 2$ – це капітал використаний на споживання в кінці i-го періоду, а корисність задається функцією $U(C_1, C_2) = u(C_1) + v(C_2)$, де $u(c), v(c)$ – зростаючі, угнуті і диференційовні функції. Позначимо через x заощадження за перший період, тоді $C_1 = W - x$, $C_2 = x$. Нехай

$$\max_x [u(W - x) + v(x)] = u(W - x_0) + v(x_0).$$

Розглянемо тепер іншу модель споживання: якщо споживач заощадив x на першому етапі, то його капітал для споживання на другому етапі дорівнює $x + Y$, де Y – це випадкова величина. Нехай

$$\max_x [u(W - x) + E[v(x + Y)]] = u(W - x^*) + E[v(x^* + Y)].$$

Показати: якщо $0 < x_0 < W$ і $E[v'(x_0 + Y)] > v'(x_0)$, тоді $x^* > x_0$.

14.9. Розглянемо два активи: безризиковий вартістю 1 гр.од., який дає 1 гр.од. доходу, і ризиковий вартістю 1 гр.од., який дає дохід a гр.од. з ймовірністю π, і дає дохід b гр.од. з ймовірністю $1 - \pi$. Капітал інвестора дорівнює 1 гр.од., портфель інвестора позначимо (x_1, x_2), $x_1 +$

$x_2 = 1$, $x_1, x_2 \in [0,1]$, де x_1 – це інвестиція у безризиковий актив, а x_2 – це інвестиція у ризиковий актив. Нехай інвестор має угнуту функцію корисності Бернуллі, а (x_1^*, x_2^*) – це оптимальний портфель, який максимізує середню корисність доходу.

(a) У термінах тільки a, b знайти прості необхідні умови того, що $x_1^* > 0$.

(b) У термінах тільки a, b і π знайти прості необхідні умови того, що $x_2^* > 0$.

(c) Нехай $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, $a < 1$ і функція корисності Бернуллі диференційовна. Покажіть, що $dx_1^*/da \leq 0$.

(d) Нехай $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, $a < 1$ і функція корисності Бернуллі диференційовна. Який знак має $dx_1^*/d\pi$?

14.10. Нехай фірма є нейтральною до ризику відносно прибутків. Перед фірмою стоять дві альтернативи. При першій альтернативі ціни є випадковими. При другій альтернативі вектор цін є невипадковим і дорівнює вектору середніх значень цін із першої альтернативи. Покажіть, що фірма яка максимізує середні прибутки віддасть перевагу першій альтернативі.

14.11. Розглянемо лотерею $F:\ P\{X = x+\varepsilon\} = P\{X = x-\varepsilon\} = 1/2$. Показати, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} c(F, u) = -r_A(x, u).$$

14.12. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z = 2) = P(Z = 10) = 1/2$, а безризиковий - β. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x) = \ln x$. В яких межах лежить β?

14.13. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z=4)=\beta, P(Z=1)=1-\beta$, а без ризиковий - 2. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x)=\ln x$. В яких межах лежить β?

14.14. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z=4)=1/4, P(Z=\beta)=3/4$, а без ризиковий - 1. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x)=\ln x$. В яких межах лежить β?

14.15. Показати, що $4\pi'_\varepsilon(x,\varepsilon,u)|_{\varepsilon=0}=r_A(x,u)$.

14.16. Судновласник має функцію корисності грошей $u(x)$ з додатною спадною похідною. Капітал судновласника - 40000\$ і він може втратити у випадку аварії судна 10000\$.

(a) Нехай ймовірність аварії - 0.02 і відомо, що він застрахувався на суму 9000\$. Чи буде ціна страхування 1\$ більшою або меншою за 0.02\$? Застраховану суму він вибирає максимізуючи середню корисність капіталу.

(b) Нехай ціна страхування 1\$ дорівнює 0.02\$ і відомо, що він застрахувався на суму 11000\$. Чи буде ймовірність аварії більшою або меншою за 0.02? Застраховану суму він вибирає максимізуючи середню корисність капіталу.

(c) Нехай ймовірність аварії - 0.01 і відомо, що ціна страхування 1\$ дорівнює 0.02\$. Чи застрахує судновласник суму більшу або меншу за 10000\$? Застраховану суму він вибирає максимізуючи середню корисність капіталу.

