Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Дискретна математика *2017/2018 н.р., 2 семестр*

Практичне заняття 1. Основні правила комбінаторики

A1.1 Учні вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки попарно різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

A1.2 Скільки є k-значних чисел у системі числення за основою n?

A1.3 Скільки існує п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

A1.4 Скільки існує п'ятизначних чисел, що діляться на 3?

A1.5 З точки проведено n променів. Скільки кутів вони утворюють?

A1.6 Скільки є натуральних чисел, менших від 100, цифри яких ідуть у зростаючому порядку?

A1.7 Скільки натуральних дільників має число $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_r$ — попарно різні прості числа?

A1.8 Скільки натуральних дільників має число 1250?

A1.9 Скількома способами n людей можуть стати в коло?

A1.10 Скільки існує камінців у грі доміно? Скількома способами можна обрати два камінці, які можна прикласти один до одного?

A1.11 Скількома способами можна розмістити на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не могли бити одна одну?

A1.12 Скількома способами можна поставити дві тури на шахову дошку так, щоб вони не били одна одну?

A1.13 Скількома способами можна поставити два слони на шахову дошку так, щоб вони не били один одного?

A1.14 Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб?

A1.15 У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n-кутника, якщо жодні три з них не перетинаються в одній точці?

A1.16 Скільки можна зробити перестановок із n елементів, у яких дані 2 елементи стоять поруч?

A1.17 Скількома способами можна розставити 10 книг на полиці так, щоб певні 3 книги не стояли поруч?

Д1.1 Скільки є парних шестизначних чисел?

Д1.2 Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра більша за попередню?

Д1.3 На залізничній станції n семафорів, кожен з яких може перебувати в одному з 3 положень. Скільки можна дати різних сигналів одночасно?

Д1.4 Скільки дільників має число $6^5 \cdot 10^4$?

Д1.5 Скільки натуральних дільників має число 2255?

Д1.6 Скільки є способів скласти намисто із k різних предметів?

Д1.7 Скількома способами можна поставити двох коней на шахову дошку так, щоб вони не били один одного?

Д1.8 Скількома способами можна поставити дві ферзі на шахову дошку так, щоб вони не били один одного?

Д1.9 На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками на протилежній стороні. На скільки частин поділиться трикутник цими прямими?

Д1.10 На площині дано n точок, причому m точок лежать на одній прямій. Скільки існує невироджених трикутників зі стороною, що лежить на цій прямій?

Д1.11 У чемпіонаті з футболу беруть участь 16 команд. Говоритимемо, що результати двох чемпіонатів з футболу тотожні, якщо в результаті цих чемпіонатів однакові команди отримують золоту, срібну, бронзову медалі й покидають вищу лігу (4 команди). Скільки є різних нетотожних чемпіонатів?

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Дискретна математика *2017/2018 н.р., 2 семестр*

Практичне заняття 2. Біноміальна теорема

A2.1 З колоди, в якій 52 карти, вибрали 10 карт.

a) У скількох випадках серед цих карт є хоча б один туз?

b) У скількох випадках серед цих карт був рівно один туз і дві карти бубнової масті?

c) У скількох випадках — не менше двох тузів?

A2.2 У розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 і x^{12} рівні. Знайдіть n.

A2.3 Скільки раціональних доданків містить розклад

$$(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{100}?$$

A2.4 Чому дорівнює коефіцієнт у розкладі $(x+y^2)^{15}$

a) при x^6y^{18};

b) при x^8y^{16};

c) при x^7y^{16}?

A2.5 Для довільних натуральних n, k доведіть рівність:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

A2.6 Доведіть, що для довільних натуральних n, m, k має місце рівність:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}.$$

A2.7 Доведіть, що для кожного допустимого натурального n має місце рівність:

a)
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1};$$

b)
$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2};$$

c)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

А2.8 Обчисліть суму

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} + \ldots + (n+1)\binom{n}{n}.$$

Д2.1 З колоди, в якій 52 карти, вибрали 10 карт.

a) У скількох випадках серед цих карт є рівно один туз?

b) У скількох випадках серед цих карт є рівно 2 тузи і рівно 3 хрестові карти?

Д2.2 У розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^6 і x^9 рівні. Знайдіть n.

