КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Р.Є. Ямненко, Т.О. Яневич

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА та КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Навчально-методичний посібник

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2023

Дискретна математика: навчально-методичний посібник/ Упорядники: Р.Є. Ямненко, Т.О. Яневич– К.: ВПЦ "Київський університет", 2023. – 81 с.

Рецензенти

доктор фіз.-мат. наук, доцент О.І.Василик
(Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»)
доктор фіз.-мат. наук, професор Майборода Р.Є.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)
доктор фіз.-мат. наук, професор ???
(Інститут космічних досліджень НАН України)

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
??. ??. 2023 р.

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичний посібник до практичних занять з курсу “Дискретна математика та комбінаторний аналіз” призначений для студентів першого курсу механіко-математичного факультету спеціальності “статистика”. Зміст занять і розміщення матеріалу відповідає програмі курсу.

У методичному посібнику подані задачі, розв'язок яких необхідний для успішного оволодіння матеріалом курсу.

Структура кожного заняття посібника така: спочатку стисло наведені необхідні теоретичні відомості з відповідної теми і приклади розв'язання задач, далі подано три групи задач: задачі для аудиторної роботи, додаткові задачі й задачі підвищеної складності. Остання група містить завдання для самостійної (домашньої) роботи.

Додаткові теоретичні факти та приклади розв'язку типових задач можна знайти в книгах із запропонованого в кінці посібника списку літератури.

Перше заняття присвячене методу математичної індукції та принципу Діріхле. Для доведення істинності деякого твердження (яке залежить від натурального параметру n) методом математичної індукції потрібно діяти так: перевірити базу індукції, тобто виконання нашого твердження при $n = 1$. Потім здійснюється крок індукції, тобто припустивши, що твердження виконується при $n = k$ доводимо, що тоді воно виконується і для $n = k + 1$. При опрацюванні матеріалу заняття потрібно звернути увагу і на різні модифікації цього методу. Наприклад, можна за базу індукції брати $n = l$ (l – деяке натуральне число, яке не обов'язково дорівнює 1), змінювати крок індукції: із істинності при $n = k$ виводити істинність для $n = k+m$ $(m \in Z)$ і т.д. Суть принципу Діріхле можна зрозуміти із такого прикладу: неможливо розмістити $n + 1$ предметів у n комірках так, щоб у кожній комірці було не більше одного предмета.

У другому занятті вводяться основні поняття теорії множин, операції над множинами, розглядаються основні правила комбінаторики: правила додавання та множення. При розв'язанні кожної задачі слід звертати увагу на те, яке правило застосовується. За допомогою цих правил підраховується число перестановок $P_n = n!$ множини із n елементів, число розміщень A_n^k із n елементів по k елементів.

Третє заняття присвячене комбінаторному принципу тотожності, що базується на понятті бієкція. Попередньо наводиться означення відображення та які з них є ін'єктивними, сюр'єктивними та бієктивними. Зокрема варто наголосити, що при встановленні бієктивного зв'язку між множинами ми можемо зробити висновок, що вони містять однакову кількість елементів. Цей прийом широко використовується при підрахунку кількості елементів різних множин. Також в цьому занятті розглядаються числові послідовності та різні форми їх задання - пряма та рекурентна. Запропоновані задачі для переходу від рекурентного задання послідовності до прямого. Також представлені кобмінаторні задачі, розв'язки яких можна записати в рекурентному вигляді.

У четвертому занятті розглядаються комбінації C_n^k з n елементів по k елементів. Комбінаторний зміст чисел C_n^k такий: це число способів вибору із n елементної множини k елементної підмножини. В цьому ж занятті наводяться різні рекурентні формули і співвідношення для чисел C_n^k. При розв'язанні відповідних задач необхідно оволодіти різними методами доведення цих тотожностей: аналітичним (за допомогою арифметичних операцій над числовими значеннями C_n^k), комбінаторним (за допомогою інтерпретації цих співвідношень як числа способів вибору елементів із різних множин), геометричним (за допомогою інтерпретації шляхами шахового міста). Також у четвертому занятті розглядається одне із найбільш важливих комбінаторних співвідношень – біном Ньютона та його застосування.

Заняття 5 присвячене комбінаціям та перестановкам з повтореннями. У попередніх заняттях розглядався випадок, коли елементи, які брали участь у перестановках чи комбінаціях, всі були різні. Якщо ж деякі елементи однакові, то отримуємо менше комбінацій чи перестановок, бо деякі з них збігаються. При розв'язанні відповідних задач необхідно звернути увагу на метод зашифрування комбінацій з повтореннями за допомогою послідовностей з нулів та одиниць (елементи позначаються одиницями, а різні типи відокремлюються один від одного нулем).

Заняття 6 призначене для оволодіння методом включення і виключення. Нехай є N предметів, деякі з яких мають властивості $a_1, ..., a_n$. При цьому кожний предмет може або не мати жодної з цих властивостей, або мати одну чи кілька властивостей. Позначимо $N(a_j a_i ... a_k)$ – кількість предметів, які мають властивості $a_j, a_i, ..., a_k$ (і, можливо, ще деякі з інших властивостей). Тоді кількість M предметів, які не мають жодної із вказаних властивостей, дорівнює

$$M = N - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} (-1)^k N(a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}).$$

У занятті 7 запропоновані задачі на отримання та застосування різноманітних формул обертання. При розв'язанні задач цього заняття слід прагнути користуватись двома методами. Перший полягає у підстановці виразів для відповідних коефіцієнтів у праву частину рівності і отримання тотожності. Другий – у зведенні певними замінами пар взаємно обернених співвідношень, які доводяться, до вже відомих.

У занятті 8 розглядаються задачі, які можна звести до деякого випадкового блукання. Основним при їх розв'язанні є геометрична інтерпретація задачі як деякої ламаної на координатній площині. Розглядається клас ламаних з обмеженнями. Принцип дзеркального відображення полягає у симетричному відображенні деякої частини ламаної відносно відповідної прямої і у встановленні взаємно однозначної відповідності між класом утворених ламаних і початковим класом. Кількість відображених ламаних легко порахувати, так як на них вже не накладаються ніякі обмеження. При підрахунку числа ламаних застосовують комбінаторні міркування. За допомогою вказаного методу знаходяться вирази для підрахунку чисел Каталана.

Заняття 9 призначене для оволодіння методами обчислення генератрис. Розглядається застосування звичайної та експоненційної генератрис для доведення комбінаторних тотожностей і розв'язку комбінаторних задач. Задачі цього заняття також призначені для вироблення вміння обраховувати генератриси різних числових послідовностей. Розглядається метод доведення взаємно обернених співвідношень за допомогою генератрис.

Інші спеціальні числа, а саме числа Фібоначчі, розглядаються в занятті 10. Вони задаються рекурентним співвідношенням та мають безліч цікавих властивостей. Зокрема, вони можуть бути використані для запису натуральних чисел у фібоначчієвій системі числення.

У занятті 11 розглядаються важливі класи спеціальних чисел, які знаходять широке застосування у різних розділах математики. Це числа Бела і Стірлінга (першого і другого роду). Важливими тотожностями, на яких базується розв'язок багатьох задач, є рекурентні формули для чисел Стірлінга. Особливу увагу слід звернути на комбінаторну інтерпретацію чисел Стірлінга. Велика частина задач заняття присвячена різним функціям від цих спеціальних чисел: многочленам, звичайним та експоненційним генератрисам.

Наступні три заняття присвячені елементам теорії графів.

Заняття 12 знайомить студентів з базовими поняттями теорії графів, також розглядаються задачі про зв'язність та інваріантність, радіус та діаметр графів.

У занятті 13 вивчаються такі спеціальні види графів, як ойлерові та гамільтонові графи. Вивчаються необхідні та достатні умови ойлеровості (напівойлеровості) чи гамільтоновості (напівгамільтоновості) графа.

У занятті 14 розглядаються дерева і дводольні графи. Вивчається, як за допомогою числового коду Прюфера записати чи відновити граф, досліджується зв'язок між деревами, дводольними та гамільтоновими графами.

Заняття 15 містить задачі, які потрібно розв'язувати, спираючись на формулу Стірлінга. Ця формула застосовується для знаходження границь, приблизного знаходження ймовірностей. У цьому занятті розглядається також деяке узагальнення поняття "факторіал", а саме "гамма-функція Ойлера".

ЗАНЯТТЯ 1

Принцип математичної індукції. Метод Діріхле

Принцип повної математичної індукції.

Нехай є послідовність тверджень $T(n)$, занумерованих натуральними числами. Припустимо, що встановлено таке:

1) твердження $T(m)$ справедливе;

2) при $n \geq m$ зі справедливості $T(n)$ випливає справедливість $T(n+1)$.

Тоді справедливі всі твердження $T(n)$ $\ (n \geq m)$.

Приклад 1.1. Довести, що при довільному $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Доведення. Індукція по n.

База, $n = 1$:

$$1 = 1^2.$$

Перехід: припустимо, що твердження істинне при $n = k$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Покажемо, що воно виконується і при $n = k + 1$. Тоді

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2,$$

що і треба було довести. □

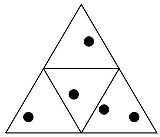
Принцип Діріхле. Найпопулярніше формулювання принципу Діріхле звучить так: “якщо в n клітках сидить $n + 1$ чи більше зайців, то знайдеться клітка, у якій сидять принаймні два зайці.”

Інше формулювання. Нехай скінченна множина A містить більше елементів, ніж множина B. Тоді при будь-якому відображенні множини A в множину B знайдуться два елементи множини A, які мають один і той же образ.

Приклад 1.2. Всередині рівностороннього трикутника, довжина сторони якого 1, розміщено 5 точок. Довести, що відстань між якимись двома з них менша 0,5.

Доведення. Середні лінії рівностороннього трикутника з довжиною сторони 1 розбивають його на чотири рівносторонні трикутники із довжиною сторони 0,5. Назвемо їх “клітками”, а точки вважатимемо “зайцями”. За принципом

Діріхле із п'яти точок принаймні дві виявляться в одному із чотирьох трикутників (див. рисунок). Відстань між цими точками менша 0,5, тому що точки не лежать на вершинах малих трикутників. (Тут вжито відому лему про те, що довжина відрізка, розміщеного всередині трикутника, менша довжини його найдовшої сторони.)



$\square$

Приклад 1.3. Довести, що для довільного дійсного числа $a > 0$ та довільного натурального N знайдуться такі цілі $m \geq 0$ і $k > 0$, що

$$|ka - m| \leq \frac{1}{N}.$$

Доведення. Розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ точками $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$ на N відрізків. Отримані відрізки вважатимемо "клітками", а числа $1, 2, \ldots, N+1$ – "зайцями".

Якщо k – один із "зайців", то число ka можна записати у вигляді $ka = m + x$, де $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x < 1$ (тобто у вигляді суми цілої і дробової частин). Число x потрапляє в одну із "кліток"; у цю клітку ми і посадимо "зайця" k.

За принципом Діріхле знайдуться два "зайці", що сидять в одній "клітці". Інакше кажучи, серед чисел $1, 2, \ldots, N+1$ знайдуться такі два числа $k_1 < k_2$, що

$$k_1 a = m_1 + x_1, \quad 0 \leq x_1 < 1,$$

$$k_2 a = m_2 + x_2, \quad 0 \leq x_2 < 1,$$

причому x_1 і x_2 розміщені в одній "клітці", а тому

$$x_2 - x_1 \leq \frac{1}{N}.$$

Отже,

$$|(k_2 - k_1)a - (m_2 - m_1)| = |(k_2 a - m_2) - (k_1 a - m_1)| = |x_2 - x_1| \leq \frac{1}{N},$$

тобто числа $k = k_2 - k_1$ і $m = m_1 - m_2$ є шуканими. Легко пересвідчитись, що $k > 0$, бо $k_2 > k_1$, і $m \geq 0$, бо $k_2 a - k_1 a = (m_2 + x_2) - (m_1 + x_1) > 0$, звідки $m_2 - m_1 > x_1 - x_2 > -1$ (адже $0 \leq x_1 < 1$ і $0 \leq x_2 < 1$), а так як m_1 і m_2 – цілі числа, то $m_2 - m_1 \geq 0$. $\square$

Задачі для аудиторної роботи

1. Довести тотожності:

а) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. Довести, що число a ділиться на число b:

а) $a = n^3 - 7n,\ b = 6,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $a = 6^{2n-1} + 1,\ b = 7,\ n \in \mathbb{N}$.

3. Довести нерівності:

а) $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{n+1}},\ n \in \mathbb{N}$;

б) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} > \dfrac{4^n}{n+1},\ n > 1$.

4. У школі навчаються 962 учні. Довести, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали (в українському алфавіті є 31 літера, що може входити до складу ініціалів).

5. У турнірі беруть участь n шахістів. Кожні два з них повинні зіграти між собою одну партію. Довести, що в будь-який момент змагань є два шахісти, які зіграли однакову кількість партій.

6. Показати, що серед будь-яких $n+1$ цілих чисел завжди можна вибрати два числа, різниця яких ділиться на n.

7. Довести, що серед n натуральних чисел, записаних у певному порядку, можна вибрати кілька сусідніх чисел, сума яких ділиться на n.

8. На площині довільним чином проведені n прямих. Довести, що чорною і білою фарбами можна так замалювати площину, що будь-які дві частини, які мають спільну сторону, будуть мати різний колір.

9. На скільки частин розбивають площину n прямих, з яких жодні дві не паралельні і жодні три не проходять через одну точку?

10. На площині дано 25 точок, причому серед будь-яких трьох із них знайдуться дві на відстані меншій 1. Доведіть, що існує круг радіуса 1, що містить не менше 13 цих точок.

11. У колі радіуса 1 проведено кілька хорд. Довести, що коли кожний діаметр перетинає не більше k хорд, то сума довжин усіх проведених хорд менша, ніж πk.

12. (Теорема Діріхле) Нехай α – ірраціональне число, а s – будь-яке натуральне число. Тоді існують цілі числа x і y, які не дорівнюють одночасно нулю і такі, що

$$|\alpha x - y| < \frac{1}{s},$$

де $0 < x \leq s$. Довести це.

Додаткові задачі

1. Нехай натуральні числа $a_1, ...a_n$ такі, що $a_k \leq k$ $(k = 1, \ldots, n)$ і сума $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ – парна. Довести, що один із виразів $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ дорівнює 0.

2. Нехай для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ $x_i \geq 0$. Довести нерівність

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

3. Довести, що сторона правильного многокутника, який має 2^n сторін, виражається через радіус R описаного кола формулою

$$a_{2^n} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}},$$

де у правій частині стоїть $n - 1$ корінь.

4. Кілька кругів однакового розміру так розміщені на площині, що ніякі два не перетинаються. Доведіть, що круги можна розфарбувати в 4 кольори так, що будь-які два круги, які дотикаються, будуть пофарбовані в різні кольори.

5. Усередині опуклого многогранника об'єму 1 відзначено $3(2^n - 1)$ точки. Доведіть, що з нього можна вирізати випуклий многогранник об'єму $(\frac{1}{2})^n$, який не буде містити всередині жодної відзначеної точки.

6. На колі розміщені $4k$ точки, які занумеровані довільним чином числами $1, 2, ..., 4k$. Доведіть, що при довільному розміщенні номерів можна з'єднати точки відрізками, які попарно не перетинаються, і різниця чисел на кінцях кожного відрізка не перевищує $3k - 1$.

7. Довести, що для будь-якого додатного числа ε існує безліч цілих чисел n таких, що $|\sin n| < \varepsilon$.

8. (Теорема Кронекера) Якщо α – ірраціональне число, а β – довільне дійсне число, то при будь-якому $\varepsilon > 0$, нерівність

$$|\alpha x - y - \beta| < \varepsilon$$

має розв'язки в цілих числах. Довести це.

9. На прямій дорозі з однаковими інтервалами викопані поперечні рівчаки. Відстань між центрами кожних двох сусідніх α (α – ірраціональне число).

Довести, що людина, яка йде по дорозі і має довжину кроку 1, обов'язково попаде в один із рівчаків, які б вузькі вони не були.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести тотожності:

а) $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\dots\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right)=\dfrac{1+2n}{1-2n}$, $n\in\mathbb{N}$;

б) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n\in\mathbb{N}$.

2. Довести, що число a ділиться на число b:

а) $a=1+3^{3n+1}+9^{3n+1},\ b=13,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

б) $a=2n^3+3n^2+7n,\ b=6,\ n\in\mathbb{Z}$.

3. Довести нерівності:

а) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24};\ n>1$;

б) $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

4. На площині дано n попарно непаралельних прямих. Довести, що серед цих прямих знайдеться принаймні дві такі прямі, що кут між ними буде не більший за $\dfrac{\pi}{n}$.

5. Всередині квадрата зі стороною 1 розміщено кілька кругів, сума радіусів яких дорівнює $0,51$. Довести, що можна знайти пряму, яка паралельна одній із сторін квадрата і перетинає принаймні два круги.

6. У квадрат зі стороною 1 кинуто 51 точку. Довести, що принаймні три з цих точок лежать всередині круга радіусу $\frac{1}{7}$.

7. Довести, що для кожного натурального n є число, яке записується лише за допомогою цифр 1 і 0 та ділиться на n.

8. Довести, що серед будь-яких $n+1$ натуральних чисел, які не перевищують $3n$, знайдуться два числа, відношення яких є степенем двійки.

9. Довести, що для будь-якого $n\in\mathbb{N},\ n>1$, число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7.

10. На площині проведено n кіл так, що кожні два з них перетинаються у двох точках і ніякі три не мають спільної точки. На скільки частин розіб'ється при цьому площина?

11. Довести, що функція

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

на відрізку $[-1,1]$ збігається з деяким многочленом степеня n.