14.17. Нехай R_1 і R_2 – це випадкова доходність кожного з двох активів. Припустимо, що R_1 і R_2 незалежні і однаково розподілені. Покажіть, що інвестор, який максимізує середню корисність доходу, розділить інвестиції між обома активами якщо він є несхильним до ризику, і вкладе весь інвестиційний капітал у один із активів, якщо він є схильним до ризику.

Заняття № 15
Порівняння рівня несхильності до ризику різних приймаючих рішення та зміна рівня несхильності до ризику із зміною капіталу.

Розглянемо двох приймаючих рішення несхильних до ризику з функціями корисності Бернуллі $u_1(x)$ і $u_2(x)$ відповідно.

Теорема 15.1. Наступні твердження стосовно більшої несхильності до ризику другого приймаючого рішення порівняно з першим є еквівалентними:

1. $r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1), \forall x.$
2. Існує зростаюча, угнута функція $\psi(\cdot)$ така, що $u_2(x) = \psi(u_1(x))$, $\forall x$.
3. $c(F, u_2) \leq c(F, u_1), \forall F \in \mathcal{L}.$
4. $\pi(x, \varepsilon, u_2) \geq \pi(x, \varepsilon, u_1), \forall x, \forall \varepsilon > 0.$
5. $\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x}) \Rightarrow \int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x})$, $\forall F \in \mathcal{L}, \forall \bar{x}.$

Означення 15.1. Функція корисності грошей Бернуллі $u(x)$ виражає спадання абсолютної несхильності до ризику, якщо відповідний коефіцієнт Ерроу – Пратта $r_A(x, u)$ є спадною функцією x.

Теорема 15.2. Наступні твердження еквівалентні:

1. Функція корисності грошей Бернуллі $u(x)$ виражає спадання абсолютної несхильності до ризику.

2. Нехай $x_1 > x_2$, тоді існує зростаюча, угнута функція $\psi(\cdot)$ така, що $u(z + x_2) = \psi\left(u(z + x_1)\right)$, $\forall z$.

3. Нехай для $\forall F(z) \in \mathcal{L}$ маємо: $u(c_x) = \int u(x + z)dF(z)$. Тоді функція $x - c_x$ є спадною.

4. $\pi(x, \varepsilon, u)$ спадає по x.

5. Нехай $x_1 > x_2$, тоді $\forall F(z) \in \mathcal{L}$: $\int u(x_2 + z)dF(z) \geq u(x_2) \Rightarrow \int u(x_1 + z)dF(z) \geq u(x_1)$.

Означення 15.2. Для заданої функції корисності грошей Бернуллі $u(x)$ **коефіцієнтом відносної несхильності до ризику** при капіталі x називається величина

$$r_R(x, u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Означення 15.3. Функція корисності грошей Бернуллі $u(x)$ виражає спадання (не зростання) відносної несхильності до ризику, якщо відповідний коефіцієнт відносної несхильності до ризику $r_R(x, u)$ є спадною (не зростаючою) функцією x.

Теорема 15.3. Наступні твердження еквівалентні:

1. Функція корисності грошей Бернуллі $u(x)$ виражає спадання відносної несхильності до ризику.

2. Нехай $x_1 > x_2$, тоді існує зростаюча, угнута функція $\psi(\cdot)$ така, що $u(tx_2) = \psi\left(u(tx_1)\right)$, $\forall t > 0$.

3. Нехай для $\forall F(t) \in \mathcal{L}, t > 0$ маємо:

$$u(\bar{c}_x) = \int_{(0,+\infty)} u(tx)dF(t).$$

   Тоді функція $x/\bar{c}_x$ є спадною.

ЗАДАЧІ

15.1. Нехай функція корисності грошей Бернуллі $u(x)$ інвестора виражає спадання абсолютної несхильності до ризику. Розглядається модель інвестування: (α, β), $\alpha+\beta = w$, де w – це інвестиційний капітал, α – це доля інвестицій у ризиковий актив, який дає Z гр.од. доходу на 1 гр.од. інвестицій, Z – випадкова величина з функцією розподілу $F(z)$ і $\int z dF(z) > 1$, β – це доля інвестицій у безризиковий актив, який дає 1 гр.од. доходу на 1 гр.од. інвестицій. Показати, що при зростанні інвестиційного капіталу w буде зростати доля інвестицій у ризиковий актив.