Д2.3 Скільки раціональних доданків містить розклад

$$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3})^{120}?$$

Д2.4 Чому дорівнює коефіцієнт у розкладі $(x^3+y^2)^{12}$

a) при $x^{15}y^{14}$;

b) при $x^{12}y^{22}$;

c) при x^9y^{18}?

Д2.5 Доведіть, що для довільних натуральних n, k має місце рівність:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{k-1}.$$

Д2.6 Доведіть, що для кожного допустимого натурального n має місце рівність:

a)

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k} = (n+1)2^n;$$

b)

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1};$$

c)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Д2.7 Обчисліть суму

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \ldots + (-1)^n n\binom{n}{n}.$$

Практичне заняття 3. Мультимножини

А3.1 Скільки різних слів можна отримати, переставляючи літери слова "комбінаторика"?

А3.2 Скількома способами можна розкласти в 6 різних ящиків 6 чорних, 7 білих і 7 синіх куль?

А3.3 6 ящиків занумеровано від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль (деякі ящики можуть бути порожніми)?

А3.4 6 ящиків занумеровано числами від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 20 однакових куль так, щоб жоден ящик не виявився порожнім?

А3.5 Скількома способами 12 монет вартістю 25 копійок кожна можна розкласти по 5 різних гаманцях так, щоб жоден гаманець не виявився порожнім? Скількома способами це можна зробити, щоб при цьому в першому гаманці було рівно 7 монет?

А3.6 Скількома способами можна розрізати намисто, що складається з 30 різних намистинок, на 8 частин?

А3.7 У поштовому відділенні продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна купити в ньому:

a) 12 листівок;

b) 8 листівок;

c) 8 попарно різних листівок?

А3.8 У гаманці лежить 60 монет вартістю 10, 25 і 50 копійок по 20 кожної вартості. Скількома способами можна вибрати з них 20 монет? Скільки є способів це зробити так, щоб хоча б 10 вибраних монет мали вартість 50 копійок?

А3.9 Скількома способами можна розкласти в 6 різних ящиків 4 чорні, 4 білі й 4 сині кулі?

А3.10 Скількома способами можна викласти в ряд 5 червоних, 5 синіх і 5 зелених куль? Для скількох з них жодні дві сині кулі не лежать поряд?

А3.11 Група студентів складається з 28 осіб: 16 дівчат і 12 хлопців, а в аудиторії 15 двомісних парт.

a) Скількома способами можна розсадити студентів за партами?

b) Скількома способами можна розсадити їх так, щоб кожен хлопець сидів з дівчиною?

c) Скількома способами можна розсадити студентів так, щоб жоден хлопець не сидів із дівчиною?

Д3.1 Скільки різних слів можна отримати, переставляючи літери слова “математика”?

Д3.2 Скількома способами можна розкласти в 5 різних ящиків 5 чорних, 5 білих і 5 синіх куль?

Д3.3 Скільки невід'ємних цілих розв'язків має рівняння

$$x_1 + \ldots + x_m = n, \quad m, n \geq 1?$$

Д3.4 В 9 різних лузах розташували 7 білих і 2 чорні кулі (деякі лузи можуть бути порожніми). Скількома способами можна здійснити такий розклад? Скільки буде способів, якщо відомо, що обидві чорні кулі опиняться в одній лузі?

Д3.5 У квітковому магазині під кінець робочого дня залишилося 7 троянд білого кольору, 8 червоного і по 9 рожевого і жовтого. Скількома способами можна скласти букет із 5 квітів, якщо троянди одного кольору не відрізняються? Скількома способами можна скласти букет із 7 квітів, щоб у ньому було рівно 3 білі троянди?

Д3.6 Є кубики червоного, помаранчевого, білого і синього кольорів. Скількома способами дитина може скласти башту з 6 кубиків?

Д3.7 Скількома способами $3n$ різних предметів можуть бути поділені між трьома людьми так, щоб кожен отримав по n предметів?

Д3.8 Скількома способами з колоди з 52 карт можна вибрати 6 карт так, щоб були наявні всі масті?

Д3.9 Скількома способами за круглим столом можна посадити 5 англійців, 5 французів і 5 німців так, що ніякі співвітчизники не сидітимуть поруч?

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Дискретна математика *2017/2018 н.р., 2 семестр*

Практичне заняття 4. Формула включень-вилучень

А4.1 Скільки є натуральних чисел, менших за 10000, які взаємно прості з числом 30?