ЗАНЯТТЯ 2

Правила множення і додавання

Основні позначення теорії множин:

$x \in A$: елемент x належить множині A;

$x \notin A$ $(x\overline{\in}A)$: елемент x не належить множині A;

$A \subset B$: множина A є підмножиною множини B (кожен елемент множини A належить множині B);

$\varnothing$: порожня множина;

$\forall x$: для кожного x;

$\exists x$: існує x;

$N(A)$ чи $|A|$: число елементів множини A.

Операції над множинами:

$A \cup B = \{x\colon x \in A$ чи $x \in B\}$ – об'єднання множин A і B;

$A \cap B = \{x\colon x \in A$ і $x \in B\}$ – переріз множин A і B;

$A \setminus B = \{x\colon x \in A$ і $x \notin B\}$ – різниця множин A і B;

$\overline{A} = \{x\colon x \notin A\}$ – доповнення до множини A;

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – симетрична різниця множин A і B;

$A \times B = \{(x, y)\colon\ x \in A,\ y \in B\}$ – декартів добуток множин A і B.

Означення 2.1. *Правило додавання* формулюється так:

"Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а інший об'єкт B можна вибрати n способами, то вибір "A чи B" можна здійснити $m + n$ способами."

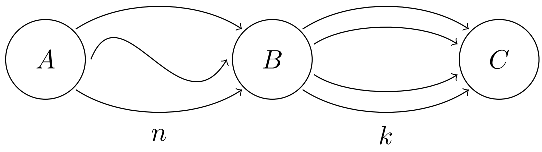
Приклад 2.2. Скількома способами із чотирьох груп по 24, 21, 23 і 25 студентів відповідно можна вибрати одного представника?

Розв'язок. Відповідь очевидна: за правилом додавання його можна вибрати $24 + 21 + 23 + 25 = 93$ способами.

Означення 2.3. *Комбінаторне правило множення (КПМ)* або *основний принцип комбінаторики* формулюється так:

"Нехай треба послідовно (одна за однією) здійснити k дій. Якщо перша дія може бути здійснена n_1 способами, друга дія – n_2 способами, третя дія – n_3 способами, і так далі до k-ої дії, яка може бути здійснена n_k способами, то загальне число способів здійснення k дій дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$."

Приклад 2.4. Від міста A до міста B веде n доріг, від міста B до C – k доріг. Скількома способами можна потрапити із A до C?



Розв'язок. $n \cdot k$, бо обравши один з n можливих шляхів з міста A в місто B, матимемо k різних продовжень подорожі з B в C.

Означення 2.5. Множина називається *впорядкованою*, якщо її елементи розміщені в певному порядку (кожному елементу поставлено у відповідність певне число – його номер).

Множину, що містить n елементів, можна впорядкувати $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ способами.

Означення 2.6. Впорядковані множини, які можна одержати з даної множини називаються *перестановками* цієї множини.

Означення 2.7. Розміщеннями із n по k називаються впорядковані k-елементні підмножини множини, яка складається з n елементів.

Теорема 2.8. *Число розміщень із n по k дорівнює*

$$A_n^k = (n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад 2.9. У класі вивчають 10 дисциплін. У четвер 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на четвер?
Розв'язок. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\ 200$.

Задачі для аудиторної роботи

1. Нехай

$$A = \{x : \ (x-1)(x-2)(x+3)\ln x = 0\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Знайти множини $A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B,\ A \triangle B$ та обчислити кількість елементів, які вони містять.

2. Довести, що

а) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

б) $|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$;

в) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

3. Від міста A до міста B веде n доріг, від міста B до C – k доріг. Скількома способами можна потрапити із A до C і повернутись назад? А якщо назад повертатись іншими дорогами?

4. У англійців зазвичай дають дитині декілька імен. Скількома способами в Англії можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен дорівнює 300, а йому дають не більше трьох імен? Чи вистачить цих наборів на всіх англійців (51 млн. чол.) чи обов'язково знайдуться англійці з однаковими іменами?

5. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5? А скільки таких n-значних чисел?

6. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

7. Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну?

8. Скількома способами n людей можуть стати в коло? (Розстановки по колу вважаються однаковими, якщо при повороті вони співпадають.)

9. Скільки є способів складання намиста із k різних предметів? (На відміну від кіл з попередньої задачі намиста можна перевертати.)

10. Скільки є чисел у системі числення за основою n, які записуються точно k знаками?

Додаткові задачі

1. На яке найбільше число частин можуть розділити простір n площин?

2. Довести, що цілими є числа

а) $\dfrac{(2n)!}{2^n}$;

б) $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$.

3. У прямокутній таблиці з m рядків і n стовпців потрібно записати числа $+1$ і -1 так, щоб добуток чисел у кожному рядку і кожному стовпчику дорівнював 1. Скількома способами можна це зробити?

4. Для кожного натурального n знайти найбільше k, яке має таку властивість: у множині, що складається з n елементів, можна вибрати k різних підмножин, будь-які дві з яких мають непорожній переріз.

5. Скільки різних пар підмножин, які не перетинаються, має множина, яка складається з n елементів?

6. На площині проведені n прямих. Назвемо число прямих, які проходять через точку, кратністю точки. Вказані числа: k_2 – число вершин кратності два, k_3 – число вершин кратності три і т.д.

а) Знайти число пар паралельних прямих.

б) На скільки частин ділять ці прямі площину?

Задачі для самостійної роботи

1. Відомо, що під час складання команд багатомісних космічних кораблів виникає питання про психологічну стійкість членів екіпажу. Треба скласти команду із трьох чоловік: командира, інженера і лікаря. На місце командира є чотири кандидати: a_1, a_2, a_3, a_4; на місце інженера – 3 кандидати: b_1, b_2, b_3 і на місце лікаря – теж 3 кандидати: c_1, c_2, c_3. Відомо, що командир a_1 психологічно сумісний з інженерами b_1 і b_3 та лікарями c_2 і c_3; командир a_2 – з інженерами b_1 і b_2 та усіма лікарями; командир a_3 – з інженерами b_1 і b_2 та лікарями c_1 і c_3; командир a_1 – з усіма інженерами і лікарем c_2. Крім того, інженер b_1 психологічно несумісний із лікарем c_3, інженер b_2 – з лікарем c_1 й інженер b_3 – з лікарем c_2. Скількома способами за цих умов може бути складена команда корабля?

2. Скільки підмножин множини $\Omega = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ містять принаймні одне парне число?

3. Від A до B 999 км. Вздовж дороги стоять стовпи, на яких вказано віддалі до A і до B:

0	999	1	998	2	997	...	998	1	999	0

Скільки серед них таких, на яких є тільки дві різних цифри?

4. Є п'ять видів конвертів і чотири види марок. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для відправлення листа?

5. Скільки різних дільників має число $6^5 \cdot 10^4$?

6. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – різні прості числа. Скільки дільників має число $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_N^{\alpha_N}$?

7. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій – m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник цими прямими?

8. Скільки можна зробити перестановок із n елементів, у яких дані 2 елементи не стоять поруч?

9. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці біле й чорне поля так, щоб вони не лежали на одній горизонталі чи вертикалі?

10. Скільки існує перестановок з n елементів, у яких між двома даними елементами стоїть r елементів?

11. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, \ldots, n\}$ так, щоб кожне число, кратне 2, і кожне число, кратне 3, мало номер, кратний 2 і 3 відповідно?

12. Скількома способами можна скласти триколірний смугастий прапор, якщо є 6 кольорів? А якщо одна смуга – жовта?

ЗАНЯТТЯ 3

Комбінаторний принцип тотожності. Рекурентність

Комбінаторний принцип тотожності.

Приклад 3.1. У розіграші кубку країни з футболу беруть участь 59 команд. Скільки матчів при цьому буде зіграно?

Може здатись, що розв'язок цієї задачі є складним. Але якщо врахувати, що стержневим правилом кубкової системи є те, що кожен матч має закінчитись результативно - перемогою однієї із команд, а команда, що програла, вибуває із змагань, то відповідь буле лежати на поверхні. Дісно, якщо ми знаємо, що в результаті кубок отримає лише одна команда (переможець), то всі інші команди повинні вибути в результаті програшу в одному із матчів. А отже, матчів буде стільки, скільки є команд, що програли, тобто 58.

Таким чином ми утворили взаємно однозначну відповідність (бієкцію) між матчами та командами, що програли і досить легко порахували команди, що програли. За рахунок встановленої відповідності ми одночасно отримали і кількість матчів, що були проведені на кубку.

Що ж таке бієкція? Спочатку розглянемо що таке відображення та коли воно буде ін'єктивним, сюр'єктивним та, нарешті, бієктивним.

Означення 3.2. Нехай X і Y – деякі множини. Припустимо, що кожному елементу $x \in X$ поставлено у відповідність елемент $y = \varphi(x) \in Y$. Тоді кажуть, що задано *відображення* $y = \varphi(x)$ множини X в множину Y. Якщо $y \in Y$, то

$$\varphi^{-1}(y) = \{x\colon\ y = \varphi(x)\}$$

(прообраз елемента y).

Якщо $X = \{x_1, \ldots, x_m\},\ Y = \{y_1, \ldots y_n\}$ – скінченні множини, то відображення $\varphi(x)\colon X \to Y$ задається таблицею значень

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_m
y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\ldots$	$\varphi(x_k)$	$\ldots$	$\varphi(x_m)$

Приклад 3.3. Нехай $X = \{a, b\},\ Y = \{0, 1\}$. Вкажемо всі можливі відображення $\varphi\colon X \to Y$.

x	a	b
$\varphi_1(x)$	0	0

x	a	b
$\varphi_2(x)$	0	1

x	a	b
$\varphi_3(x)$	1	0

x	a	b
$\varphi_4(x)$	1	1

Як бачимо, всього існує 4 різних відображення із X в Y.

Означення 3.4. Відображення φ множини X в множину Y називають *ін'єктивним*, якщо різним елементам множини X відповідають різні елементи множини Y, тобто, якщо $x_1 \neq x_2$, то $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Якщо X та Y скінченні множини, то необхідна умова існування ін'єктивних відображень така:

$$|X| \leq |Y|.$$

Означення 3.5. Відображення $\varphi\colon X \to Y$ називають *сюр'єктивним*, якщо для кожного елемента $y \in Y$ його прообраз непустий:

$$\varphi^{-1}(y) = \{x\colon \varphi(x) = y\} \neq \varnothing.$$

Таким чином, для сюр'єктивного відображення φ для кожного $y \in Y$ $y = \varphi(x)$, $\left|\varphi^{-1}(y)\right| \geq 1$. Для скінченних множин повинна виконуватися необхідна умова існування сюр'єктивних відображень:

$$|X| \geq |Y|.$$

Означення 3.6. Відображення $\varphi : X \to Y$ називається *бієктивним*, якщо воно є одночасно і ін'єктивним, і сюр'єктивним.

Із сюр'єктивності випливає, що для кожного $y \in Y \quad \left|\varphi^{-1}(y)\right| \geq 1$, а з ін'єктивності випливає, що $\left|\varphi^{-1}(y)\right| \leq 1$. Таким чином, бієктивність відображення означає, що $\left|\varphi^{-1}(y)\right| = 1$ для кожного $y \in Y$. Умова $y = \varphi(x)$ однозначно визначає єдине значення $x \in X$. Бієктивне відображення $\varphi : X \to Y$ встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами X та Y. Якщо множини скінченні, це означає, що

$$|X| = |Y|.$$

Приклад 3.7. У прикладі 3.3 відображення φ_2 і φ_3 є ін'єктивними і сюр'єктивними (бієктивними), відображення φ_1 і φ_4 ні ін'єктивними, ні сюр'єктивними не є.

Рекурентність.

Послідовність - це нескінченна низка чисел, вишикуваних одне за одним за зразком натурального ряду, що сам є первісною й еталонною послідовністю.

Розглянемо набір чисел

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...,$$

які вишикувані одне за одним повторюючи структуру натурального ряду. Про такі числа кажуть, що вони утворили числову послідовність.

Приклад 3.8. Наведемо приклади деяких числових послідовностей:

1. послідовність квадратів натуральних чисел: $1, 4, 9, 16, 25, ...$;
2. послідовність чисел, обернених до натуральних: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$;
3. послідовність цифр після коми в зображенні числа π нескінченним десятковим дробом: $1, 4, 1, 5, 9, ...$;
4. послідовність простих натуральних чисел, що розташовані за зростанням: $2, 3, 5, 7, 11, ...$;
5. періодична послідовність чисел 1 та 0: $1, 0, 1, 0, 1, ...$;
6. послідовність чисел Фібоначчі: $1, 1, 2, 3, 5, 7, 13, ...$.

Щоб задати послідовність ми повинні охарактеризувати її особливості або словами, як ми це зробили вище, або аналітично. Це означає, що ми можемо вказати математичне правило, що дає змогу підрахувати кожен член послідовності.

Означення 3.9. Якщо кожен член послідовності $\{a_n\}_{n\geq 1}$ можна порахувати знаючи лише його порядковий номер, тобто використовуючи математичну формулу виду $a_n = f(n)$, тоді таке задання послідовності називається прямим.

Приклад 3.10. Послідовність із п.1, прикладу 3.8 можна задати прямою формулою $a_n = n^2$, $n \geq 1$.

Означення 3.11. Альтернативно, ми можемо задати послідовність за допомогою рекурентної форми, тобто коли кожен наступний член послідовності пов'язується певним правилом не з його порядковим номером, а зі значеннями кількох її попередніх членів $a_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, ...)$. Але цього ще не достатньо - потрібно вказати початкові члени послідовності $a_1 = c$,..., які запустять процес підрахунку наступних членів послідовності.

Приклад 3.12. Послідовність чисел Фібоначчі із п.5, прикладу 3.8 простіше задати рекурентною формулою $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_1 = 1, a_2 = 1$.

Приклад 3.13. Арифметичну прогресію можна задати рекурентною формулою $a_n = a_{n-1} + d$, $a_1 = a, d \neq 0$.

Приклад 3.14. Геометичну прогресію можна задати рекурентною формулою $a_n = a_{n-1}q$, $a_1 = a, q \neq 1$.

Перехід від прямої форми задання послідовності до рекурентної можливий завжди і це можна зробити не одним способом. Перехід же від рекурентної форми до прямої можливий не завжди.

Задачі для аудиторної роботи

1. Нехай $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$. Вказати всі можливі відображення $\varphi\colon X \to Y$. Підрахувати кількість відображень множини X в Y.

2. Показати, що коли $|X| = |Y| = n$, то число взаємно однозначних відповідностей між X і Y дорівнює $n!$.

3. Втановіть бієкцію між двоцифровими числами, що мають суму цифр k, $k = 1, 2, ..., 9$ та двоцифровими числами, які мають суму цифр $19-k$. Для кожного наутрального числа k з'ясуйте, скільки є двоцифорових чисел, які мають суму цифр k.

4. Нехай A - множина тих натуральних розв'язків рівняння $x + y = n$, у яких друга компонента не менша від першої, а B - множина тих натуральних розв'язків рівняння $x+y = n+1$, у яких друга компонента строго більша від першої, n -деяке натуральне число. Встановіть бієкцію між множинами A та B.

5. Скільки є різних цілочислових трикунтиків у яких сума двох більших сторін дорівнює 24?

6. Побудуйте гіпотезу щодо прямої формули для послідовності $\{a_n\}_{n\geq 1}$ по першим п'яти її членам:

а) $3, 8, 13, 18, 23;$ б) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6};$

в) $4, 12, 36, 78, 144;$ г) $2, 2, 4, 12, 48.$

7. Знайти формулу послідовності, що задана початковими членами та рекурентними формулами:

а) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2};$

б) $a_1 = 1, a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1};$

в) $a_1 = a, a_n = pa_{n-1} + d, p \neq 1, d \neq 0;$

г) $a_1 = 1, a_n = 4 - a_{n-1}.$

8. Нехай послідовність визначено двома початковими членами $a_1 = x+y$, $a_2 = \frac{x^3-y^3}{x-y}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, та рекурентною формулою

$$a_n = (x + y)a_{n-1} - xya_{n-2}.$$

Якою є її пряма формула?

9. Від хатки коника-стрибунця веде доріжка, що розкреслена поперечними смужками на квадрати. Гуляючи по ній, коник стрибає або в сусідній квадрат, або через квадрат, чергуючи короткі та довгі стрибки як йому заманеться.

Скількома способами він може дістатись від своєї хатки до n-того за ліком квадрата?

10. а) Скільки 12-цифрових чисел можна записати двома лише цифрами 0 та 1?

б) Скільки є поміж чисел з п.а) таких, що не мають двох чи більше нулів поспіль?

в) Скільки є чисел з п. а), які не містять двох чи більше одиниць поспіль?

Додаткові задачі

1. Показати, що:

а) коли $|X| = m$, $|Y| = n$, $m \leq n$, то число ін'єктивних відображень X в Y дорівнює

$$A_n^m = (n)_m = n(n-1)\dots(n-m+1);$$

б) коли $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \geq m$, то число $D(n,m)$ сюр'єктивних відображень дорівнює

$$D(n,m) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n.$$

2. Нехай n - непарне натуральне число, T_n - множина всіх тих нерівних між собою цілочислових трикунтиків, що мають периметр n, а T_{n+3} - множина всіх тих нерівних між собою цілочислових трикунтиків, що мають периметр $n+3$. Встановіть бієкцію між множинами T_n та T_{n+3} та упевніться, що вони включають в себе однакову кількість трикунтиків.

3. Встановіть бієкцію між натуральними розв'язками нерівності

$$x_1 + x_2 + ... + x_k < n, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

та натуральними розв'язками рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_k + x_{k+1} = n$.

4. Нехай $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ - розклад числа на прості множники. На колі взяли n базових точок, які поділили коло на n однакових дуг. Скільки є неоднакових між собою правильних многокунтиків, усі вершини яких лежать у базових точках?