15.2. Нехай споживання відбувається у два етапи, і на першому етапі споживач має капітал w. Позначимо через $c_i, i = 1, 2$ рівень споживання на першому і відповідно на другому етапі. Рівень корисності споживання задається функцією $u(c_1, c_2) = u(c_1) + v(c_2)$, де функції $u(x), v(x)$ строго зростають, угнуті і диференційовні. Нехай x – це заощадження споживача за перший період, тоді $c_1 = w - x, c_2 = x$. Позначимо через x_0 оптимальне значення x у задачі

$$\max_x [u(w - x) + v(x)].$$

Введемо невизначеність у дану економіку. Якщо споживач заощадив x на першому етапі, то його капітал на другому етапі задається величиною $x + y$, де y – це випадкова величина. Нехай x^* – це розв'язок задачі

$$\max_x [u(w - x) + E[v(x + y)]].$$

(a) Нехай $0 < x_0 < w$. Показати: якщо $E[v'(x_0 + y)] > v'(x_0)$, тоді $x^* > x_0$.

(b) Визначимо **коефіцієнт абсолютної розсудливості** для функції корисності грошей $v(\cdot)$ при рівні капіталу x так: $p(x,v) = -v'''(x)/v''(x)$. Показати: якщо $p(x,v_1) \le p(x,v_2), \forall x$, тоді із $E[v_1'(x_0+y)] > v_1'(x_0)$ випливає $E[v_2'(x_0+y)] > v_2'(x_0)$.

(c) Показати: якщо $v'''(x) > 0, \forall x$, і $E[y] = 0$, тоді $E[v'(x+y)] > v'(x), \forall x$.

(d) Показати: якщо функція корисності грошей $v(x)$ відображає спадання абсолютної несхильності до ризику, тоді $p(x,v) > r_A(x,v), \forall x$.

15.3. Нехай в умовах задачі **15.1** $r_R(x,u)$ зростає по x. Покажіть, що тоді $\gamma = \alpha/x$ спадає по x. Аналогічно, якщо $r_R(x,u)$ спадає по x, тоді $\gamma = \alpha/x$ зростає по x.

15.4. Нехай $u: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – це строго зростаюча функція корисності грошей Бернуллі. Показати, що

(a) $r_R(x,u) = \rho, \rho \ne 1, \forall x \Leftrightarrow u(x) = \beta x^{1-\rho} + \gamma$, $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$.

(b) $r_R(x,u) = 1, \forall x \Leftrightarrow u(x) = \beta \ln x + \gamma, \beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$.

15.5. Нехай функції корисності грошей $u^*(x)$ і $u(x)$ зростають, угнуті і диференційовні, $x \in [0,r]$. Будемо говорити, що функція корисності грошей $u^*(x)$ виражає строго більшу несхильність до ризику ніж функція корисності грошей $u(x)$ тоді і тільки тоді, коли існують стала $k > 0$ і незростаюча, угнута функція $v(\cdot)$ такі що $u^*(x) = ku(x)+v(x)$.

(a) Показати: якщо $u^*(x)$ виражає строго більшу несхильність до ризику ніж функція корисності грошей $u(x)$, тоді $r_A(x,u^*) \ge r_A(x,u)$.

(b) Показати: якщо $x \in [0,+\infty)$ і функція $u(\cdot)$ обмежена, тоді $u^*(x) = ku(x) + c$, $c = const$ – це єдина функція корисності грошей яка виражає строго більшу несхильність до ризику ніж функція корисності грошей $u(x)$.