А4.2 Нехай $n = 30m$ для деякого натурального m. Доведіть, що кількість чисел, не більших за n і які не діляться на жодне з чисел 6,10 і 15, рівна $22m$.

А4.3 Про групу студентів із 30 осіб відомо, що 19 студентів вивчають математику, 17 — музику, 11 — історію, 12 — математику і музику, 7 — історію та математику, 5 — музику та історію, 2 — математику, історію та музику. Скільки студентів вивчає історію, але не вивчає математику?

А4.4 Відомо, що кожен учень школи вивчає принаймні одну іноземну мову. 28 учнів вивчають англійську, 23 учні вивчають французьку, 23 — німецьку, 12 — англійську та французьку, 11 — англійську та німецьку, 8 — французьку та німецьку, 5 — всі три мови. Скільки учнів вчиться в школі?

А4.5 В групі "любителів приходити на першу пару вчасно" соціальної мережі "Спинозошит" всього 25 хлопців і 20 дівчат. З них отримують стипендію 30 осіб, серед яких 16 хлопців. Серед учасників групи 28 також входять в групу "послідовників яблуневого бінома", з яких 18 хлопців і 17 отримують стипендію. Чи може кількість хлопців, які отримують стипендію, і є учасниками обох груп, бути рівною 15?

А4.6 (Задача Льюіса Керола) В жорстокому бою не менше як 70% піратів втратили одне око, не менше як 75% — одне вухо, не менше як 80% — одну руку та не менше як 85% — одну ногу. Яка мінімальна кількість бійців, що втратили водночас і око, і ногу, і вухо, і руку?

А4.7 Є n конвертів з адресами і n листів. Листи навмання кладуть у конверти. Скількома способами це можна зробити так, що хоча б одна людина отримає свій лист?

А4.8 Група з 20 студентів в один і той самий час розпочала складати залік з комбінаторики та іспит з теорії графів двом різним викладачам. Відповідь кожного студента і на заліку, і на іспиті триває 5 хвилин. Жоден студент не може одночасно складати іспит і залік. Скількома способами студенти можуть організувати чергу для складання заліку та іспиту?

А4.9 6 людей вибрали з 6 пар рукавиць по лівій і правій кожна. У скількох випадках жодна людина не отримала пари?

Д4.1 Скільки є натуральних чисел, менших 10000, які взаємно прості з числом 42?

Д4.2 Доведіть, що для кожного натурального $n \geq 6$ в множині $\{n+1, \ldots, n+30\}$ міститься не більше восьми простих чисел.

Д4.3 У трансконтинентальному літаку перебувають: 9 хлопчиків, 5 українських дітей, 9 дорослих чоловіків, 7 іноземних хлопчиків, 14 українців, 6 українців чоловічої статі та 7 іноземок жіночої статі. Скільки всього осіб в літаку?

Д4.4 З колоди 52 карт витягли навмання 6 карт. У скількох випадках будуть наявні всі масті?

Д4.5 Пустелею іде караван верблюдів. Після перепочинку верблюдів переставили так, щоб попереду кожного верблюда йшов верблюд, відмінний від того, що раніше. Скількома способами можна це зробити?

Д4.6 Коли в залі театру згасло світло, залишалося n вільних місць, які мали зайняти глядачі, що спізнилися. В темряві ці глядачі почали займати вільні місця випадковим чином. У скількох випадках принаймні два глядачі, що запізнилися, потраплять на свої місця?

Д4.7 6 людей вибрали з 9 пар рукавиць по лівій і правій кожна. У скількох випадках жодна людина не отримала пари?

Практичне заняття 5. Числа Стірлінга. Лінійні рекурентні співвідношення.

A5.1 Обчисліть
$$\left\{ {n \atop 0} \right\}, \quad \left\{ {n \atop 1} \right\}, \quad \left\{ {n \atop 2} \right\}, \quad \left\{ {n \atop n-1} \right\}, \quad \left\{ {n \atop n} \right\}.$$

A5.2 Доведіть, що
$$\left[{n \atop k} \right] \geq \left\{ {n \atop k} \right\}, \quad n \geq k \geq 0.$$
Коли нерівність буде строгою?