5. За легендою, в Ханойській вежі є три діамантових стержні, на одному з яких нанизані 64 диски різного діаметру. Монах переміщає диски між стержнями зі швидкістю один рух в секунду за таким правилом: спочатку диски нанизані на один стержень в порядку спадання їх діаметру (як дитяча пірамідка); всі диски треба перемістити на інший із збереженням порядку, але диски можна переміщати лише по одному за раз і так, щоб диск більшого порядку не містився над диском меншого діаметру. Згідно легенди, коли монах закінчить переміщати диски, то настане кінець світу. Через скільки секунд це станеться?

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що коли множини X та Y скінченні, $|X| = m$, $|Y| = n$, то кількість усіх відображень $\varphi\colon X \to Y$ дорівнює n^m.

2. Кожну серію квитків у сільському автобусі нумерують наборами за трьох цифр від 000 до 999.

а) Скільки є квитків в одній серії?

б) Нехай k - деяке ціле число від 0 до 27. Втановіть бієкцію між номерами тих квитків, що мають суму цифр k та тих, що мають суму цифр $27 - k$.

3. Скільки є трицифрових чисел, у яких третя цифра дорівнює сумі двох попередніх?

4. Скільки є різних цілочислових рівнобедрених трикунтиків з периметром n ($n \in \mathbb{N}$ - фіксоване число), у яких рівні (бічні) сторони не довші за основу?

5. Побудуйте гіпотезу щодо прямої формули для послідовності $\{a_n\}_{n\geq 1}$ по першим п'яти її членам:

а) $2, 8, 18, 32, 50$; б) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \frac{1}{162}$;

в) $1, -1, 2, -2, 3$; г) $3, 6, 11, 18, 27$.

6. Знайти формулу послідовності, що задана початковими членами та рекурентними формулами: а) $a_1 = 1, a_2 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$;

б) $a_1 = 2, a_n = 2na_{n-1}$;

в) $a_1 = 4, a_n = a_{n-1} + 4n^3$;

г) $a_1 = x, a_2 = y, a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-1})$.

7. Нехай послідовність визначено двома початковими членами $a_1 = a$, $a_2 = b$, та рекурентною формулою

$$a_n = (x + y)a_{n-1} - xya_{n-2}.$$

у якій $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Якою є її пряма формула?

8. Від хатки коника-стрибунця веде доріжка, що розкреслена поперечними смужками на квадрати. Гуляючи по ній, коник стрибає або в сусідній квадрат, або через квадрат, чергуючи короткі та довгі стрибки як йому заманеться. Скількома способами він може дістатись від своєї хатки до n-того за ліком квадрата якщо він не може робити двох або більше поспіль довгих стрибків?

9. Кола на площині розміщені так: усі вони мають спільну точку А; кожні два з них, окрім точки А, мають іще одну спільну точку; жодні три з них не мають спільних точок, крім А. Всього є n кіл. На скільки частин вони розтинають площину?

ЗАНЯТТЯ 4

Біноміальні коефіцієнти

Означення 4.1. *Комбінації із n по k* – це k-елементні підмножини множини, яка містить n елементів (інше означення – групи по k предметів з даних n предметів, причому порядок предметів в групі неістотний).

Теорема 4.2. *Число k-елементних підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{(n)_k}{k!}. \tag{4.1}$$

Числа C_n^k також називають біноміальними коефіцієнтами (див. теорему 4.6 нижче).

Приклад 4.3. Скількома способами з 10 студентів можна вибрати делегацію, яка складається із трьох студентів?
Розв'язок. Шукане число способів дорівнює числу трьохелементних підмножин у множині з 10 елементів:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Приклад 4.4. Доведемо *правило винесення* за знак біноміального коефіцієнта:

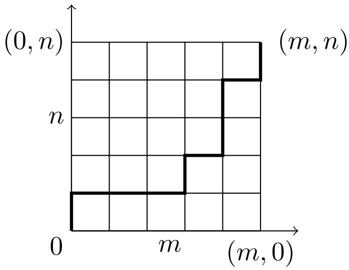
$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}. \tag{4.2}$$

Розв'язок. Рівність (4.2) випливає із представлення (4.1). Маємо

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

Приклад 4.5. Геометрична інтерпретація C_n^k.

Розглянемо прямокутну сітку квадратів розмірами $m \times n$ (“шахове місто”, яке складається із $m \times n$ прямокутних кварталів, поділених $n-1$ горизонтальними і $m-1$ вертикальними вулицями). Яке число найкоротших доріг на цій сітці, які ведуть з лівого нижнього кута (точки $(0,0)$) у правий кут (точку (m,n))?



Відзначимо, що кожен найкоротший шлях з точки $(0,0)$ у точку (m,n) складається з $m+n$ відрізків, причому серед них є горизонтальних і вертикальних. Обравши вертикальні відрізки, ми повністю визначаємо шлях. Тому загальне число найкоротших шляхів дорівнює числу способів, якими з $m+n$ відрізків можна вибрати n вертикальних (або m горизонтальних), тобто

$$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}.$$

Теорема 4.6. *Має місце рівність (біном Ньютона):*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{4.3}$$

Приклад 4.7. Якщо в рівності (4.3) покласти $a = b = 1$, отримаємо таку тотожність:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб?

2. З колоди, що містить 52 карти, вибрали 10 карт. У скількох випадках серед цих карт :

а) немає жодного туза?
б) є рівно один туз?
в) є хоча б один туз?
г) є рівно два тузи?

3. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

4. Чемпіонат України з футболу проводиться серед 16 команд. Будемо говорити, що можливі наслідки чемпіонату не відрізняються у головному, якщо в результаті однакові команди гратимуть у єврокубках (5 команд) і перейдуть у першу лігу (2 команди). Скільки всього є можливих наслідків чемпіонату, які не відрізняються у головному?

5. На площині дано n точок, причому m точок лежать на одній прямій і крім них жодні три точки не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників, вершинами яких є дані точки?

6. Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра більше попередньої?

7. Розглянемо шахове місто із $k \times (n-k)$ кварталів, $n > k$. Скільки різних найкоротших шляхів ведуть із точки $(0,0)$ у точку:

а) $(k, n-k)$?

б) $(k-1, n-k)$?

в) $(k, n-k-1)$?

Користуючись а) – в), отримати тотожність $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

8. Довести рівності:

а) $C_n^k = C_{n-2}^{k-2} + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$;

б) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

9. Скільки раціональних членів містить розклад $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

10. Обчислити суми:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k$;

г) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

11. Знайти n, якщо відомо, що в розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 та x^{12} однакові.

12. Довести тотожності:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$;

б) $\sum\limits_{i=0}^{r} C_n^i C_m^{r-i} = C_{n+m}^r$;

в) $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1}$;

г) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{r+k}^k = C_{r+n+1}^n$.

Додаткові задачі

1. Для фіксованого n вказати найбільше із чисел C_n^k.

2. Розглянемо шахове місто із $n \times m$ кварталів. Скільки різних найкоротших шляхів ведуть із точки $(0,0)$ у точку (m,n) за умови, що проходити через трикутник з вершинами $(0,n-d)$, $(0,n)$, (d,n) забороняється?

3. Довести тотожність: $C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \ldots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$.

4. У класі вивчають $2n$ предметів. Всі учні вчаться на 4 і 5. Жодні два учні не вчаться однаково; ні про будь-яких двох з них не можна сказати, що один вчиться краще іншого. Довести, що число учнів в класі не перевищує C_{2n}^n.

5. Комісія складається з n осіб. Скільки замків повинен мати сейф, скільки ключів до них треба зробити і як їх розподілити серед членів комісії, щоб доступ до сейфа був можливий тоді і тільки тоді, коли збереться не менше k членів комісії?

6. В опуклому n-кутнику накреслено всі діагоналі. Відомо, що жодні три з них не перетинаються в одній точці. На скільки частин поділиться при цьому многокутник?

7. Знайти число всіх опуклих k-кутників, вершинами яких є k із n вершин опуклого n-кутника, причому дві сусідні вершини повинні бути розділені не менше, ніж s вершинами n-кутника.

8. Запишемо трикутник Паскаля у вигляді:

$$\begin{array}{llllllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & & \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & & & \\
1 & 5 & 15 & 35 & & & & \\
1 & 6 & 21 & & & & & \\
1 & 7 & & & & & & \\
1 & & & & & & &
\end{array}$$

Довести, що будь-який визначник з чисел, які стоять в лівому куті трикутника Паскаля, дорівнює 1.

9. Нехай n і k натуральні числа, $n \geq k$. Довести, що найбільший спільний дільник чисел $C_n^k,\ C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ дорівнює 1.

10. Довести тотожності:

а) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{m(m-1)\ldots(m-k+1)} = \frac{m+1}{m-n+1};$$

б) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{2n-1}^{k}} = \frac{2}{n+1};$$

в) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k C_n^r}{C_{2n}^{k+r}} = \frac{2n+1}{n+1};$$

г) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n+m}^{k}} = \frac{n+m+1}{(m+1)(m+2)}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Скількома способами читач може вибрати 3 книги з 6?

2. З колоди, що містить 52 карти, двоє гравців вибрали по 5 карт. У скількох випадках:

а) у кожного з гравців є рівно один туз?

б) у жодного з гравців немає тузів?

в) у першого гравця всі карти червоної, а у другого – чорної мастей?

г) в обох гравців карти однієї масті?

3. а) Скількома способами можуть випасти три гральні кубики?

б) У скількох випадках хоча б на одному кубику випаде 6 очок?

в) У скількох випадках на одному кубику випаде 6, а на іншому 3 очок?

4. Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра менша попередньої?

5. Довести тотожності:

а) $C_n^r = \sum\limits_{k=0}^{r} C_{n-m}^{k} C_m^{r-k}, \quad 0 \le m \le n$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k C_r^k = (-1)^m C_{r-1}^m$;

в) $C_n^0 C_n^{n-m} + C_n^1 C_{n-1}^{n-m} + \ldots + C_n^m C_{n-m}^{n-m} = C_n^m 2^m$.

6. Нехай X – впорядкована m-елементна множина, Y – впорядкована n-елементна множина. Відображення $\varphi\colon X \to Y$ називають *монотонним,* якщо з $x_i < x_j$ випливає $\varphi(x_i) < \varphi(x_j)$. Довести, що число монотонних відображень впорядкованої m-множини X у впорядковану n-множину Y дорівнює C_n^m $(m \le n)$.

7. Скільки раціональних членів містить розклад $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[5]{3})^{300}$?

8. Довести, що при $n > 1$

$$C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n C_n^n = 0.$$

9. Довести, що:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n}^k = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n = 2^{2n-1} + C_{2n-1}^n$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_{2n}^k = 2n \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k = n 2^{2n-1}$;

ЗАНЯТТЯ 5

Перестановки та комбінації з повтореннями

Означення 5.1. *Комбінаціями із m елементів по n елементів з повтореннями* називають групи, які містять n елементів, причому кожний елемент належить одному з m типів.

Теорема 5.2. *Число різних комбінацій із m елементів по n з повтореннями дорівнює*

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n.$$

Приклад 5.3. Кості з доміно є комбінаціями з повтореннями з семи цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, по 2. Число усіх таких комбінацій дорівнює

$$f_7^2 = C_{2+7-1}^2 = C_8^6 = 28.$$

Означення 5.4. *Перестановками з повтореннями* називають перестановки з n елементів, причому кожний елемент належить одному з m типів: n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, ..., n_m елементів m-го типу. Число таких перестановок з повтореннями позначають $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Теорема 5.5. *Число представлень множини Ω, яка містить n елементів, у вигляді об'єднання m підмножин $B_1, B_2, ..., B_m$ таких, що*

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j,\ |B_1| = k_1, |B_2| = k_2, \ldots, |B_m| = k_m,$$

дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$ також називають поліноміальними коефіцієнтами (див. теорему 5.8 нижче).

Приклад 5.6. Скількома способами можна розселити 8 студентів у трьох кімнатах: одномісній, трьохмісній і кімнаті на чотири місця?
Розв'язок. Розселення можна здійснити

$$C_8(1, 3, 4) = \frac{8!}{1!3!4!} = 280$$

способами.

Приклад 5.7. Число різних слів, які можна утворити з n літер, серед яких k_1 літер a_1, k_2 – літер a_2, $\dots$, k_m – літер a_m, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$

Теорема 5.8. (Поліноміальна теорема) *Справедлива рівність*

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n,\ k_i \geq 0} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} a_1^{k_1} \dots a_2^{k_m}. \quad (5.1)$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Скількома способами можна розподілити n однакових подарунків для m дітей? Скільки серед них таких способів, коли кожна дитина отримує принаймні один подарунок?

2. Скільки існує n-значних натуральних чисел, у яких:

а) цифри розміщені у неспадному порядку?

б) кожна цифра зустрічається принаймні один раз?

в) цифри розміщені у незростаючому порядку?

3. а) Скількома способами можна розмістити n_1 білих, n_2 чорних і n_3 синіх куль по m різних урнах?

б) Скільки є таких розміщень, де у другій урні k_1 білих, k_2 чорних і k_3 синіх куль?

4. На книжній полиці стоять 12 книг. Скількома способами можна вибрати із них 5 книг так, щоб ніякі дві із них не стояли поруч?

5. За круглим столом сидять n лицарів. Скількома способами можна вибрати k лицарів так, щоб до їх числа не попали ніякі два сусіди?

6. Є n різних сигнальних прапорів і k мачт, на яких їх розвішують. Значення сигналу залежить від того, в якому порядку розвішують прапори. Скільки є різних сигналів (деякі мачти можуть бути порожні)?

7. Скількома способами можна поділити $m+n+s$ предметів на три групи так, щоб в одній групі було m предметів, в другій – n, а у третій – s предметів?

8. Скількома способами можна розмістити n різних куль по m урнах так, щоб m_1 урна містила по p_1 куль, m_2 урни – по p_2 куль і т.д. $(m = m_1 + \dots + m_k,\ n = m_1p_1 + \dots + m_kp_k)$, якщо:

а) урни різні;

б) урни, які містять однакову кількість куль, не можна відрізнити.

9. Довести рівність

$$\sum_{n=n_1+\dots+n_k,\ n_i \geq 0} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = k^n.$$

10. Є 10 подружніх пар. Вони розбиваються на 5 груп по 4 людини для прогулянки на човнах.

а) Скількома способами можна розбити їх так, щоб у кожному човні були двоє чоловіків і двоє жінок?

б) У скількох випадках при цьому даний чоловік буде в одному човні з своєю дружиною?

в) У скількох випадках дані двоє чоловіків будуть в одному човні з своїми дружинами?

11. Є $2n$ елементів. Скількома способами можна розбити ці елементи на пари, якщо не розрізняються випадки з різним порядком пар або елементів у парах?

Додаткові задачі

1. Маємо по $2n$ предметів чотирьох сортів. Скількома способами їх можна розділити на дві групи по $4n$ предметів?

2. Скількома способами можна поділити по n предметів 3-х сортів між трьома людьми так, щоб кожний отримав n предметів?

3. Довести, що числа $\dfrac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$, $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ цілі.

4. (Теорема Шпернера) Нехай Ω – множина, яка містить n елементів, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – набір підмножин Ω такий, що жодна з цих підмножин не є частиною іншої. Довести, що

$$k \leq C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

5. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – дійсні числа, $|x_i| \geq 1$. Довести, що в будь-якому інтервалі довжини 2 є не більше $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ сум виду $\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k$, де $\varepsilon_k = \pm 1$.

6. Нехай $n = p_1 p_2 \ldots p_r$ – розклад числа n на прості множники, а m – максимальне число дільників числа n, які не ділять один одного. Довести, що

$$m \leq C_r^{[\frac{r}{2}]}.$$

7. Використовуючи тотожність

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1},$$

довести рівності:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + m(m+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$;

в) $1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних тістечок у кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?

2. Скільки кісточок доміно можна утворити, використовуючи числа $0, 1, \ldots, r$?

3. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n, \ m, n \in \mathbb{N}?$$

4. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має нерівність

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m < n, \ m, n \in \mathbb{N}?$$

5. У східній грі "нарди" 15 білих і 15 чорних шашок стоять на 24 полях так, що кожне поле або пусте, або зайняте кількома білими шашками, або зайняте кількома чорними шашками. Скількома способами можна так розставити шашки?

6. Довести, що число способів, якими 2 людини можуть поділити $2n$ предметів першого сорту, $2n$ предметів другого сорту і $2n$ предметів третього сорту так, щоб кожна отримала по $3n$ предметів, дорівнює $3n^2 + 3n + 1$.

7. Скількома способами 4 чорні кулі, 5 білих і 7 синіх можуть бути розкладені у 6 різних пакетів?

8. Скількома способами можна роздати 52 карти 4 гравцям так, щоб кожний отримав по три карти трьох мастей і чотири карти четвертої масті?

9. Скількома способами можна роздати 18 різних предметів 5 людям так, щоб четверо отримали по 4 предмети, а п'ятий 2 предмети?

10. На перші дві лінії шахової дошки довільним чином розставляють білі й чорні фігури (по два коня, два слона, дві тури, ферзь і король кожного кольору).

а) Скількома способами це можна зробити?

б) Скількома способами можна розставити ті самі фігури по всій дошці?

в) А якщо розставляють і усіх пішаків (по 8 пішаків кожного кольору)?

11. Скільки слів можна утворити, переставляючи літери в слові "комбінаторика"?

12. Записати розклад виразу $(x + y + z)^3$.

13. Скільки доданків у правій частині рівності (5.1)?