15.6. Припустимо, що приймаючий рішення має справу з двоперіодною задачею інвестування. У момент часу $t = 0, 1$ його капітал w_t потрібно розподілити між безпечним активом з доходом R від 1 гр.од. інвестицій і ризиковим активом з випадковим доходом x від 1 гр.од. інвестицій. Нехай α_t – це доля інвестицій у ризиковий актив у момент $t = 0, 1$, а x_t, $t = 1, 2$ – це доход від ризикового активу. Капітал w_t у моменти часу $t = 1, 2$ формується так

$$w_t = [(1 - \alpha_{t-1})R + \alpha_t x_t]w_{t-1}.$$

Метою приймаючого рішення є максимізація середньої корисності кінцевого капіталу w_2. Припустимо, що випадкові величини x_1 і x_2 незалежні і однаково розподілені. Доведіть, що оптимальним вибором буде $\alpha_0 = \alpha_1$, якщо функція корисності грошей інвестора виражає сталу відносну несхильність до ризику рівну $0 < \rho < 1$. Покажіть, що цей вибір буде не оптимальним при сталій абсолютній несхильності до ризику.

15.7. Нехай функція корисності грошей інвестора має вигляд $u(x) = -\exp\{-\gamma x\}$, $(\gamma > 0)$. Свій капітал W інвестор ділить між безризиковим активом із доходністю R і ризиковим активом із випадковою доходністю Z. Доходність – це дохід на одну грошову одиницю інвестування. Можна брати кредит на довільну суму під відсоток R. Інвестор максимізує середню корисність доходу. Доведіть, що при будь-якій величині капіталу W інвестор вкладе у ризиковий актив однакову суму грошей.

15.8. Нехай функція корисності грошей інвестора має вигляд $u(x) = x^\gamma$, $(0 < \gamma < 1)$, або $u(x) = -x^{-\gamma}$, $(\gamma > 0)$, або $u(x) = \ln x$. Свій капітал W інвестор ділить між безризиковим активом із доходністю R і ризиковим активом із випадковою доходністю Z. Інвестор максимізує середню корисність доходу. Доведіть, що при будь-якій величині капіталу W інвестор вкладе у ризиковий актив однакову частку капіталу.

15.9. Нехай інвестор може вкладати гроші лише у ризиковий і безризиковий активи. Як змінюється величина інвестицій у ризиковий актив при зростанні інвестиційного капіталу, якщо функція корисності грошей інвестора $u(x)$ має вигляд:

$$(a)\ u(x) = \sqrt{x}; \quad (b)\ u(x) = -\exp\{-ax\}, a > 0;$$
$$(c)\ u(x) = -x^{-1}; \quad (d)\ u(x) = \ln x.$$

15.10. Доведіть, що якщо функція корисності грошей $u(x)$ має похідні до третього порядку включно і виражає спадання абсолютної несхильності до ризику, то $u'''(x) \geq 0$. Покажіть, що обернене твердження невірне.

15.11. Наведіть приклади функції корисності грошей, яка виражає спадання, зростання або сталість абсолютної і відносної несхильності до ризику.

15.12. Нехай функція корисності грошей інвестора $u(x)$ виражає зростання абсолютної несхильності до ризику. Свій капітал W інвестор ділить між безризиковим активом із доходністю R і ризиковим активом із випадковою доходністю Z. Інвестор максимізує середню корисність доходу. Нехай $\alpha(R)$ – це оптимальна частка капіталу інвестована у ризиковий актив і $0 < \alpha(R) < 1$. Покажіть, що при цих умовах $d\alpha(R)/dR < 0$, тобто зростання доходності безризикового активу приводить до зменшення частки інвестицій у ризиковий актив.

Заняття № 16
Стохастичне домінування.

Будемо розглядати розподіли на множині капіталів, які зосереджені на проміжку $[0, a]$. Позначимо множину відповідних функцій розподілу через $\mathcal{L}$.

Означення 16.1. Будемо говорити, що функція розподілу $F(x)$ є **стохастичною домінантою першого порядку** для функції розподілу $G(x)$ якщо для довільної неспадної функції $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ маємо

$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x).$$

Теорема 16.1. Функція розподілу $F(x)$ є **стохастичною домінантою першого порядку** для функції розподілу $G(x)$ тоді і лише тоді, коли $F(x) \leq G(x)$, $\forall x \in [0, a]$.

Нехай випадкова величина ξ має функцію розподілу $F(x)$, а випадкова величина η має функцію розподілу $G(x)$ і функція розподілу $F(x)$ є стохастичною домінантою першого порядку для функції розподілу $G(x)$, тоді будемо писати $\xi \geq_{st1} \eta$. Запис $\xi =_{st1} \eta$ означає, що випадкові величини однаково розподілені.