A5.3 Доведіть, що
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_k.$$

A5.4 Доведіть, що
$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^k.$$

A5.5 Доведіть, що кількість цілочисельних векторів $(a_1, \ldots, a_n)$ таких, що $0 \leq a_i \leq n - i$, $1 \leq i \leq n$, в яких рівно k координат рівні 0, становить $\left[{n \atop k} \right]$.

A5.6 Доведіть, що кількість способів розміщення n різних предметів по m різних коробках при умові, що p коробок зайняті, а $m - p$ — порожні, дорівнює
$$m(m-1)\ldots(m-p+1)\left\{ {n \atop p} \right\}.$$

A5.7 Доведіть, що
$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}.$$

A5.8 Доведіть, що
$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=m}^{n} \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}.$$

A5.9 Знайдіть явний вигляд елементів послідовності, заданих лінійним рекурентним співвідношенням

a) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 1;$

b) $a_{n+3} + 2a_{n+2} - 5a_{n+1} - 6a_n = 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1.$

А5.10* Доведіть, що для кожного $n \geq 1$ число

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

є цілим і непарним.

А5.11 Для кожного натурального n знайдіть кількість n-значних натуральних чисел, які записуються за допомогою цифр $1, 2, 3$ і в яких перша та остання, а також будь-які дві сусідні цифри різні.

Д5.1 Обчисліть

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}.$$

Д5.2 Доведіть, що

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Д5.3 Користуючись рекурентними формулами, складіть таблиці значень чисел Стірлінга першого та другого роду для множин, які містять від 0 до 9 елементів.

Д5.4 Доведіть, що

$$\sum_{k=m}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{nm}.$$

Д5.5 Доведіть, що

$$\sum_{k=m}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = \delta_{nm}.$$

Д5.6 Доведіть, що натуральне число, яке дорівнює добутку n різних простих множників, можна зобразити у вигляді добутку m натуральних множників $\left\{ {n \atop m} \right\}$ способами.

Д5.7 Нехай D — оператор диференціювання, $f(x)$ — n разів диференційовна функція. Доведіть, що

$$(xD)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k D^k f(x).$$

Д5.8 Доведіть, що

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} (-1)^{n-k}.$$

Д5.9 Доведіть, що

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=m}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \binom{k}{m} (-1)^{m-k}.$$

Д5.10 Знайдіть явний вигляд елементів послідовності, заданих лінійним рекурентним співвідношенням

a) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0, \quad a_0 = 10, a_1 = 16;$

b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = 0;$

c) $a_{n+3} - 2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0.$

Д5.11* Знайдіть перші сто знаків після коми у числа $(5 + \sqrt{26})^{101}$.

Д5.12* Клієнт поклав на рахунок у банк певну суму грошей і підписав контракт, за яким кожного разу, коли він дзвонитиме на гарячу телефонну лінію банку, гроші на його рахунку будуть подвоюватися, але за це банк стягуватиме комісію, яка першого разу становитиме 50 гривень, другого — 100 гривень, третього — 150 гривень і т.д. Після 17 дзвінків клієнта виявилося, що він заборгував банку 360 гривень і 72 копійки. Яку суму клієнт поклав на рахунок? Як змінилася б ситуація, якби він поклав на одну копійку більше?

Практичне заняття 6. Числа Фібоначчі. Числа Каталана.

A6.1 Доведіть, що для чисел Фібоначчі мають місце тотожності

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1;$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}, \quad n \geq 1;$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}, \quad n \geq 1;$

d) $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}, \quad n, m \geq 1.$

A6.2* Доведіть, що для довільних натуральних n, k число F_{kn} ділиться на F_n.

A6.3* Доведіть, що для довільного натурального n має місце рівність

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k}.$$

A6.4 Знайдіть кількість таких векторів $(a_1, \ldots, a_{2n})$, усі координати яких рівні 1 або -1, причому

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0, 1 \leq k \leq 2n, \quad \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0.$$

A6.5 Знайдіть кількість найкоротших шляхів вздовж цілочисельної решітки на координатній площині з вершини $(0,0)$ у вершину (n,n), які проходять не вище прямої $y = x$.

A6.6* На колі зафіксували $2n$ точок. Скількома способами можна провести n хорд так, щоб кожна точка була кінцем рівно однієї хорди і хорди попарно не перетинались?