ЗАНЯТТЯ 6

Метод включення і виключення

Підрахуємо кількість елементів в об'єднанні m множин. Легко пересвідчитись, що для $m = 2$ і $m = 3$ справедливі рівності

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|;$$

та

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)+$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \tag{6.1}$$

Приклад 6.1. Скільки чисел серед 1, 2, 3, ..., 99, 100 таких, які не діляться на жодне з чисел 2, 3, 5?
Розв'язок. Підрахуємо спершу кількість чисел, які діляться принаймні на одне з чисел 2, 3, 5. Нехай A_1 – множина тих чисел, які діляться на 2, A_2 – множина тих чисел, які діляться на 3, A_3 – множина тих чисел, які діляться на 5. Тоді

$$|A_1| = \left[\frac{100}{2}\right] = 50, \quad |A_2| = \left[\frac{100}{3}\right] = 33, \quad |A_3| = \left[\frac{100}{5}\right] = 20,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{100}{2 \cdot 3}\right] = 16,\ |A_1 \cap A_3| = \left[\frac{100}{2 \cdot 5}\right] = 10,\ |A_2 \cap A_3| = \left[\frac{100}{3 \cdot 5}\right] = 6,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5}\right] = 3.$$

Тому з (6.1) маємо

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 50 + 33 + 20 - (16 + 10 + 6) + 3 = 74.$$

Відповідь: кількість чисел, які не діляться на жодне з чисел 2, 3, 5, дорівнює $100 - 74 = 26$.

Теорема 6.2. *Має місце рівність*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \ldots +$$

$$+(-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots +$$

$$+(-1)^{m-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|.$$

Приклад 6.3. Розглядаються всі перестановки n чисел $1, 2, \dots, n$. Знайти число D_n тих перестановок, у яких принаймні одне число стоїть на місці зі своїм номером.

Розв'язок. Позначимо через A_k множину тих перестановок, у яких на k-му місці стоїть k. Тоді

$$D_n = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

Множина $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}$ містить ті перестановки, у яких на місцях $i_1, i_2, \dots, i_k$ відповідно стоять числа $i_1, i_2, \dots, i_k$, а на інших $n-k$ місцях числа впорядковані довільно. Тому

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}| = (n-k)!,$$

а

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}| = C_n^k (n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

З теореми 6.2 випливає, що

$$D_n = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right).$$

Теорема 6.4. *Нехай $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|_{[m]}$ позначає кількість елементів, які входять рівно в m множин з набору множин $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Тоді*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|_{[m]} = C_m^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}| -$$

$$-C_{m+1}^m \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{m+1} \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{m+1}}| + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-m} C_n^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}|.$$

Приклад 6.5. Знайти число всіх перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, у яких рівно m чисел стоять на місцях зі своїм номером.

Розв'язок. Нехай A_k – множина тих перестановок, у яких на k-му місці стоїть k. Тоді згідно з теоремою 6.4 число відповідних перестановок дорівнюватиме

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|_{[m]} =$$

$$= C_m^m C_n^m (n-m)! - C_{m+1}^m C_n^{m+1} (n-m-1)! + \ldots + (-1)^{n-m} C_n^m C_n^n =$$

$$= \frac{n!}{m!} \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} \right).$$

Означення 6.6. Нехай n – натуральне число. *Функція Ойлера* $\varphi(n)$ – це кількість додатних натуральних чисел, які не перевищують n і взаємно прості з n.

Приклад 6.7. Обчислити $\sum\limits_{d|8} \varphi(d)$, де запис $d|8$ означає, що число d є дільником числа 8, і сума обчислюється по всім таким дільникам.
Розв'язок. Використовуючи означення функції Ойлера, маємо

$$\sum_{d|8} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(4) + \varphi(8) = 1 + 1 + 2 + 4 = 8.$$

Приклад 6.8. Нехай p – просте число. Чому дорівнює $\varphi(p)$?
Розв'язок. Якщо число p просте, то всі числа, що не перевищують p, є взаємно простими з p. Тому

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Означення 6.9. Означимо на множині натуральних чисел *функцію Мебіуса* $\mu(n)$ таким чином:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 1, \\ 0, & \text{якщо } n \text{ ділиться на квадрат простого числа,} \\ (-1)^k, & \text{якщо } n = p_1 p_2 \dots p_k, \text{ де } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ – різні прості} \\ & \text{множники.} \end{cases}$$

Приклад 6.10. Обчислити $\sum\limits_{d|10} \mu(d)$.
Розв'язок. Використовуючи означення функції Мебіуса, маємо

$$\sum_{d|10} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(5) + \mu(10) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 фізичний, а 10 учнів не відвідують жодного гуртка.

а) Скільки учнів відвідують математичний та фізичний гуртки?

б) Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?

2. Є n листів, але адреси на конвертах написані навмання. Скільки є способів того, що:

а) хоча б одна людина отримає лист, який написаний до неї;

б) m людей отримають листи, які написані до них ?

3. Скількома способами можна послати n різних фотокарток у k різних конвертах, якщо жоден конверт не повинен бути порожній?

4. Скількома способами король Артур може розсадити за круглим столом n пар лицарів, які ворогують між собою (пару лицарів, які ворогують один з одним, не можна садити поруч)?

5. По пустелі іде караван з 9 верблюдів. Скількома способами можемо переставити верблюдів так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший, ніж раніше?

6. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – взаємно прості натуральні числа, N – деяке натуральне число. Знайти кількість додатних натуральних чисел, які не перевищують N і не діляться на жодне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

7. Нехай $|X| = m$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, $A_i = \{\varphi\colon X \to Y, \varphi^{-1}(y_i) = \emptyset\}$, $i = 1, \ldots, n$.

а) Довести, що $|A_i| = (n-1)^m$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$, $i \neq j$.

б) Обчислити $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right|$.

в) Довести, що число сюр'єктивних відображень X в Y дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

8. Нехай функція $f(x)$ така, що її область визначення разом з точкою x містить і точку $x+1$. Операцію переходу від $f(x)$ до $f(x+1)-f(x)$ називають *різницевим оператором* $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Якщо $f(x) = x^m$, довести, що:

а) $\Delta^n x^m = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x+n-k)^m, \quad n < m;$

б) $\Delta^m x^m = m!;$

в) $\Delta^n x^m = 0, \quad n > m.$

9. Нехай n – натуральне число, розклад на прості множники якого має вигляд $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – прості числа. Довести, що функція Ойлера дорівнює

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

10. Довести, що при $n \geq 2$

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0.$$

Додаткові задачі

1. Довести, що функція Ойлера – мультиплікативна, тобто для будь-яких натуральних a і b, взаємно простих між собою,

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

2. Нехай n – натуральне число, розклад на прості множники якого має вигляд $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – прості числа. Показати, що

а) $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = \prod\limits_{i=1}^{k} (\varphi(1) + \varphi(p_i) + \ldots + \varphi(p_i^{\alpha_i}))$;

б) $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

3. Нехай n – деяке довільно вибране натуральне число. Позначимо: $q_1, \ldots, q_m$ – всі прості числа, які не перевищують $\sqrt{n}$, а $\pi(x)$ – кількість простих чисел, які не перевищують $x > 0$. Довести, що

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) = n - 1 + \sum_{k+1}^{m} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \left[\frac{n}{q_{i_1} \ldots q_{i_k}} \right].$$

4. Довести тотожність

$$\sum_{n = n_1 + \ldots + n_m,\ n_i > 0} \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (m-k)^n.$$

5. Нехай $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^{m}$ – квадратна матриця порядку m. Перманент A дорівнює

$$per(A) := \sum_{i_1, \ldots, i_m} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{m,i_m},$$

де сума знаходиться по всіх можливих перестановках чисел $1, \ldots, m$. Довести, що

$$per(A) = S(A) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{i_1, \ldots, i_k} S(A_{i_1, \ldots, i_k}),$$

де $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m$, $A_{i_1, \ldots, i_k}$ – матриця, яка утворена з A заміною $i_1, \ldots, i_k$ стовпчиків нулями, а $S(A_{i_1, \ldots, i_k})$ – добуток сум рядків A.

Задачі для самостійної роботи

1. Зі 100 студентів англійську мову вивчають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і французьку – 10, англійську і німецьку – 8, німецьку і французьку – 5, всі 3 мови студіюють троє. Скільки студентів не вивчають жодної із цих трьох мов?

2. У класі навчається 45 школярів, з них 25 хлопчиків. 30 школярів вчаться на добре і відмінно, з них 16 хлопчиків. Спортом займаються 28 учнів, з них 18 хлопчиків і 17 школярів, які навчаються на добре і відмінно. 15 хлопчиків навчаються на добре і відмінно і в той же час займаються спортом. Показати, що в цій інформації є помилка.

3. По колу біжать n чоловік. Скількома способами можна поміняти їх місцями так, щоб попереду кожного була інша людина, ніж раніше?

4. У бою не менше 70% бійців втратили одне око, не менше 75% – одне вухо, не менше 80% – одну руку і не менше 85% – одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, які втратили одночасно око, вухо, руку і ногу?

5. Скільки шестизначних чисел можна скласти із цифр числа 1 233 145 254 так, щоб ніякі дві однакові цифри не йшли одна за одною?

6. Скількома способами можна посадити за круглий стіл 3 англійців, 3 німців і 3 французів, щоб ніякі два співвітчизники не сиділи поруч?

7. а) Скількома способами 6 чоловік можуть вибрати 6 пар рукавиць різного розміру по правій і лівій рукавиці так, щоб ні один не отримав пари одного розміру?

б) Ця ж задача для 9 пар і 6 людей.

8. Показати, що функцію Ойлера можна наступним чином виразити через функцію Мебіуса:

а) $\varphi(70) = \sum\limits_{d|70} \mu(d)\frac{70}{d}$;

б) $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Скількома способами можна розмістити n

а) різних,

б) однакових

предметів по m різним скриням? Скільки серед них таких розміщень, при яких у кожну скриню кладеться не більше одного предмета?

ЗАНЯТТЯ 7

Формули обертання

Теорема 7.1. *Якщо* $\{a_n\}$ *і* $\{b_n\}$ *такі послідовності, що для всіх* n

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k, \tag{7.1}$$

то

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_k. \tag{7.2}$$

Навпаки, із (7.2) випливає (7.1).

Приклад 7.2. Довести пару взаємно обернених співвідношень:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k a_k.$$

Доведення. I спосіб. Зведемо дані співвідношення до формул (7.1)–(7.2). Для цього достатньо зробити заміну $b_k = (-1)^k b'_k$. Тоді матимемо

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b'_k, \quad (-1)^n b'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k a_k,$$

звідки

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b'_k, \quad b'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_k.$$

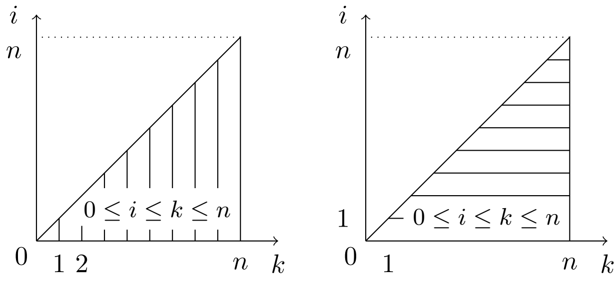
Як бачимо з теореми 7.1, послідовності $\{a_n\}$ і $\{b'_n\}$ взаємно обернені, отже, взаємно оберненими є і послідовності $\{a_n\}$ й $\{b_n\}$.

II спосіб. Розглянемо суму $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k b_k$ і припустимо, що $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k a_k$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i a_i = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_n^k C_k^i a_i.$$

З рисунка нижче видно, що міняючи порядок підсумування в області $\mathcal{D} = \{(i,k) \colon 0 \le i \le k \le n\}$, матимемо

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} x_{ik} = \sum_{\{(i,k) \colon 0 \le i \le k \le n\}} x_{ik} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} x_{ik}.$$



Тоді, продовжуючи ланцюг перетворень, і врахувавши, що

$$C_n^k C_k^i = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{i!(k-i)!} = C_n^i C_{n-i}^{k-i},$$

матимемо, що

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} C_n^i C_{n-i}^{k-i} a_i = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} C_{n-i}^{k-i} =$$

Зробимо заміну $k - i = j$:

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j C_{n-i}^j = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i (1-1)^{n-i} = a_n.$$

Тут ми використали біноміальну формулу і ту обставину, що

$$(1-1)^{n-i} = \begin{cases} 0, & n \neq i; \\ 1, & n = i. \end{cases}$$

В іншу сторону формули доводяться аналогічно. $\square$

Теорема 7.3. ***(Принцип обертання Дедекінда-Ліувілля)*** *Нехай $f(n)$ і $g(n)$ – функції, визначені для будь-якого натурального n, то*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d),$$

де обидві суми беруться по всіх дільниках числа n (включаючи 1 та саме число n), $\mu(n)$ – функція Мебіуса.

Приклад 7.4. Має місце такий зв'язок між функціями Ойлера $\varphi(n)$ і Мебіуса $\mu(n)$:

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Доведення. Використаємо таку властивість функції Ойлера:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Застосувавши до цієї суми принцип обертання Дедекінда-Ліувілля, отримаємо

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

□

Задачі для аудиторної роботи

1. Довести, що виконуються взаємно обернені співвідношення:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a_{n-k}}{k!}.$$

2. Довести дві пари взаємно обернених співвідношень

а) $A_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{2n-2k}}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad B_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A_{2n-2k}}{k!};$

б) $A_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{2n-2k+1}}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad B_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A_{2n-2k+1}}{k!};$

і отримати, як наслідок, пару взаємно обернених співвідношень:

$$a_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{b_{n-2k}}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k a_{n-2k}}{k!}.$$

3. Довести пару взаємно обернених співвідношень:

а) $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{p-k}^{p-n} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} C_{p-k}^{p-n} a_k;$

б) $a_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_{p-n}^{p-k} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-n} C_{p-n}^{p-k} a_k.$

4. Підрахувати суму:

$$S_{nm} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^m, \quad n \geq m,$$

а) аналітично;

б) за допомогою формули обертання для біноміальних коефіцієнтів.

5. Коли кажуть, що символи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ утворюють циклічну перестановку, вважають, що будь-яка із перестановок $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1$; $a_3, \ldots, a_n, a_1, a_2$; $\ldots$; $a_n, a_1, \ldots, a_{n-1}$ визначає одну і ту саму циклічну перестановку. Припустивши, що символи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можуть набувати r різних значень, і скориставшись принципом обертання Дедекінда-Ліувілля, довести, що кількість циклічних перестановок довжини та періоду n обчислюється за такою формулою:

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}.$$

Додаткові задачі

1. Довести, що виконуються взаємно обернені співвідношення:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! C_n^k C_{p+n}^k b_{n-k} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! C_n^k C_{p+n}^k a_{n-k}.$$

2. Довести пару взаємно обернених співвідношень:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 k! x^k b_{n-k} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 k! (-x)^k a_{n-k}.$$

Показати, що

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 k! s_{n-k}(x),$$

де $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 k! x^{n-k}$ – приєднаний многочлен тур.

3. Довівши рівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1 \le i < k \le n} (a_k - a_i)(b_k - b_i),$$

отримати з неї такі наслідки:

а) якщо $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ і $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k;$$

а) якщо $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ і $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \ge n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

4. *Числами Лаха* називають коефіцієнти L_{nk} у виразі

$$(-x)_n = \sum_{k=0}^{n} L_{nk}(x)_k,$$

де $(x)_k = x(x-1)\ldots(x-k+1)$.

Записати обернену формулу, ортогональне співвідношення та довести, що

$$L_{n0} = \delta_{n0}, \quad L_{nk} = (-1)^n \frac{n!}{k!} C_{n-1}^{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n, \; n \in \mathbb{N}.$$

5. Знайти суму:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{C_n^k}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

а) аналітично;
б) за допомогою формули обертання для біноміальних коефіцієнтів.

6. Нехай $f_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{x^j}{j}$. Довести,що

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k f_k(x) = \frac{1-(1-x)^n}{n}, \\ f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k S_k(x), \end{aligned}$$

та отримати із цих співвідношень рівність

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{1-(1-x)^k}{k}.$$

Розв'язати задачу:

а) аналітично;
б) за допомогою формул обертання.

Задачі для самостійної роботи

1. Узагальнити результат задачі A.2 і довести для цілого додатного c пару взаємно обернених співвідношень:

а) $a_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{c}]} \frac{b_{n-ck}}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{c}]} \frac{(-1)^k a_{n-ck}}{k!};$

б) $a_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{c}]} \frac{n! b_{n-ck}}{k!(n-ck)!} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{c}]} \frac{(-1)^k n! a_{n-ck}}{k!(n-ck)!}.$

2. Довести пару взаємно обернених співвідношень:

а) $a_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+n} C_k^n a_k;$

б) $a_n = \sum_{k=n}^{\infty} C_{p+k}^{p+n} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k+n} C_{p+k}^{p+n} a_k;$

в) $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{p+n}^{p+k} b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} C_{p+n}^{p+k} a_k.$

3. Довести для $p = 0, \ldots, n-1$ співвідношення:

$$a_n(x,p) = \sum_{k=0}^{n} C_{p-k}^{n-k} x^k = x^{p+1}(x-1)^{n-p-1}$$

та

$$a_n(1-x,p) x^{p+1} (x-1)^{-p-1} (-1)^n = x^n$$

а) аналітично;

б) за допомогою формул обертання.

4. Складаються намиста із предметів трьох кольорів. Кожне намисто має

а) 5;

б) 8 предметів.

Намиста, які отримані одне з одного поворотом на площині, не розрізняють. Користуючись результатом задачі A.5, знайти число різних прикрас.

5. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ – розклад числа n на прості множники. Довести, що

а) $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right);$

б) $\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$

ЗАНЯТТЯ 8

Метод траєкторій

Будемо розглядати множину $2n$-вимірних векторів виду

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n-1}, \varepsilon_{2n}), \tag{8.1}$$

де кожна компонента ε_i набуває двох значень: 1 або -1:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \;\;1, \\ -1. \end{cases} \tag{8.2}$$

причому для кожного k $(k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \geq 0 \tag{8.3}$$

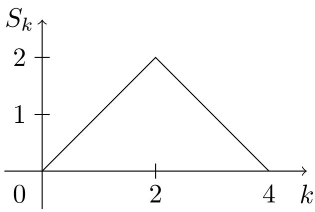
та

$$\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0. \tag{8.4}$$

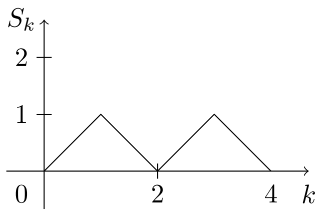
Означення 8.1. $2n$-вимірні вектори $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n-1}, \varepsilon_{2n})$, які задовольняють умови (8.2), (8.3), (8.4), називають *векторами Каталана*, а число таких векторів називають *числом Каталана* і позначають C_n.

Знайдемо формулу для обчислення C_n за допомогою *методу дзеркальних відображень*.

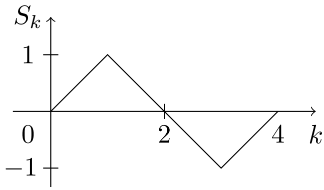
Нехай $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, $S_0 = 0$. Поставимо у відповідність кожному вектору (8.1) геометричну траєкторію S_n. Траєкторії, для яких виконані умови (8.2) – (8.4), будемо називати траєкторіями Каталана. Побудуємо для $n = 2$ траєкторії, які задовольняють умову (8.4).



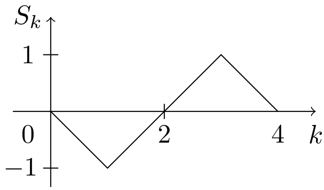
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, 1, -1, -1)$



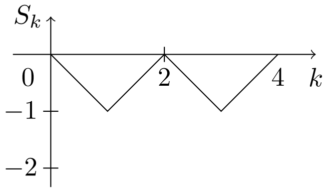
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, -1, 1, -1)$



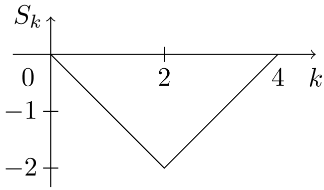
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1, -1, -1, 1)$



$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (-1, 1, 1, -1)$



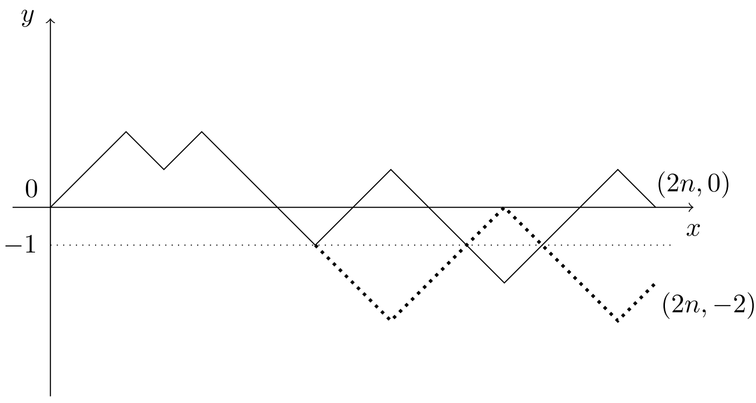
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (-1, 1, -1, 1)$



$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (-1, -1, 1, 1)$

При $n = 2$ число траєкторій, які задовольняють умову (8.4), дорівнює $C_{2n}^n = C_4^2 = 6$ (вони містять n компонент рівних 1 і n компонент рівних -1). Серед них лише дві є траєкторіями Каталана, $C_2 = 2$.

Легко помітити, що траєкторії Каталана не перетинають пряму $y = -1$. Знайдемо число траєкторій, які задовольняють умову (8.4) і перетинають пряму $y = -1$. Поставимо у відповідність кожній траєкторії T, яка перетинає або дотикається до прямої $y = -1$, нову траєкторію T' за таким правилом: до першої точки дотику з прямою $y = -1$ траєкторія T' збігається з T, а далі є симетричним образом траєкторії T відносно прямої $y = -1$ (на рисунку нижче траєкторія T' позначена пунктирною лінією). Всі траєкторії T' закінчуються в точці $(2n, -2)$, яка є симетричним образом точки $(2n, 0)$ відносно прямої $y = -1$.



Встановлена відповідність є взаємно однозначною. Тому число траєкторій, які задовольняють умову (8.4) і перетинають пряму $y = -1$, дорівнює числу ламаних, які сполучають точки $(0, 0)$ і $(2n, -2)$. Це число легко підрахувати: якщо така траєкторія містить u відрізків, які йдуть вниз, і v відрізків, які йдуть вгору, то

$$u + v = 2n, \tag{8.5}$$

а

$$v - u = -2. \tag{8.6}$$

Із системи рівнянь (8.5) – (8.6) випливає, що $v = n - 1$. Таким чином, число траєкторій, що перетинають пряму $y = -1$, дорівнює C_{2n}^{n-1}. Шукане число траєкторій дорівнює

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

Означення 8.2. Частинка виходить із точки 0 і на кожному кроці може пересуватись на 1 вправо або вліво. Координату точки після n кроків будемо позначати S_n, а такий рух називати *випадковим блуканням*.

Задачі для аудиторної роботи

1. Біля каси кінотеатру зібрались $m + n$ чоловік, причому n з них мають купюри вартістю 100 грн, а решта m – по 50 грн ($m \le n$). Вартість квитка 50 грн. Скількома різними способами вони можуть стати в чергу так, щоб жоден покупець не чекав решти за умови, що на початку роботи:

а) у касі немає грошей;

б) у касі є p купюр по 50 грн?

2. Задача Бертрана про балотування. Кандидат A зібрав на виборах a голосів, а кандидат B – b голосів $(a > b)$. Виборці голосували послідовно. Скільки є способів таких, що протягом голосування кандидат A був завжди попереду B за кількістю поданих за нього голосів?

3. Припустимо, що деяка частинка випадково блукає по прямій. Нехай $b > a > 0$. Скільки є різних шляхів частинки таких, що

$$S_1 < b, \ldots, S_{n-1} < b, S_n = a?$$

4. Нехай $a > c > 0,\ b > 0$. Скільки є різних шляхів частинки таких, що після попадання в точку a частинка не попадає в точку $-b$ і $S_n = c$?

5. Нехай u_n – число шляхів, у яких частинка повертається в точку 0 на n-му кроці, а f_n – число шляхів, у яких частинка вперше повертається в точку 0 на n-му кроці. Знайти u_n і довести співвідношення

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \ldots + f_{2n} u_0, \quad n \ge 1.$$

6. Довести, що число шляхів, у яких частинка жодного разу не повертається в точку 0 до $2n$ кроку включно, дорівнює u_{2n}.

7. Знайти число шляхів, у яких частинка вперше досягне свого кінцевого положення S_n лише на n-му кроці.

Додаткові задачі

1. В урні знаходяться a карток, позначених числом 0, і b карток, позначених числом $n+1$. Картки виймають з урни послідовно без повернення. Скільки є способів таких, що для всіх r $(r = 1, 2, \ldots, a+b)$ сума чисел на перших r картках менше r?

2. Нехай $a > 0,\ b > 0$ і $-b < c < a$. Скільки є різних шляхів частинки таких, що вона не попадає в точки a та $-b$ і має кінцеве положення $S_n = c$?

3. Геометрично довести, що

$$P(S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0) = 2f_{2n+2}.$$

4. Кількість шляхів, у яких до $2n$ кроку відбулось рівно r попадань частинки в точку 0, дорівнює кількості шляхів, у яких попадання в точку 0 відбулось на $2n$-му кроці і до цього кроку було хоча б r попадань. Довести це.

Задачі для самостійної роботи

1. Дехто випиває у випадковому порядку n склянок вина і n склянок води.

а) Обчислити скільки є таких способів, при яких кількість вина після кожної склянки не перевищуватиме кількості випитої води.

б) Скільки способів того, що рівно після $2r$ склянок кількість випитого вина не перевищує кількість випитої води.

2. Монету підкинули $2n$ разів. Відомо, що герб і решітка випали однакову кількість разів. Скільки способів того, що в процесі підкидання число випадання герба було весь час попереду числа випадання решітки?

3. Нехай $a > 0$, $b > 0$. Скільки є різних шляхів частинки таких, що

$$S_1 > -b, \ldots, S_{n-1} > -b, S_n = a?$$

4. Знайти число шляхів, у яких $S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0$.

5. Знайти число шляхів f_{2n}, у яких частинка вперше повертається в точку 0 на $2n$ кроці.

ЗАНЯТТЯ 9

Звичайна та експоненційна генератриси

Теорема 9.1. *Нехай α – дійсне число і*

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1),\ k\in\mathbb{N}, \quad (\alpha)_0 = 1.$$

При $|t|<1$ виконується рівність

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} t^k. \tag{9.1}$$

Означення 9.2. Ряд (9.1) називають *біноміальним рядом Ньютона*, а коефіцієнти цього ряду – *біноміальними коефіцієнтами* і позначають

$$C_\alpha^k = \frac{(\alpha)_k}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Приклад 9.3. При $|t|<1$ виконується рівність

$$\frac{1}{(1-t)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha+k-1}^k t^k.$$

Доведення. Скористаємось формулою (9.1):

$$\frac{1}{(1-t)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{-\alpha}^k (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-k+1)}{k!}(-1)^k t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha+k-1}^k t^k.$$

□

Означення 9.4. *Генератрисою послідовності* $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ називають функцію

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \tag{9.2}$$

(припускається, що ряд у правій частині рівності (9.2) збігається в деякому проміжку $(-c,c)$.)

Приклад 9.5. Знайти генератрису послідовності $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2\ldots$
Розв'язок. За означенням

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}, \quad t \in (-1, 1).$$

Теорема 9.6. *За генератрисою однозначно відновлюється послідовність* $\{a_n\}$:

$$a_n = \frac{\mathcal{A}^{(n)}(0)}{n!}.$$

Означення 9.7. *Композиція послідовностей* $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ – це послідовність $\{c_n\}$ така, що

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Теорема 9.8. *Якщо* $\mathcal{A}(t)$ *і* $\mathcal{B}(t)$ *генератриси послідовностей* $\{a_n\}$ *і* $\{b_n\}$ *відповідно, то генератриса* $\mathcal{C}(t)$ *композиції* $\{c_n\}$ *послідовностей* $\{a_n\}$ *і* $\{b_n\}$ *дорівнює* $\mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t)$*:*

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{B}(t).$$

Приклад 9.9. Доведемо пару взаємно обернених співвідношень (задача А.1 заняття 7):

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}, \tag{9.3}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a_{n-k}}{k!}. \tag{9.4}$$

Доведення. Припустимо, що виконується рівність (9.3). Тоді за теоремою 9.8

$$\mathcal{A}(t) = e^t \mathcal{B}(t),$$

де $\mathcal{A}(t)$ і $\mathcal{B}(t)$ – генератриси послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ відповідно, e^t – генератриса послідовності $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$. Звідси

$$\mathcal{B}(t) = e^{-t}\mathcal{A}(t).$$

І тоді за тою самою теоремою 9.8 маємо, що послідовність $\{b_n\}$ є композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\left\{\frac{(-1)^n}{n!}\right\}$, тобто виконується (9.4). Як видно з доведення, формули (9.3) і (9.4) є взаємно оберненими. □

Означення 9.10. *Експоненційна генератриса* послідовності $\{a_n\}$ – це сума ряду

$$\mathcal{A}_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

Приклад 9.11. Знайти експоненційну генератрису послідовності $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Розв'язок. За означенням

$$\mathcal{A}_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Означення 9.12. *Біноміальною композицією* послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$ така, що

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k}.$$

Теорема 9.13. *Якщо $\mathcal{A}_e(t)$ і $\mathcal{B}_e(t)$ – експоненційні генератриси послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ відповідно, то експоненційна генератриса $\mathcal{C}_e(t)$ біноміальної композиції $\{c_n\}$ послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дорівнює*

$$\mathcal{C}_e(t) = \mathcal{A}_e(t)\mathcal{B}_e(t).$$

Приклад 9.14. Має місце рівність

$$(\alpha + \beta)_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha)_k (\beta)_{n-k}. \tag{9.5}$$

Доведення. Запишемо такі рівності:

$$(1+t)^{\alpha+\beta} = (1+t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}.$$

Тоді з теорем 9.1 і 9.13 і випливає рівність (9.5), яку також називають *співвідношенням Вандермонда*. □

Приклад 9.15. Знайти генератрису послідовності f_m^n – числа комбінацій із m по n з повтореннями.

Розв'язок. Нагадаємо, що комбінаціями з повтореннями називаються групи, які містять n предметів, причому кожен предмет є одного з m типів і порядок предметів у групі не є істотним. Всі комбінації з m по n можна розділити на два класи: ті, які не містять предметів першого типу (їхня кількість дорівнює f_{m-1}^n), і ті, які містять принаймні один предмет першого типу (їхня кількість дорівнює f_m^{n-1}, бо кожна така комбінація одержується приєднанням до предмета першого типу деякої комбінації із $m-1$ по n). Тому

$$f_m^n = f_{m-1}^n + f_m^{n-1}. \tag{9.6}$$

Зазначимо, що $f_1^n = 1$, а для того, щоб рівність (9.6) виконувалась при $m = 1$, покладемо $f_0^n = 1$.

Нехай $\mathcal{A}_m(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_m^n t^n$. Помноживши (9.6) на t^n і розглянувши суму по всіх n від нуля до нескінченності, будемо мати

$$\mathcal{A}_m(t) = A_{m-1}(t) + t\mathcal{A}_m(t),$$

звідки отримуємо

$$\mathcal{A}_m(t) = \frac{1}{1-t} A_{m-1}(t). \tag{9.7}$$

З рівності (9.7) випливає, що

$$\mathcal{A}_m(t) = \frac{1}{1-t} A_{m-1}(t) = \frac{1}{(1-t^2)} A_{m-2}(t) = \ldots = \frac{1}{(1-t)^{m-1}} \mathcal{A}_1(t).$$

Але

$$\mathcal{A}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Отже,

$$\mathcal{A}_m(t) = \frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+m-1}^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_m^n t^n.$$

Таким чином,

$$f_m^n = C_{n+m-1}^n.$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти звичайну та експоненційну генератрису послідовностей:

а) $a_0 = a_1 = \ldots = 1$;

б) $a_n = \alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$;

в) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0, \; a_k = (k)_j, \; k \geq j$.

2. Виразити генератрису послідовності $\{b_n\}$ через генератрису послідовності $\{a_n\}$, якщо

а) $b_n = a_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots$;

б) $b_n = \alpha^n a_n, \quad n = 0, 1, \ldots$.

3. Якій послідовності відповідає генератриса $(1-x)^{-n}$?

4. Розкласти у біноміальний ряд Ньютона функцію $\sqrt{1-x}$.

5. Скількома способами можна заплатити 29 гривень купюрами по 2 і 5 гривень?

6. Знайти послідовність $\{a_n\}$ таку, що

$$a_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1$$

для всіх $n \geq 1$.

7. Довести пару взаємно обернених співвідношень за допомогою генератрис:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{k} b_{n-k} \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{p+1}^{k} a_{n-k}.$$

8. Скількома способами можна розбити опуклий $(n+2)$-кутник на трикутники діагоналями, що не перетинаються всередині цього багатокутника?

9. Задача про розставляння дужок. Скількома способами можна перемножити n чисел, які стоять у заданому порядку?

Додаткові задачі

1. Знайти генератриси послідовностей:

а) $a_n = \begin{cases} C_{n+p-2}^{n-1}, & n > 0; \\ 0, & n = 0; \end{cases}$

б) $a_n = \sin(\alpha n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Знайти генератрису послідовності b_n через генератрису послідовності a_n, якщо

а) $b_n = a_{n+1} - a_n, \quad n = 0, 1, \ldots;$

б) $b_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i, \quad n = 0, 1, \ldots$.

3. Знайти експоненційну генератрису $F^e(t)$ послідовності F_n через експоненційну генератрису $f^e(t)$ послідовності f_n, якщо:

а) $F_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 0, \ldots, k-1; \\ f_{n-k}, & \text{якщо } n \geq k; \end{cases}$

б) $$F_n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n,\ k_i \geq 0} \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} f_1^{k_1} \ldots f_m^{k_m}.$$

4. Показати, що якщо

$$a_k = C_k^0 + \ldots + C_{k+j}^{2j} + \ldots + C_{2k}^{2k},\ k \geq 0;$$
$$b_k = C_k^1 + \ldots + C_{k+j}^{2j+1} + \ldots + C_{2k-1}^{2k-1},\ k > 0,$$

то $a_{k+1} = a_k + b_{k+1}$, $b_{k+1} = a_k + b_k$ ($a_0 = 1$, $b_0 = 0$). Довести співвідношення для генератрис:

$$A(t) - 1 = tA(t) + B(t), \quad B(t) = tA(t) + tB(t),$$

знайти $A(t)$, $B(t)$.

5. Нехай $A_e(t)$ та $B_e(t)$ – експоненційні генератриси послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$ відповідно, де $a_0 = 0, b_0 = 1$. Довести, що $B_e(t) = e^{A_e(t)}$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $n \geq 0$ виконується:

$$b_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a_{j+1} b_{n-j}.$$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти генератриси послідовностей:

а) $a_n = \begin{cases} (n+1)(n+2), & n = 0, 1, \ldots, N-1; \\ 0, & n \geq N; \end{cases}$

б) $a_n = n\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Виразити експоненційну генератрису $F^e(t)$ послідовності $\{F_n\}$ через експоненційну генератрису $f^e(t)$ послідовності $\{f_n\}$ та експоненційну генератрису $g^e(t)$ послідовності $\{g_n\}$, якщо:

а) $F_n = f_{n+1}, n = 0, 1, \ldots;$

б) $F_n = f_{n+1} - f_n, n = 0, 1, \ldots;$

в) $F_n = \sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r f_{n-r} g_r, n = 0, 1, \ldots;$

г) $F_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 0; \\ f_{n-1}, & \text{якщо } n \geq 1. \end{cases}$

3. Якій послідовності відповідає генератриса $\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$?