Означення 16.2. Для $F(x), G(x) \in \mathcal{L}$ таких, що $\int_0^a x dF(x) = \int_0^a x dG(x)$ функція розподілу $F(x)$ є **стохастичною домінантою другого порядку** для функції розподілу $G(x)$ якщо для довільної неспадної угнутої функції $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ маємо

$$\int_0^a u(x)dF(x) \geq \int_0^a u(x)dG(x).$$

Теорема 16.2. Функція розподілу $F(x)$ є стохастичною домінантою другого порядку для функції розподілу $G(x)$ тоді і лише тоді, коли

$$\int_0^x F(y)\,dy \le \int_0^x G(y)\,dy,\ \forall x \in [0,a].$$

Нехай випадкова величина ξ має функцію розподілу $F(x)$, а випадкова величина η має функцію розподілу $G(x)$ і функція розподілу $F(x)$ є стохастичною домінантою другого порядку для функції розподілу $G(x)$, тоді будемо писати $\xi \geq_{st2} \eta$.

Нехай ξ – це невід'ємна випадкова величина з абсолютно неперевною функцією розподілу $F(t)$, тоді **інтенсивністю ризику** для ξ в момент часу $t \geq 0$ називається величина

$$r(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{P\{t \le \xi < t + \Delta t/\xi \ge t\}}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

де $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ – це **функція виживання**, а $f(t) = dF(t)/dt$ – це щільність розподілу випадкової величини ξ.

Означення 16.3. Нехай ξ і η – це невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу $F(t)$, $G(t)$ та інтенсивностями ризику $r(t)$, $q(t)$ відповідно. Якщо $r(t) \le q(t)$, $\forall t \ge 0$, тоді $\eta \le_{hr} \xi$, тобто η є меншою за ξ відносно порядку інтенсивності ризику.

ЗАДАЧІ

16.1. Якщо функція розподілу $F(x)$ є стохастичною домінантою першого порядку для функції розподілу $G(x)$ то $\int_0^a x\,dF(x) \ge \int_0^a x\,dG(x)$. Навести приклад, коли $\int_0^a x\,dF(x) \ge \int_0^a x\,dG(x)$ але функція розподілу $F(x)$ не є стохастичною домінантою першого порядку для функції розподілу $G(x)$.

16.2. Нехай випадкові величини ξ і η мають неперервні функції розподілу $F(x)$ і $G(x)$ відповідно. Випадкові величини ξ і η задовольняють умову $\xi \geq_{st1} \eta$ якщо існують дві випадкові величини $\tilde{\xi}$ і $\tilde{\eta}$, визначені на одному і тому ж ймовірнісному просторі, такі що розподіл ξ співпадає з розподілом $\tilde{\xi}$, розподіл η співпадає з розподілом $\tilde{\eta}$ і $P(\tilde{\xi} \geq \tilde{\eta}) = 1$. (**Вказівка**. При доведенні необхідності розгляньте випадкові величини $\tilde{\xi} = F^{-1}(\zeta)$ і $\tilde{\eta} = G^{-1}(\zeta)$, де $F^{-1}(x)$ і $G^{-1}(x)$ – це функції обернені до $F(x)$ і $G(x)$ відповідно, а випадкова величина ζ має рівномірний розподіл на $[0, 1]$.)

16.3. Якщо $\xi \geq_{st1} \eta$ і неперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго зростає (спадає), тоді $g(\xi) \geq_{st1} g(\eta)$ $(g(\eta) \geq_{st1} g(\xi))$.

16.4. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq_{st1} \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

16.5. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Якщо функція $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ строго зростає по кожному аргументу x_i, $i = 1, \ldots, n$, тоді

$$\phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geq_{st1} \phi(\eta_1, \ldots, \eta_n).$$

16.6. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, \ldots, n$, тоді

$$\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq_{st1} \max\{\eta_1, \ldots, \eta_n\},$$
$$\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \geq_{st1} \min\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}.$$

16.7. Нехай випадкові величини ξ і η мають неперервні функції розподілу. Якщо $\xi \geq_{st1} \eta$ і $E[\xi] = E[\eta]$, тоді $\xi =_{st1} \eta$.