A6.7* Скільки існує неспадних послідовностей натуральних чисел довжини n, у яких кожне число не більше за його номер у послідовності?

A6.8* Скільки існує перестановок чисел $1, 2, \ldots, 2n$, які одночасно задовольняють таким умовам:

a) всі непарні числа зустрічаються в зростаючому порядку;

b) всі парні числа зустрічаються в зростаючому порядку;

c) кожне непарне число зустрічається раніше наступного парного?

Д6.1 Доведіть, що для чисел Фібоначчі мають місце тотожності

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1, \quad n \geq 1;$

b) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \geq 1;$

c) $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2, \quad n \geq 1.$

Д6.2* Доведіть, що сума восьми послідовних чисел Фібоначчі не може бути числом Фібоначчі.

Д6.3 Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми натуральних доданків, кожен з яких більший за 1.

Д6.4* Нехай НСД$(n, m) = k$. Доведіть, що НСД$(F_n, F_m) = F_k$.

Д6.5* Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Д6.6 (*Система числення Фібоначчі*) Доведіть, що для кожного натурального числа n існують і єдині натуральне число $M \geq 2$ та числа $\alpha_k \in \{0, 1\}$, $2 \leq k \leq M$ такі, що $\alpha_k \alpha_{k+1} = 0$, $2 \leq k \leq M - 1$, і

$$n = \sum_{k=2}^{M} \alpha_k F_k.$$

Д6.7 Знайдіть розклади перших двадцяти простих чисел у системі численні Фібоначчі.

Д6.8 Перевірте, що

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Д6.9 Обчисліть числа Каталана C_n, $0 \leq n \leq 10$.

Д6.10* Скільки існує таких послідовностей $(a_1, \ldots, a_n)$ цілих чисел, що $a_1 = 0$ і $0 \leq a_k \leq a_{k-1} + 1$, $1 < k \leq n$?

Д6.11* Скількома способами опуклий $(n + 2)$-кутник можна розбити на трикутники, провівши $n - 1$ діагоналей, які не перетинаються всередині заданого многокутника.

Практичне заняття 7. Поняття графа.

А7.1 Нехай задано граф $\Gamma = (V, E)$, де

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \{(1,3), (2,3), (3,4), (4,1), (4,2)\}.$$

Зобразіть цей граф, вкажіть його матриці суміжності та інцидентності.

А7.2 Скільки ребер містить повний граф з n вершинами?

А7.3 Як за матрицею суміжності графа визначити:

a) чи інцидентні дві задані вершини;

b) чи буде граф простим;

c) кількість його ребер;

d) степені його вершин;

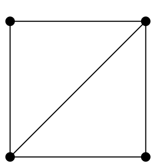
e) чи буде граф повним?

А7.4 Вкажіть деяку невід'ємну квадратну матрицю розміру 4×4 і зобразіть орграф, нею визначений. Які властивості має цей орграф?

А7.5 Для кожного $n \geq 3$ вкажіть простий граф з n вершинами, в якого знайдеться $n - 1$ вершина з попарно різними степенями.

А7.6 Запишіть матрицю суміжності заданого графа і знайдіть її власні значення, вкажіть його матрицю інцидентності:

a)

b) 

Д7.1 Нехай задано граф $\Gamma = (V, E)$, де

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad E = \{(1,5), (1,4), (2,4), (3,5), (5,2)\}.$$

Зобразіть цей граф, вкажіть його матриці суміжності та інцидентності.

Д7.2 Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?

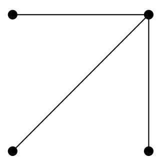
Д7.3 Вкажіть деяку симетричну невід'ємну квадратну матрицю розміру 4×4 і зобразіть граф, нею визначений. Які властивості має цей граф?

Д7.4 Які властивості графа можна перевірити за допомогою його матриці інцидентності?

Д7.5 Доведіть, що в будь-якому простому графі, який має принаймні дві вершини, знайдуться різні вершини з рівними степенями.

Д7.6 Запишіть матрицю суміжності заданого графа і знайдіть її власні значення, вкажіть його матрицю інцидентності:

a)

b) 

Практичне заняття 8. Ізоморфізм графів.

А8.1 Доведіть, що прості графи ізоморфні тоді й лише тоді, коли ізоморфні їх доповнення.