4. На колі взято $2n$ точок. Скількома способами можна сполучити попарно ці точки n хордами, які не перетинаються всередині круга?

5. Скількома способами можна отримати суму 12 очок при довільній кількості підкидань грального кубика?

6. Нехай A_n – число цілих невід'ємних розв'язків $x_1, x_2, \ldots, x_r$ рівняння

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots k_r x_r = n.$$

Знайти генератрису послідовності $\{A_n\}$.

ЗАНЯТТЯ 10

Числа Фібоначчі

Означення 10.1. Послідовність *чисел Фібоначчі* F_n будується так:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Приклад 10.2. Наведемо кілька перших чисел послідовності Фібоначчі:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	337

Теорема 10.3. *Має місце рівність (формула Біне):*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}.$$

Приклад 10.4. Довести таку властивість чисел Фібоначчі:

$$F_3 + F_6 + \ldots + F_{3n} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2}.$$

Розв'язок. Скористаємось методом математичної індукції. Легко перевірити, що для $n = 1$ рівність виконується. Припустимо, що твердження виконується при $n = k$. Покажемо, що воно виконується і при $n = k + 1$. Дійсно,

$$F_3 + F_6 + \ldots + F_{3k} + F_{3k+3} = \frac{F_{3k+2} - 1}{2} + F_{3k+3} =$$

$$= \frac{F_{3k+4} + F_{3k+3} - 1}{2} = \frac{F_{3(k+1)+2} - 1}{2}.$$

Теорема 10.5. ***Фібоначчієва система числення.*** *Будь-яке натуральне число n має єдине зображення виду*

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i F_i, \tag{10.1}$$

де F_i – числа Фібоначчі, $a_i = 0$ або 1 та $a_i a_{i+1} = 0$ для $i \geq 1$.

Ця система числення нагадує двійкову систему числення, за винятком того, що в ній ніколи не зустрічаються дві одиниці підряд. Будь-яке натуральне число n можна зобразити у вигляді набору нулів і одиниць, поклавши

$$n = (a_2 \ldots a_{m-1} a_m 1)_F \quad \Leftrightarrow \quad n = \sum_{i=2}^{m} a_i F_i.$$

Одиниця в кінці коду ставиться для того, щоб відділити одне число від іншого.

Подамо для прикладу зображення перших дев'яти чисел у системі числення Фібоначчі:

$$\begin{array}{lll} 1=(11)_F; & 2=(011)_F; & 3=(0011)_F; \\ 4=(1011)_F; & 5=(00011)_F; & 6=(10011)_F; \\ 7=(01011)_F; & 8=(000011)_F; & 9=(100011)_F; \\ 10=(010011)_F. & & \end{array}$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти генератрису послідовності $\{F_n\}$ чисел Фібоначчі.

2. Довести рівності:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2}-1$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$.

3. Довести, що

а) $F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}$;

б) для довільних натуральних m і $n=km$ число F_n ділиться на F_m;

в) два сусідніх члени послідовності Фібоначчі взаємно прості.

4. Довести тотожність Кассіні:

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n-1}.$$

5. Знайти число таких підмножин множини $\Omega=\{1,2,...,n\}$, які не містять жодних двох послідовних чисел.

6. Знайти число розкладів числа n на частини, які більші за 1.

7. Довести такий зв'язок між числами Фібоначчі й біноміальними коефіцієнтами:

$$F_n=C_{n-1}^0+C_{n-2}^1+\ldots+C_{n-p-1}^p,$$

де p – найбільше можливе число, $p=\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

8. Довести рівності:

а) $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}$;

б) $F_1F_2+F_2F_3+\ldots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$.

9. Записати у Фібоначієвій системі числення послідовність чисел

12, 45, 20, 56.

10. Розшифрувати яку послідовність чисел було зашифровано у Фібоначієвій системі числення 0000011101110101001110010011.

Додаткові задачі

1. Чи знайдеться серед перших 100 000 001 членів послідовності Фібоначчі число, яке закінчується чотирма нулями?

2. Довести теорему 10.5 про існування і єдиність зображення (10.1) довільного натурального числа n.

3. Довести рівності:

а) $nF_1 + (n-1)F_2 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3)$;

б) $F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$.

4. Довести тотожність Каталана:

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2.$$

5. Нерозв'язана проблема. Кількість простих чисел серед чисел Фібоначчі скінченна чи нескінченна?

Задачі для самостійної роботи

1. Знайдіть найбільший спільний дільник 1000-го і 550-го членів послідовності Фібоначчі.

2. Довести рівності для чисел Фібоначчі:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$; б) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$;

3. У послідовності Фібоначчі вибрано 8 чисел, розташованих підряд. Доведіть, що їх сума не входить у цю послідовність.

4. (Золотий переріз) Показати, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

5. Довести, що число Фібоначчі F_m ділиться на F_n^2 тоді і лише тоді, коли m кратне nF_n.

6. Знайти число розкладів числа n на частини, які дорівнюють 1 або 2.

7. Знайти число розкладів числа n на непарні доданки.

8. Довести тотожності

а) $\sum\limits_{i=0}^{n} iF_i = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$;

б) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$.

9. Записати у Фібоначчієвій системі числення послідовність чисел

11, 40, 21, 49.

10. Розшифрувати яку послідовність чисел було зашифровано у Фібоначчієвій системі числення 0100011000010011000101110011.

ЗАНЯТТЯ 11

Числа Стірлінга

Числа Стірлінга першого роду

Означення 11.1. Розкладемо за степенями x спадний факторіальний степінь $(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$, $(x)_0 = 1$:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{11.1}$$

Числа $s(n,k)$ у розкладі (11.1) називають *числами Стірлінга першого роду*.

Приклад 11.2. $(x)_1 = x$. Тому $s(1,0) = 0$, $s(1,1) = 1$.

Приклад 11.3. $(x)_2 = x(x-1) = -x + x^2$. Тому $s(2,0) = 0$, $s(2,1) = -1$, $s(2,2) = 1$.

Приклад 11.4. Складемо таблицю перших чисел Стірлінга першого роду.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	-6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-225	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

Числа Стірлінга другого роду

Позначимо через $\mathcal{P}_n$ сукупність усіх многочленів, степінь яких не перевищує n. $\mathcal{P}_n$ – лінійний простір відносно операції додавання і множення на дійсні числа. Неважко перевірити, що система многочленів з $\mathcal{P}_n$

$$(x)_0,\ (x)_1,\ \dots,(x)_n$$

лінійно незалежна і є базисом у $\mathcal{P}_n$.

Означення 11.5. Представимо x^n у вигляді лінійної комбінації многочленів $(x)_0, \dots, (x)_n$:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k. \tag{11.2}$$

Числа $S(n,k)$ у розкладі (11.2) називають *числами Стірлінга другого роду*.

Приклад 11.6. Оскільки $x = (x)_1$. Тому $S(1,1) = 1$, $S(1,0) = 0$.

Приклад 11.7. $x^2 = x(x-1)+x = (x)_2+(x)_1$. Тому $S(2,0) = 0$, $S(2,1) = 1$, $S(2,2) = 1$.

Розглянемо множину X, яка містить $n \geq 1$ елементів. Позначимо через $T_{n,k}$ число розбиттів цієї множини на k непорожніх підмножин.

Приклад 11.8. Нехай $X = \{1,2,3\}$. Тоді $T_{3,1} = 1$, бо є лише одне розбиття на одну множину – сама множина. Розбиттів на дві множини є три:

$$X = \{1,2\} \cup \{3\}, \quad X = \{1,3\} \cup \{2\}, \quad X = \{2,3\} \cup \{1\},$$

тому $T_{3,2} = 3$. Є одне розбиття на три множини: $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$, тому $T_{3,3} = 1$.

Теорема 11.9. *Має місце рекурентне співвідношення*

$$T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + kT_{n-1,k}.$$

З теореми 11.9 як наслідок випливає таке твердження.

Теорема 11.10. *Число Стірлінга другого роду $S(n,k)$ – це число розбиттів множини, що містить n елементів, на k множин.*

Означення 11.11. Нехай B_n – число різних способів розбиття множини, яка містить $n \geq 1$ елементів. Ці числа називають *числами Бела*.

Приклад 11.12. З теореми 11.10 випливає така властивість чисел Бела:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k).$$

Означення 11.13. Припустимо, що функція $f(x)$ така, що її область визначення разом з точкою x містить і точку $x+1$. Операцію переходу від $f(x)$ до $f(x+1) - f(x)$ називають *різницевим оператором*:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{11.3}$$

З (11.3) випливає така властивість оператора Δ.

Теорема 11.14. *Оператор Δ є лінійним оператором, тобто для будь-яких сталих c_1 і c_2*

$$\Delta(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \Delta f(x) + c_2 \Delta g(x).$$

Приклад 11.15. $\Delta(ax+b)=a$.

Справді, $\Delta(ax+b)=(a(x+1)+b)-(ax+b)=a$.

Означення 11.16. Індуктивно, за допомогою рівності

$$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x)),$$

означимо оператор Δ^n, дія якого полягає в n-кратному застосуванні оператора Δ.

Приклад 11.17. За означенням,

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta(f(x+1)-f(x))=$$

$$=(f(x+2)-f(x+1))-(f(x+1)-f(x))=$$

$$=f(x+2)-2f(x+1)+f(x).$$

Задачі для аудиторної роботи

1. Використовуючи означення чисел Стірлінга першого роду, довести, що

а) $s(n,0)=0$, $n\geq 1$;

б) $s(n,n)=1$;

в) $s(n,1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$;

г) $s(n,n-1)=-C_n^2$.

2. Встановити рекурентне співвідношення для чисел Стірлінга першого роду:

$$s(n+1,k)=s(n,k-1)-ns(n,k),\quad 1\leq k\leq n.$$

3. Використовуючи означення чисел Стірлінга другого роду, встановити, що

а) $S(3,1)=1$, $S(3,2)=3$, $S(3,3)=1$;

б) $S(n,n)=1$, $S(n,k)=0$,

в) $S(n,k)=0$, $k>n$.

4. Використовуючи означення чисел Стірлінга другого роду, встановити рекурентне співвідношення

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k),\quad 1\leq k\leq n. \tag{11.4}$$

5. Властивість ортогональності чисел Стірлінга. Довести, що

$$\sum_{k=j}^{n} s(n,k)S(k,j)=\delta_n^j,$$

де δ_n^j – символ Кронекера:

$$\delta_n^j = \begin{cases} 1, & n = j; \\ 0, & n \neq j. \end{cases}$$

6. Довести, що мають місце взаємно обернені співвідношення

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) b_k \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) a_k.$$

7. Нехай $f(x) = x^3$. Обчислити $\triangle f(x),\ \triangle^2 f(x),\ \triangle^3 f(x),\ \triangle^4 f(x)$.

8. Нехай $f(x)$ – функція, яка визначена при всіх цілих x, $\triangle$ – різницевий оператор. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\triangle^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(x+n-k). \tag{11.5}$$

9. Довести, що:

а) $\triangle (x)_n = n(x)_{n-1}$;

б) $\triangle^k (x)_n = (n)_k (x)_{n-k}$ при $k \leq n$;

в) $\triangle^k (x)_n = 0$ при $k > n$.

10. Використовуючи рівність (11.5) і результати попередньої задачі, встановити, що

$$S(n,k) = \frac{\Delta^k 0^n}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (k-j)^n,$$

де запис $\Delta^k 0^n$ означає вираз $\Delta^k x^n$ при підстановці $x = 0$.

11. Нехай $T_{n,k}$ – число розбиттів множини, яка містить n елементів, на k множин. Довести, що:

а) $T_{n,n} = 1,\ T_{n,n-1} = C_n^2,\ T_{n,2} = 2^{n-1} - 1$;

б) $T_{n,k} = T_{n-1,k-1} + kT_{n-1,k}$;

в) $T_{n,k} = S(n,k)$.

12. Довести, що число способів розміщення n різних предметів по m однакових коробках, при умові, що жодна із них не залишиться порожньою, визначається числом Стірлінга 2-го роду $S(n,m)$, а при відсутності цього обмеження – числом Бела B_n.

13. Довести формулу Добінського:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!}.$$

Додаткові задачі

1. Знайти експоненційну генератрису послідовності $\{p_n(k)\}$, де $p_n(k)$ – кількість n-перестановок з повтореннями із k елементів, у яких кожен елемент з'являється хоча б один раз. Знайти $p_n(k)$.

Довести, що

$$S(n,k) = \frac{p_n(k)}{k!}.$$

2. Нехай $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ – оператор диференціювання, $f(x)$ – n раз диференційовна функція. Довести, що

$$(xD)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^k D^k f(x).$$

3. Назвемо *многочленом Стірлінга* поліном:

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) y^k, \quad P_0(y) = 1.$$

Показати, що

$$P_n(y) = y\left(\frac{\mathrm{d}P_{n-1}(y)}{\mathrm{d}y} + P_{n-1}(y)\right).$$

4. Довести, що для чисел Стірлінга 1-го роду і многочленів Стірлінга виконуються співвідношення:

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k) P_k(x) = x^n, \quad n \geq 0.$$

5. Розглянемо такі генератриси: $S_0(z) = 1$ і

$$S_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n+k,k) z^n.$$

Довести рекурентні співвідношення

$$(1-kz)S_k(z) = S_{k-1}(z),$$
$$(1-z)(1-2z)\ldots(1-kz)S_k(z) = 1.$$

6. Показати, що для експоненційної генератриси

$$y_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n,k)\frac{t^n}{n!}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad (y_0(t) = 1)$$

виконується рекурентне співвідношення

$$(1+t)\frac{\mathrm{d}y_k(t)}{\mathrm{d}t} = y_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Довести, що

$$y_k(t) = \frac{[\ln(1+t)]^k}{k!}.$$

7. Довести, що генератриса

$$s(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \frac{t^n}{n!}$$

дорівнює $(1+t)^x$.

8. Показати, що для всіх натуральних чисел k_1, k_2, d справедлива рівність

$$C_{k_1+k_2}^{k_1} s(d+k_1+k_2, k_1+k_2) = \sum_{d_1+d_2=d} C_{d+k_1+k_2}^{k_1+d_1} s(d_1+k_1, k_1)s(d_2+k_2, k_2).$$

9. Довести, що

$$s(n, k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}(n-j)!C_{n+1}^{j} s(j,k).$$

10. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k = [x]_k,$$

де $[x]_k$ – зростаючий факторіальний степінь, $[x]_k = x(x+1)\dots(x+k-1)$.

Задачі для самостійної роботи

1. Використовуючи означення та рекурентне співвідношення, скласти таблицю перших чисел Стірлінга другого роду.

2. Показати, що число способів розміщення n різних предметів в m різних коробках, при умові, що p коробок були зайняті, а $m-p$ порожні, дорівнює

$$\mu_p(n,m) = m(m-1)\dots(m-p+1)S(n,p).$$

3. Довести, що число, яке дорівнює добутку n різних простих множників, можна зобразити у вигляді добутку m множників $S(n,m)$ різними способами.

4. Довести тотожність

$$S(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i S(i,k-1).$$

5. Дати комбінаторну інтерпретацію тотожності

$$m^n = \sum_{p=1}^{m} (m)_p S(n,p),$$

де m – ціле додатне число.

6. Довести, що має місце тотожність

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!},$$

де сума розглядається по всіх цілих додатних $r_1, \ldots, r_k$ таких, що

$$r_1 + \ldots + r_k = n.$$

7. Перевірити, що

$$S(n,n-2) = \sum_{i=1}^{n-2} (n-i-1) C_{n-i}^2, \quad n \geq 3.$$

8. Нехай також $B_0 = 1$. Довести, що для чисел Бела виконується рекурентне співвідношення

$$B_{n+1} = C_n^0 B_0 + C_n^1 B_1 + \ldots + C_n^n B_n, \quad n \geq 0. \tag{11.6}$$

9. Використовуючи рівність $\Delta(e^{tx}) = e^{tx}(e^t - 1)$, довести, що експоненційна генератриса $S(n,k)$ при фіксованому k має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^k}{k!}.$$

10. Нехай $B(t)$ – експоненційна генератриса чисел Бела. Довести, що

$$B(t) = e^{e^t - 1}.$$

11. Довести, що коли p – просте число, то

$$B_{n+p^m} \equiv \sum_{k=1}^{n} (B_{p^m} + k) S(n,k) \mod p.$$

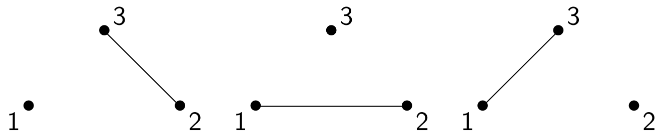
ЗАНЯТТЯ 12

Основні поняття теорії графів

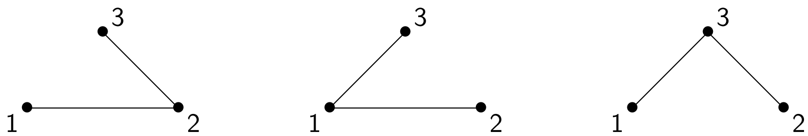
Нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – деяка скінченна множина (множина вершин), $\mathcal{M}_2$ – множина всіх невпорядкованих пар елементів із X, $\mathcal{M}_2 = \{(x_i, x_j)\colon x_i \in X,\, x_j \in X,\, i < j\}$.