16.8. Якщо ξ і η – це невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу і $\xi \geq_{hr} \eta$, тоді $\xi \geq_{st1} \eta$.

16.9. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ – незалежні невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу, $\eta_1, \dots, \eta_n$ – незалежні невід'ємні випадкові величини з абсолютно неперервними функціями розподілу і $\xi_i \geq_{hr} \eta_i$, $i = 1, \dots, n$, тоді $\min\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \geq_{hr} \min\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$.

16.10. Говорять, що функція розподілу $G(x)$, $x \in [0, a]$ є елементарним зростанням ризику для функції розподілу $F(x)$, $x \in [0, a]$ якщо для деяких $0 < x' < x'' < a$ маємо $G(x) = F(x), \forall x \in [0, x'] \cup (x'', a]$, $F(x'' + 0) - F(x') = G(x' + 0) - G(x') + G(x'' + 0) - G(x'')$, $\int_0^a x dF(x) = \int_0^a x dG(x)$. Довести, що при цьому $F(x)$ буде стохастичною домінантою 2-го порядку для $G(x)$.

16.11. Нехай ξ невід'ємна випадкова величина, $E[\xi] = 1$ і $\eta = \alpha\xi + (1 - \alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$. Показати, що $\eta \geq_{st2} \xi$.

16.12. Якщо $\xi \geq_{st2} \eta$ і угнута функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не спадає, тоді $g(\xi) \geq_{st2} g(\eta)$.

16.13. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, $\eta_1, \dots, \eta_n$ – незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st2} \eta_i$, $i = 1, \dots, n$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq_{st2} \sum_{i=1}^{n} \eta_i.$$

Заняття № 17
Варіант модульної контрольної №3

1. Розглянемо таку гру: якщо гравець вибирає число a, то одержує додатково до свого капіталу w суму грошей a з ймовірністю $1/4$ і $-a$ з ймовірністю $3/4$. Яке число вибере гравець з функцією корисності грошей $u(x) = -1/x$?

2. Відомо, що ризиковий актив дає дохід на одиницю інвестицій з розподілом $P(Z = 9) = \beta, P(Z = 1) = 1 - \beta$, а без ризиковий - 4. Відомо, що інвестор вибрав портфель, який містить обидва активи. Функція корисності грошей інвестора $u(x) = \sqrt{x}$. В яких межах лежить β?

3. Приймаючий рішення несхильний до ризику з функцією корисності грошей $u(x)$ має капітал W. Лотерея F має вигляд: $P\{X = G\} = p$, $P\{X = B\} = 1 - p$. Нехай C_{min} – це мінімальна ціна, за яку приймаючий рішення продасть лотерею F, якщо він її має, а C_{max} – це максимальна ціна за яку приймаючий рішення купить лотерею F. Нехай функція корисності грошей $u(x)$ виражає спадання абсолютної несхильності до ризику, тоді $C_{max} < C_{min}$.

4. Нехай інвестор може вкладати гроші лише у ризиковий і безризиковий активи. Як змінюється величина інвестицій у ризиковий актив при зростанні інвестиційного капіталу, якщо функція корисності грошей інвестора має вигляд $u(x) = \sqrt[3]{x}$?

5. Нехай ξ_1, ξ_2, ξ_3 – незалежні випадкові величини, η_1, η_2, η_3 – незалежні випадкові величини і $\xi_i \geq_{st1} \eta_i$, $i = 1, 2, 3$, тоді $\xi_{(2)} \geq_{st1} \eta_{(2)}$, де $\min\{\xi_i\} = \xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \xi_{(3)} = \max\{\xi_i\}$, $\min\{\eta_i\} = \eta_{(1)} \leq \eta_{(2)} \leq \eta_{(3)} = \max\{\eta_i\}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green.* Microeconomic Theory. – Oxford University Press, 1995.

2. *Hal R. Varian.* Microeconomic Analysis. – W.W. Norton & Company, Inc. 1992.

3. *Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А.* Микроэкономика – третий уровень. – Новосибирск, 2003.

4. *Moshe Shaked, J. George Shanthikumar.* Stochastic Orders and Their Applications. – Academic Press, Inc. 1994.