А8.2 Побудуйте всі попарно неізоморфні орграфи

a) з 2 вершинами і 2 стрілками;

b) з 2 вершинами і 3 стрілками;

c) з 3 вершинами і 2 стрілками.

А8.3 Побудуйте всі попарно неізоморфні прості графи з 4 вершинами. Вкажіть їх матриці суміжності та інцидентності.

А8.4 Скільки існує попарно неізоморфних простих графів з 6 вершинами, у яких набір степенів вершин є таким: $(2, 2, 3, 3, 3, 5)$?

А8.5 Скільки існує попарно неізоморфних простих графів з 6 вершинами і 11 ребрами?

Д8.1 Побудуйте всі попарно неізоморфні прості орграфи

a) з 3 вершинами і 3 стрілками;

b) з 3 вершинами і 4 стрілками;

c) з 4 вершинами і 3 стрілками.

Д8.2 Побудуйте всі попарно неізоморфні прості графи з 5 вершинами.

Д8.3 Скільки існує попарно неізоморфних простих кубічних графів з 6 вершинами?

Д8.4 Скільки існує попарно неізоморфних простих графів з 7 вершинами і 18 ребрами?

Д8.5 У повному графі з 5 вершинами знайдіть усі цикли довжини $3, 4, 6$. Які з них будуть простими?

Д8.6 Чи існує простий граф з 6 вершинами, у якого набір степенів вершин є таким: $(2, 2, 2, 4, 5, 5)$?

Практичне заняття 9. Шляхи в графах.

Всі графи, які розглядаються, є скінченними і простими.

А9.1 Доведіть, що простий зв'язний граф є циклом тоді й лише тоді, коли всі його вершини мають степінь 2.

А9.2 Доведіть, що в непорожньому регулярному дводольному графі долі містять однакову кількість вершин.

А9.3 Доведіть, що граф є дводольним тоді й лише тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

А9.4 Нехай в графі є рівно дві вершини непарного степеня. Доведіть, що існує ланцюг, який їх з'єднує.

А9.5 Доведіть, що в будь-якому графі, який має принаймні дві вершини, знайдуться дві вершини з рівними степенями.

А9.6 Нехай в простому графі ніякі дві вершини однакового степеня не з'єднані ланцюгом довжини 2. Доведіть, що в цьому графі існує висяча вершина.

В наступних задачах розглядається простий, зв'язний, скінченний граф Γ.

Д9.1 Доведіть, що $d(a,b)+d(b,c)=d(a,c)$ тоді й лише тоді, коли b лежить на одному з найкоротших шляхів з a до c.

Д9.2 Доведіть, що розмах $L(a,b)$ (тобто найбільша довжина простого шляху між вершинами a та b) задовільняє нерівності трикутника $L(a,c) \leq L(a,b)+L(b,c)$.

Д9.3 Доведіть, що коли p і q — такі прості шляхи, що $L(p)=L(q)=L(\Gamma)$, то вони мають спільну вершину.

Д9.4 Нехай l — довжина найдовшого простого шляху в графі Γ). Доведіть, що $e(a) \geq [(l+1)/2]$ для довільної вершини a ($e(a)$ — довжина найдовшого простогоо шляху з початком в a), причому коли досягається рівність, то a належить кожному найдовшому простому шляху в графі Γ.

Д9.5 Нехай вершина b є початком деякого найдовшого простого шляху в графі Γ і $\rho(b)>1$. Тоді b належить деякому простому циклу, довжина якого не менша за $\rho(b)+1$.

Практичне заняття 10. Ойлерові та гамільтонові графи, дерева.

Всі графи, які розглядаються, є скінченними.

A10.1 Побудуйте три попарно неізоморфні графи з вісьмома вершинами, у кожному з яких існує ойлеровий цикл.

A10.2 Чи будуть ойлеровими (гамільтоновими) графи “відкритий конверт”, “заклеєний конверт”?

A10.3 Доведіть, що повний граф з n ($n \geq 3$) вершинами є гамільтоновим. Скільки гамільтонових циклів існує в цьому графі?

A10.4 Озарактеризуйте графи, котрі одночасно є ойлеровими і гамільтоновими.

A10.5 Які з платонових графів є ойлеровими, гамільтоновими?

A10.6 Доведіть, що кожне дерево має принаймні два листки.