Означення 12.1. *Граф* $\Gamma(X, W)$ – геометрична конфігурація, яка складається з множини вершин X і множини ребер $W \subset \mathcal{M}_2$. Вершини x_i та x_j графа називають *інцидентними* (*суміжними*), якщо ребро $(x_i, x_j) \in W$.

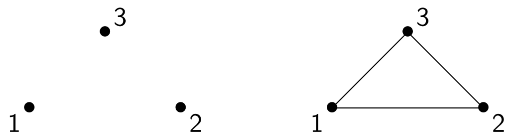
Приклад 12.2. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$. Побудуємо всі графи з множиною вершин X. Тоді $\mathcal{M}_2 = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,3)\}$. Маємо 8 графів:



1) $W = \{(2,3)\}$ 2) $W = \{(1,2)\}$ 3) $W = \{(1,3)\}$



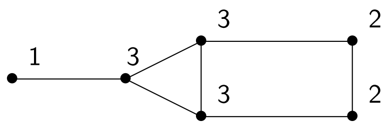
4) $W = \{(1,2);(2,3)\}$ 5) $W = \{(1,2);(1,3)\}$ 6) $W = \{(2,3);(2,3)\}$



7) $W = \emptyset$ 8) $W = \mathcal{M}_2 = \{(1,2);(1,3);(2,3)\}$

Означення 12.3. *Степенем* $d(x_i)$ вершини графа Γ називають число вершин x_j, інцидентних вершині x_i.

Приклад 12.4. На наступному рисунку вказано степені вершин графа.

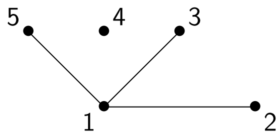


Означення 12.5. Якщо $d(x_i) = 1$, то вершину x_i називають *кінцевою* вершиною графа Γ, якщо $d(x_i) = 0$, то вершину x_i називають *ізольованою*. У разі, коли всі вершини мають однаковий степінь, граф називають *регулярним.*

Нехай $a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in W, \\ 0, & (x_i, x_j) \notin W. \end{cases}$

Означення 12.6. Матрицю $A = (a_{ij})$ називають *матрицею інцидентності (суміжності)* графа $\Gamma(X, W)$.

Приклад 12.7. Запишемо матрицю інцидентності графа $\Gamma(X, W)$, зображеного на рисунку:



$X = \{1, 2, 3\}$, $W = \{(1, 2); (1, 3)\}$

Відповідь:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення 12.8. Послідовність вершин і ребер x_{i_1}, (x_{i_1}, x_{i_2}), x_{i_2}, (x_{i_2}, x_{i_3}), $x_{i_3}, \ldots, (x_{i_{n-2}}, x_{i_{n-1}})$, $x_{i_{n-1}}$, $(x_{i_{n-1}}, x_{i_n})$, x_{i_n}, у якій сусідні ребра інцидентні одній і тій же вершині, називають *маршрутом*. Вказаний маршрут з'єднує вершини x_{i_1} та x_{i_n}, і його можна позначати $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}$ (наявність ребер припускається).

Маршрут графа називають *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні, і *простим ланцюгом*, якщо всі його вершини різні. Замкнений ланцюг називають *циклом*. Замкнений маршрут називають *простим циклом*, якщо всі його n вершин різні і $n \geq 3$.

Означення 12.9. *Відстанню* $d(u, v)$ між двома вершинами u і v графа Γ називають довжину найкоротшого простого ланцюга, який їх з'єднує. Якщо u і v не з'єднані, покладемо $d(u, v) = \infty$. Найкоротший простий $u \ldots v$-ланцюг також називають *геодезичним*.

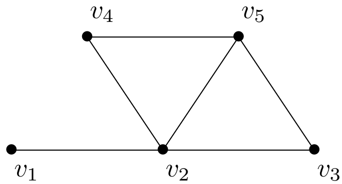
Означення 12.10. *Діаметром* $d(\Gamma)$ зв'язного графа Γ називають довжину найдовшого геодезичного ланцюга в ньому:

$$d(\Gamma) = \max_{u,v \in \Gamma} d(u, v).$$

Вершина є *центральною* в Γ, якщо відстань від неї до будь-якої іншої вершини є найменшою. Ця відстань є *радіусом* Γ і позначається, як $r(\Gamma)$:

$$r(\Gamma) = \min_{u\in\Gamma} \max_{v\in\Gamma} d(u, v).$$

Приклад 12.11. Розглянемо граф Γ на рисунку нижче:

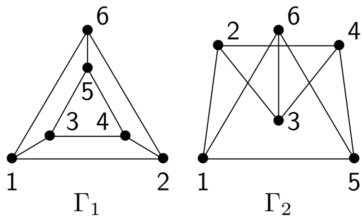


На ньому v_1, v_2, v_5, v_2, v_3 – маршрут, який не є ланцюгом, а $v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3$ – ланцюг, але не простий ланцюг, v_1, v_2, v_5, v_4 – простий ланцюг, v_2, v_4, v_5, v_2 – простий цикл.

Діаметр графа $d(\Gamma) = 2$, центральною у ньому є вершина v_2, відстань від якої до будь-якої іншої вершини графа Γ дорівнює $r(\Gamma) = 1$.

Означення 12.12. Два графи G і H ізоморфні (позначається $G \simeq H$), якщо між їх множинами вершин існує взаємно однозначна відповідність, яка зберігає суміжність.

Приклад 12.13. Показати, що графи Γ_1 та Γ_1 ізоморфні:



Розв'язок. Досить просто побудувати бієктивне відображення між множинами вершин графів Γ_1 і Γ_2, яке зберігає суміжність:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Дійсно, вершина 1 графа Γ_1 суміжна з вершинами 2, 3 і 6, а її образ – вершина 1 графа Γ_2 теж суміжна з відповідними образами – вершинами 5, 2 і 6. Перевіряючи послідовно так вершини далі, отримуємо, що $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Означення 12.14. Кажуть, що граф $\Gamma(X', W')$ є *підграфом* графа $\Gamma(X, W)$, якщо $X' \subset X$, $W' \subset W$. Якщо $X' = X$, то підграф $\Gamma(X', W')$ називають *остовним* підграфом.

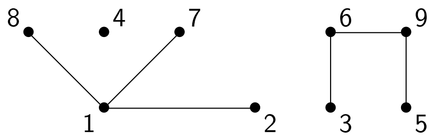
Означення 12.15. Граф $\Gamma(X, W)$ називають зв'язним, якщо будь-які дві вершини $x_i \in X$ та $x_j \in X$ можна сполучити ланцюгом.

Означення 12.16. Граф $\Gamma(X, W)$ є *сумою* графів $\Gamma(X_1, W_1), \ldots, \Gamma(X_k, W_k)$, якщо

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i, \quad W = \bigcup_{i=1}^{k} W_i.$$

Цю суму називають *прямою*, якщо $X_i \cap X_j = \emptyset, i \neq j$. Такі графи називають *компонентами зв'язності*.

Приклад 12.17. Знайти компоненти зв'язності графа, зображеного на рисунку:



Відповідь. Граф складається з трьох компонент зв'язності:

$$X_1 = \{1, 2, 7, 8\}, \quad X_2 = \{4\}, \quad X_3 = \{3, 5, 6, 9\}.$$

Означення 12.18. *Декартовим добутком графів $G(X, V)$ і $H(Y, U)$* називають граф $G \times H$, вершинами якого є пари вигляду (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, і в якому вершини (x_1, y_1) та (x_2, y_2) суміжні тоді і лише тоді, коли суміжна хоча б одна з пар x_1, x_2 (у графі G) чи y_1, y_2 (у графі H).

Задачі для аудиторної роботи

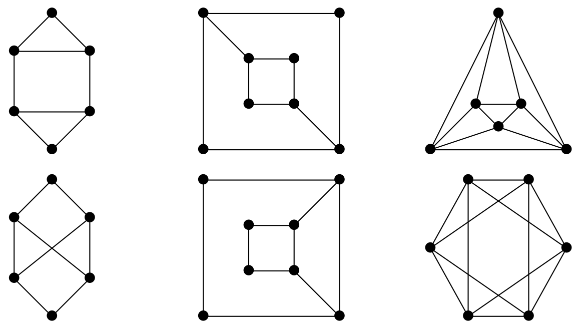
1. Чому дорівнює число ребер повного графа з n вершинами?

2. Знайти число всіх різних графів з n вершинами.

3. Довести, що сума степенів вершин графа завжди парна.

4. Нехай Γ_n – граф з множиною вершин $\{x_1, \ldots, x_n\}$, в якому вершини x_i та x_j є суміжними, лише якщо числа i та j взаємно прості. Побудувати графи Γ_4 і Γ_6 та знайти їхні матриці суміжності. Показати, що якщо $m < n$, то $\Gamma_m \subset \Gamma_n$.

5. Для кожної з пари графів з'ясувати, чи вони ізоморфні. Вказати ізоморфне відображення або довести, що його не існує.



а) б) в)

6. Довести, що у графі з не менш, ніж двома вершинами, знайдуться дві вершини однакового степеня.

7. (Лема про рукостискання) Нехай задано граф $\Gamma(X, W)$ з множиною вершин $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Довести, що

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2|W|.$$

8. Нехай граф $\Gamma(X, W)$ складається з n вершин, m ребер і k компонент зв'язності. Довести нерівність

$$n - k \leq m \leq C_{n-k+1}^{2}.$$

9. Нехай у графі Γ степінь кожної вершини не менше r, де $r \geq 2$. Довести, що у Γ існує цикл завдовжки принаймні $r + 1$.

10. Показати, що у зв'язному графі будь-які два найдовші прості ланцюги мають спільну вершину.

11. Довести, що для довільного графа Γ має місце таке співвідношення між його радіусом і діаметром:

$$r(\Gamma) \leq d(\Gamma) \leq 2r(\Gamma).$$

12. Нехай у графі серед довільних чотирьох вершин знайдеться вершина, суміжна з трьома іншими. Довести, що радіус графа дорівнює одиниці.

13. Нехай $\Gamma(X, W)$ – незв'язний граф. Довести, що граф $\Gamma(X, \overline{W})$ є зв'язним, де $\overline{W}$ – це доповнення до множини W.

Додаткові задачі

1. Нехай $\delta(\Gamma) = \min\{d(v)\colon v \in \Gamma\}$ – мінімальний степінь графа Γ. Показати, що кожен граф Γ містить ланцюг завдовжки $\delta(\Gamma)$ і цикл завдовжки $\delta(\Gamma) + 1$ (за умови, що $\delta(\Gamma) \geq 2$).

2. Довести, що для довільного графа Γ, який містить цикл, справедливе співвідношення:

$$g(\Gamma) \leq 2d(\Gamma) + 1,$$

де $g(\Gamma)$ – обхват графа – довжина найкоротшого простого циклу графа Γ (якщо він є).

3. Показати, що граф радіуса не більше за k і максимальним степенем, який не перевищує d, має не більше за $1 + kd^k$ вершин.

4. Нехай граф Γ містить цикл C, і припустимо, що Γ містить шлях завдовжки не менше k між двома вершинами з C. Показати, що Γ містить цикл завдовжки не менш, ніж $\sqrt{k}$.

5. Нехай Γ – граф із множиною вершин $\{v_1, \ldots, v_n\}$ і матрицею суміжності A. Показати, що число маршрутів довжини k з v_i в v_j дорівнює (i, j)-ому елементу матриці A^k. Показати також, що якщо Γ – простий граф, то число трикутників (циклів завдовжки 3) в Γ дорівнює $\dfrac{\mathrm{tr}A^3}{6}$, де $\mathrm{tr}A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ – слід матриці A. Чи правда, що число циклів завдовжки 4 дорівнює $\dfrac{\mathrm{tr}A^4}{8}$?

6. (Екстремальна теорема Турана) Нехай Γ – граф з $2n$ вершинами, який не містить трикутників. Довести, що в Γ не більше n^2 ребер, і навести приклад, коли ця межа досягається.

7. Найменший граф, у якому кожне ребро належить принаймні двом трикутникам і жодне ребро не належить повному графу з 4 вершинами, має 8 вершин 19 ребер. Побудувати його.

Задачі для самостійної роботи

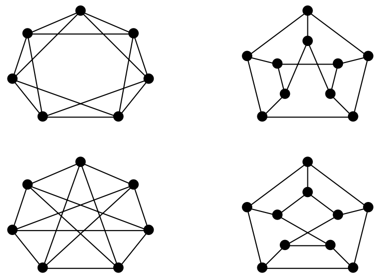
1. Довести, що у довільному графі кількість вершин непарного степеня парна.

2. (Задача Рамсея) Довести, що серед будь-яких шести осіб знайдуться або троє попарно знайомих, або троє попарно не знайомих.

3. Побудувати всі (з точністю до ізоморфізму) графи з чотирьох вершин, записати їхні компоненти зв'язності.

4. Довести, що замкнений ланцюг непарної довжини містить цикл.

5. Для кожної з пари графів з'ясувати, чи вони ізоморфні. Вказати ізоморфне відображення або довести, що його не існує.



а) б)

6. Кожен граф є прямою сумою зв'язних графів. Довести це.

7. Яку мінімальну кількість ребер повинен мати граф з n вершинами, щоб гарантовано бути зв'язним?

8. Довести або заперечити:

а) об'єднання довільних двох різних ланцюгів, які з'єднують дві вершини, містить простий цикл;

б) об'єднання довільних двох різних простих ланцюгів, які з'єднують дві вершини, містить простий цикл.

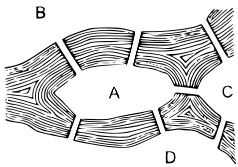
9. Показати, що $d(G \times H) \leq d(G) + d(H)$.

10. Чи правда, що $d(G \times H) \leq \max\{d(G), d(H)\}$?

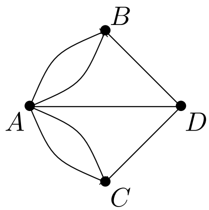
ЗАНЯТТЯ 13

Ойлерові та гамільтонові графи

Приклад 13.1. Місто Кенігзберг розташоване на берегах річки Прегель і двох островах. Різні частини міста сполучені сімома мостами. Ойлер поставив питання: чи можна здійснити прогулянку, вийшовши з дому і повернувшись до нього, таку, щоб по кожному мосту пройти рівно один раз?



Даній схемі відповідає наступний мультиграф, вершинами якого є чотири частини міста A, B, C і D, а ребрами – сім мостів:



Легко бачити, що таку прогулянку здійснити не можливо.

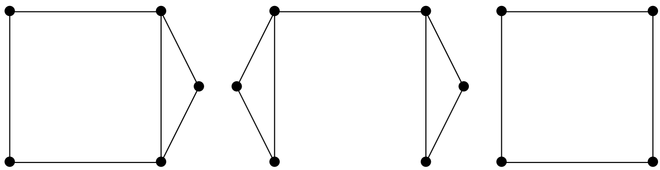
Означення 13.2. Зв'язний граф називають *ойлеровим графом*, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожне ребро. Такий ланцюг називають *ойлеровим ланцюгом* або *ойлеровим циклом*.

Означення 13.3. Граф називають *напівойлеровим*, якщо існує ланцюг, який проходить через кожне його ребро рівно один раз.

Означення 13.4. Зв'язний граф називають *гамільтоновим* графом, якщо існує замкнений ланцюг, який проходить через кожну вершину рівно один раз. Такий ланцюг називають *гамільтоновим ланцюгом* або *гамільтоновим циклом*.

Означення 13.5. Зв'язний граф називають *напівгамільтоновим*, якщо існує ланцюг, який проходить через кожну вершину рівно один раз.

Приклад 13.6. Які з наступних графів є ойлеровими? Гамільтоновими?



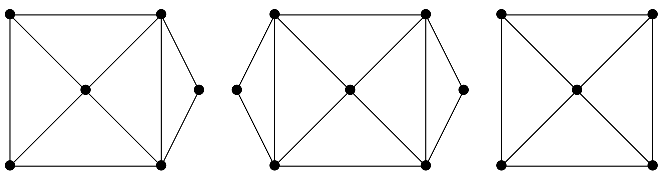
а) б) в)

Відповідь. Граф на рисунку а) є гамільтоновим і напівойлеровим, на рисунку б) – напівойлеровим і напівгамільтоновим, на в) – і ойлеровим, і гамільтоновим.

Приклад 13.7. Довести, що повний граф з n вершинами є гамільтоновим, $n \geq 3$.
Розв'язок. Дійсно, у повному графі завжди можна виділити ланцюг, який по черзі буде сполучати між собою всі його n вершин. З'єднавши між собою першу і останню вершини ланцюга, отримаємо гамільтоновий цикл.

Задачі для аудиторної роботи

1. Які з наступних графів є ойлеровими? Напівойлеровими?



а) б) в)

2. Довести, що якщо степінь кожної вершини графа не менше двох, то він містить цикл.

3. Показати, що для зв'язного графа $\Gamma(X, W)$ наступні твердження еквівалентні:

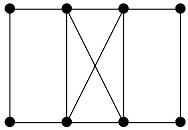
а) $\Gamma(X, W)$ — ойлерів граф;

б) кожна вершина графа $\Gamma(X, W)$ має парний степінь;

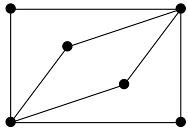
в) множину ребер графа $\Gamma(X, W)$ можна розбити на прості цикли.

4. Довести, що зв'язний граф є напівойлеровим тоді і тільки тоді, коли в ньому не більше двох вершин непарного степеня.

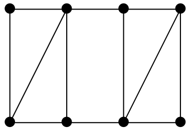
5. Які з наступних графів є ойлеровими або гамільтоновими?



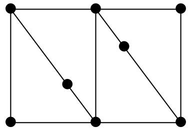
а)



б)



в)



г)

6. Для яких $n \geq 3$ повний граф з n вершинами є ойлеровим?

7. Показати, що довільний граф із n вершинами, який має не менше $C_{n-1}^2 + 2$ ребер, має гамільтоновий цикл.

8. Довести, що якщо в неорієнтованому графі Γ степені будь-якої пари несуміжних вершин x_i та x_j задовольняють умову

$$d(x_i) + d(x_j) \geq n,$$

то граф Γ має гамільтонів цикл.

9. Нехай Γ — гратчастий граф, утворений p горизонтальними і q вертикальними лініями, де кожна точка перетину є вершиною графа. При яких p і q граф Γ має гамільтонів цикл?

Додаткові задачі

1. Нехай A — матриця суміжності регулярного графа степеня k. Довести, що k — це власне число матриці A. Знайти відповідний йому власний вектор.

2. Нехай неорієнтований граф Γ задовольняє умовам:

а) для кожного натурального числа $k < \frac{n-1}{2}$ число вершин зі степенем, який не перевищує k, менше, ніж k;

б) якщо число зі степенем, який не перевищує $\frac{n-1}{2}$, менше або дорівнює $\frac{n-1}{2}$.

Тоді граф Γ є гамільтоновим. (Зауважимо, що граф, який складається з одного гамільтонового цикла, не задовольняє вищенаведеним умовам, тобто ці умови є достатніми, але не необхідними.)

3. Чи може а) кінь; б) король; в) тура побувати на кожній клітинці шахової дошки 8×8 рівно один раз і останнім кроком повернутися в початкову позицію? Розв'язати таку ж задачу для дошки 7×7.

4. Показати, що граф, у якого є дві несуміжні вершини третього степеня, а інші вершини мають степінь, не більший, ніж 2, не є гамільтоновим.

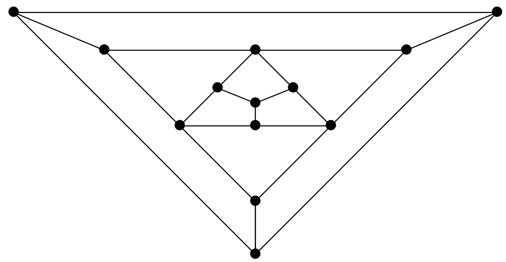
5. У графі G є гамільтоновий цикл, а в графі H – гамільоновий ланцюг. Чи правда, що у графі $G \times H$ є гамільтоновий цикл?

6. Показати, що повний граф із $2n+1$ вершинами можна зобразити, як суму n гамільтонових циклів.

Задачі для самостійної роботи

1. Навести приклад ойлерового графа, який не є гамільтоновим, і гамільтонового графа, який не є ойлеровим.

2. Чи містить граф, зображений на рисунку нижче, гамільтонів цикл?



3. Чи можна зробити прогулянку по парку і його околицям: A, B, C, D, E, F, так, щоб при цьому довелося перелізти через кожну огорожу рівно один раз? Побудувати відповідний граф.

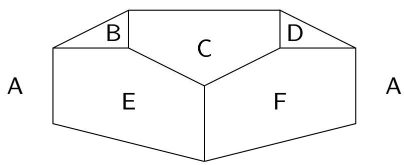


Схема парку

4. При якій найменшій кількості ребер граф з 10 вершинами гарантовано гамільтонів?

5. Для яких n граф, який відповідає n-вимірному кубу, а) ойлерів; б) гамільтонів?

6. Довести, що якщо для будь-якої вершини графа Γ з n вершинами $(n \geq 3)$ виконується нерівність $d(n) \geq \frac{n}{2}$, то граф Γ є гамільтоновим.

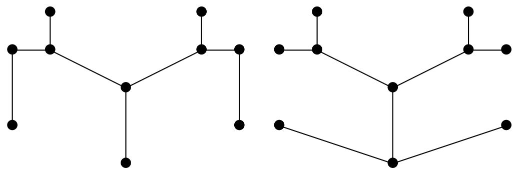
7. Показати, що у повному графі з n занумерованими вершинами є $\frac{(n-1)!}{2}$ різних гамільтонових циклів.

ЗАНЯТТЯ 14

Дерева, дводольні графи

Означення 14.1. Граф без циклів називають *ациклічним* або *лісом*. Зв'язний ациклічний граф називають *деревом*.

Приклад 14.2. На рисунку зображено ліс, який складається з двох компонент, кожна з яких є деревом:



Приклад 14.3. Нехай $\Gamma(X, W)$ – дерево з n вершинами і m ребрами. Тоді

$$m = n - 1.$$

Доведення. Скористаємось індукцією по n. При $n = 1$ твердження тривіальне. Оскільки в дереві немає циклів, то викресливши одне ребро, отримаємо дві компоненти T_1 і T_2, кожна з яких є деревом. Нехай T_i містить n_i вершин та m_i ребер, $i = 1, 2$. Тоді за припущенням індукції $m_i = n_i - 1$. Загальне число ребер дорівнює

$$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1.$$

□

Означення 14.4. Вершина $x \in X$ є *кінцевою вершиною* графа $\Gamma(X, W)$, якщо $d(x) = 1$.

Приклад 14.5. У будь-якому дереві з n вершинами, $n \geq 2$, є принаймні дві кінцеві вершини.

Доведення. Нехай $\Gamma(X, W)$ – дерево і $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Згідно з лемою про рукостискання

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2(n - 1),$$

причому всі $d(x_i) > 0$. Отже, принаймні два числа з послідовності $d(x_1)$, $d(x_2), \ldots, d(x_n)$ дорівнюють одиниці. □

Означення 14.6. Нехай

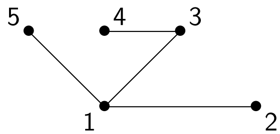
$$X = \{1, 2, \ldots, n\} \quad - \tag{14.1}$$

множина вершин дерева. Для будь-якого дерева T, побудованого на X введемо деякий код, який характеризує його однозначно. Позначимо через b_1 першу кінцеву вершину в послідовності (14.1), а через $w_1 = (a_1, b_1)$ відповідне кінцеве ребро. Викреслимо з T ребро w_1 і вершину b_1. Отримаємо нове дерево T_1. У T_1 розглянемо першу кінцеву вершину b_2 у послідовності (14.1) та кінцеве ребро w_2. Викреслимо з T_1 кінцеву вершину b_2 і ребро w_2. Отримаємо дерево T_2. Продовжуємо процедуру далі, поки не залишиться одне ребро (a_{n-1}, b_{n-1}), яке сполучає дві вершини, що залишились. Тоді набір

$$\sigma(T) = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}] \tag{14.2}$$

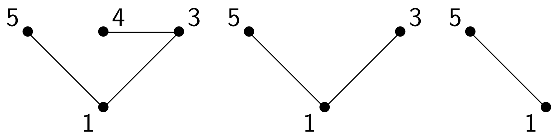
однозначно визначається за деревом T. І навпаки, за набором (14.2), можна однозначно відновити дерево T. Набір (14.2) називають *кодом Прюфера* дерева T.

Приклад 14.7. Запишемо код Прюфера дерева T, зображеного на рисунку:



Дерево T

Першою кінцевою вершиною T у $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ є $b_1 = 2$. Викреслимо з T вершину 2 і ребро $(1, 2)$. Отримаємо дерево T_1.



T_1 T_2 T_3

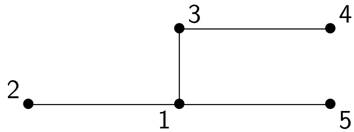
Викресливши у T_2 вершину 4 і ребро $(3, 4)$, отримаємо дерево T_2, у якому викреслюємо вершину 3 із ребром $(1, 3)$. Залишилось останнє ребро $(1, 5)$. Таким чином, код Прюфера дерева T такий:

$$\sigma(T) = [1, 3, 1].$$

Простежимо процедуру відновлення дерева T. Запишемо два набори

$$\begin{aligned} (i): &\qquad \sigma(T) = [1,3,1]; \\ (ii): &\qquad \{1,2,3,4,5\}. \end{aligned}$$

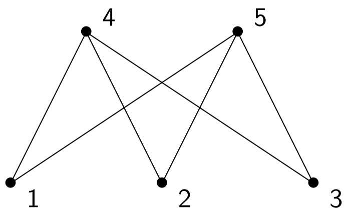
Беремо в (ii) першу вершину $b_1 = 2$, якої немає в (i), розглядаємо ребро $(1,2)$. Викреслюємо із $\sigma(T)$ $a_1 = 1$, а із (ii) – $b_1 = 2$. Обираємо $b_2 = 4$, тоді $(a_2, b_2) = (3,4)$. Далі $b_3 = 5$, тоді $(a_3, b_3) = (1,5)$. У (ii) залишилось останнє ребро $(1,3)$. Отже, отримали граф



Означення 14.8. Неорієнтований граф $\Gamma(X,W)$ називають *дводольним*, якщо множину його вершин X можна розбити на 2 такі підмножини X_I і X_{II} так, що кожне ребро має один кінець у X_I, а інший – у X_{II}.

Повний дводольний граф, для якого $|X_I| = i$, $|X_{II}| = j$, позначають $K_{i,j}$.

Приклад 14.9. Дводольний граф $K_{3,2}$ має вигляд



Його долі: $X_I = \{1,2,3\}$ і $X_{II} = \{4,5\}$.

Перевірка дводольності. Для того, щоб перевірити граф на дводольність, достатньо в кожній компоненті зв'язності вибрати довільну вершину і почергово відмічати вершини, які залишилися, під час обходження графу як парні й непарні (див. рисунок). Якщо при цьому не виникло суперечності, усі парні вершини утворять долю X_I, непарні – X_{II}.

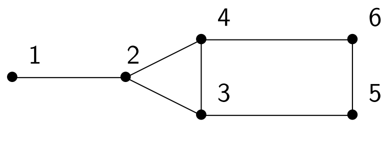
Задачі для аудиторної роботи

1. Знайти всі (з точністю до ізоморфізму) дерева, у яких не більше

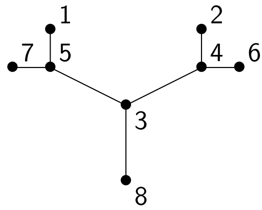
а) 4 вершин;

б) 5 вершин.

2. Записати код Прюфера графів:



а)



б)

3. Скільки можна побудувати дерев на n вершинах?

4. Довести, що неорієнтований граф є дводольним тоді, і тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

5. Довести, що у непорожньому дводольному регулярному графі долі містять однакову кількість вершин.

6. Нехай G – дводольний граф, долі якого містять m і n вершин відповідно. Довести:

а) якщо G – гамільтонів граф, то $m = n$;

б) якщо G – напівгамільтонів граф, то $|m - n| \leq 1$.

7. Нехай n – кількість вершин дерева, r – його радіус. Показати, що $n \geq 2r$.

8. Довести, що кожне дерево є дводольним графом. Які з дерев є повними дводольними графами?

9. Довести, що центр дерева складається з однієї вершини, якщо діаметр дерева – парне число, та з двох вершин, якщо це не так.

10. Чи може регулярний граф степеня більшого, ніж 1, мати мости? (Міст – це ребро графа, видалення якого збільшує кількість компонент зв'язності.)

Додаткові задачі

1. Показати еквівалентність наступних тверджень для графа T:

а) T є деревом;

б) будь-які дві вершини T зв'язані єдиним ланцюгом у T;

в) T – це мінімально зв'язний граф, тобто виключення довільного ребра робить його незв'язним;

г) T є максимально ациклічним графом, тобто додаючи одне ребро, сполучивши довільні дві не з'єднані вершини T, отримаємо граф, що містить цикл.

2. Показати, що ймовірність того, що при $n \to \infty$ випадково вибрана вершина дерева, яке має n вершин, є кінцевою, прямує до $\frac{1}{e}$.

3. Нехай $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – задані натуральні числа. Довести, що дерево з $n > 1$ вершиною, в якому степінь вершини x_i дорівнює l_i, існує тоді, і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = 2(n-1).$$

4. (Задача про гарем) Нехай є скінченна множина юнаків, кожен з яких знайомий із деякою скінченною підмножиною множини дівчат. Кожен юнак прагне взяти за дружину більш ніж одну знайому дівчину. Знайти необхідну і достатню умови вирішення цієї задачі.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що зв'язний граф є деревом тоді, і лише тоді, коли кожне його ребро є мостом.

2. Показати, що вершини дерева завжди можна занумерувати так, що для кожного $i \geq 2$ вершина x_i матиме лише одного сусіда з множини $\{x_1, \ldots, x_{i-1}\}$.

3. Відновити дерева за кодом Прюфера:

а) $[1, 2, 1, 1, 3]$;

б) $[4, 2, 1, 4, 3]$.

4. Показати, що кожна вершина x_i дерева з'являється в коді Прюфера $d(x_i) - 1$ разів.

5. Скільки ребер має повний дводольний граф, долі якого складають m і n вершин?

6. Чи правда, що у дереві з непарним діаметром довільні два простих ланцюги найдовшої довжини мають спільне ребро?

7. Показати, що коли дерево має не менше двох ребер, то його радіус менше діаметра.

8. Волейбольна сітка виглядає, як прямокутник завбільшки 50×600 кліток. Яке найбільше число мотузків можна перерізати так, щоб сітка не розпалася?

9. Чим характерна матриця суміжності дводольного графа?

ЗАНЯТТЯ 15

Формула Стірлінга

Теорема 15.1. *Має місце формула Стірлінга:*

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}},$$

де $0 < \theta_n < 1$.

Задачі для аудиторної роботи

Наближено обчислити:

1. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot99}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot100}$;

2. C_{100}^{40};

3. C_{2n}^{n}.

4. Вивести асимптотичну формулу для добутку

$$(2n-1)!! = 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1).$$

5. Скориставшись формулою Стірлінга, знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

6. Довести, що для будь-яких додатних цілих a та b:

$$\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n)} \sim \frac{b!}{a!} n^{a-b}, \; n\to\infty.$$

7. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right).$$

8. За Ойлером, гамма-функція визначається такою формулою:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Виходячи з цієї формули:

а) записати функцію $\Gamma(x)$ у вигляді нескінченного добутку;

б) вивести властивість $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

в) отримати значення $\Gamma(n)$ для n цілого і додатного.

Додаткові задачі

1. Гамма-функцію визначають рівністю:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t,$$

де $x > 0$. Показати, що

а) $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x-\frac{1}{2}}$;

б) $\Gamma(x)$ у попередній задачі (аудиторні, №8) має зміст для всіх дійсних x, які не дорівнюють цілому від'ємному числу;

в) поняття гамма-функції збігаються у цій задачі та у попередній (аудиторні, №8).

2. Нехай a та r довільні додатні числа, а n — ціле додатне число. Довести, що

$$a(a+r)(a+2r)\dots(a+nr) \sim Cr^{n+1} n^{n+\frac{1}{2}+\frac{a}{r}} e^{-n}, \ n \to \infty.$$

Стала C дорівнює $\sqrt{2\pi}/\Gamma(a/r)$.

3. Показати, що

$$\frac{a(a+r)(a+2r)\dots(a+nr)}{b(b+r)(b+2r)\dots(b+nr)} \sim \frac{\Gamma(b/r)}{\Gamma(a/r)} n^{(a-b)/r}, \ n \to \infty.$$

Задачі для самостійної роботи

Скориставшись формулою Стірлінга, наближено обчислити:

1. $lg 100!$;

2. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1999$;

3. $\frac{100!}{20!30!50!}$.

4. Скориставшись формулою Стірлінга, знайти границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$.

5. Народження хлопчика і дівчинки рівноймовірні події. Яка ймовірність того, що серед 100 новонароджених:

а) число хлопчиків і дівчаток однакові;

б) хлопчиків буде більше, ніж дівчаток?

Список рекомендованої літератури

[1] *Вишенський В.А., Перестюк М.О.* Комбінаторика: перші кроки. — Кам'янець-Подільський, Аксіома, 2010.

[2] *Дрозд Ю.А.* Дискретна математика. — К.: 2004.

[3] *Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й.* Елементи комбінаторики. — К.: Вища школа, 1974.

[4] *Ядренко М.Й.* Принцип Діріхле та його застосування. — К.: Вища школа, 1985.

[5] *Ядренко М.Й.* Дискретна математика: навчальний посібник. — К.: МП "ТВіМС", 2004.

[6] *Anderson J.A.* Discrete mathematics with combinatorics. — Prentice-Hall Inc, New Jersey, United States, 2001.

[7] *Biggs N.* Discrete Mathematics. — Oxford Science Publications, 1990.

[8] *Christofides N.*Graph Theory: An Algorithmic Approach. — Academic Press Inc, Cambridge, Massachusetts, United States, 1975.

[9] *Deistel R.* Graph theory. — Springer, 2000.

[10] *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 3rd Edition. — Wiley, 1968.

[11] *Grimaldi R.P.* Discrete and combinatorial mathematics. — Addison-Wesley, 1994.

[12] *Hall M.* Combinatorial Theory, 2nd Edition. — Wiley-Interscience, 1998.

[13] *Jukna S.* Extremal combinatorics with application in computer science, 2nd Edition. — Springer, 2011.

[14] *Matoušek J., Nešetřil J.* Invitation to Discrete Mathematics 2nd edition. — Oxford University Press., 2008.

[15] *Matson A.F.* Discrete Mathematics with applications. — John Wiley and Sons Inc., 1993.

[16] *Ore Ø.* Theory of Graphs. — American Mathematical Society, 1965.

[17] *Riordan J.* An introduction to combinatorial analysis. — Princeton University Press, 2014.

[18] *Riordan J.* Combinatorial identities. — R. E. Krieger Publishing Company, 1979.

[19] *Stanley R.* Enumerative Combinatorics. Volume 1, 2nd edition — Cambridge University Press, 2011.

[20] *Wilson R.J.* Introduction to graph theory. 4th edition — Longman Group Ltd, 1996.