A10.7 Побудуйте всі попарно неізоморфні дерева з 2, 3 і 4 вершинами.

A10.8 Доведіть, що кожне дерево з рівно двома листками є простим ланцюгом.

A10.9 Нехай Γ — граф з n вершинами та $n-1$ ребром. Доведіть, що такі умови рівносильні:

a) Γ є деревом;

b) Γ ациклічний;

c) Γ зв’язний.

A10.10 Доведіть, що для довільного натурального числа n набір натуральних чисел $(d_1, \ldots, d_n)$ є набором степенів вершин деякого дерева тоді й лише тоді, коли

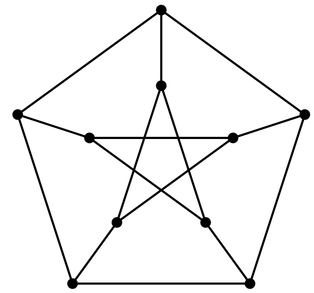
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Д10.1 Наведіть приклад ойлерового, але не гамільтонового графа.

Д10.2 Наведіть приклад гамільтонового, але не ойлерового графа.

Д10.3 Наведіть приклад простого ойлерового графа з 6 вершинами і максимально (мінімально) можливою кількістю ребер.

Д10.4 Доведіть, що граф Петерсена



не є гамільтоновим.

Д10.5 Доведіть, що кожне дерево є дводольним графом.

Д10.6 Побудуйте всі попарно неізоморфні дерева з 5 і 6 вершинами.

Д10.7 Доведіть, що зв'язний граф є деревом тоді й лише тоді, коли кожне його ребро є мостом.

Д10.8 Нехай максимальний степінь вершини деякого дерева не менший за k. Доведіть, що це дерево має принаймні k листків.

Практичне заняття 11. Бінарні відношення

A11.1 Нехай $M = \{1,2,3,4,5\}$. Для заданого бінарного відношення ρ на множині M визначте $Pr_1\rho, Pr_2\rho, \rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho \circ \rho^{-1}$ і $\rho^{-1} \circ \rho$:

a) $\rho = \{(1,2),(1,4),(2,3),(2,4),(4,1),(4,3),(4,4)\}$;

b) $\rho = \{(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(5,2)\}$.

Побудуйте їх транзитивні, рефлексивні й симетричні замикання.

A11.2 Для бінарного відношення ρ на множині $\mathbb{N}$ такого, що

$$\rho = \{(m,n) |\ n \text{ ділиться на } m\}$$

визначте $Pr_1\rho$, $Pr_2\rho$, ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$ і $\rho^{-1} \circ \rho$, $\overline{\rho}$. Перевірте, чи буде це відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним.

A11.3 Доведіть, що для довільного бінарного відношення ρ на множині M

a) $Pr_1\rho = \varnothing \Leftrightarrow \rho = \varnothing \Leftrightarrow Pr_2\rho = \varnothing$;

b) $Pr_2\rho = Pr_1\rho^{-1}$;

c) $Pr_1\rho = Pr_2\rho^{-1}$.

A11.4 Які з бінарних відношень на множині $\mathbb{Z}$

$(m,n) \in \rho_1 \quad \Leftrightarrow m - n$ парне число;

$(m,n) \in \rho_2 \quad \Leftrightarrow m + n$ парне число;

$(m,n) \in \rho_3 \quad \Leftrightarrow m - n \leq 2014$;

$(m,n) \in \rho_4 \quad \Leftrightarrow m - n$ непарне число;

$(m,n) \in \rho_5 \quad \Leftrightarrow m + n$ непарне число;

є рефлексивними, антирефлексивними, симетричними, антисиметричними, асиметричними, транзитивними?

A11.5 Доведіть, що добуток $\rho_1 \circ \rho_2$ двох антирефлексивних бінарних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині M може не бути антирефлексивним відношенням.

A11.6 Доведіть, що для симетричних бінарних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині M симетричними будуть також відношення $\rho_1 \cup \rho_2$, $\rho_1 \cap \rho_2$, $\rho_1{}^{-1}$, $\rho_1 \circ \rho_1{}^{-1}$.

A11.7 Наведіть приклад бінарного відношення на деякій множині, яке було б одночасно:

a) симетричним, транзитивним, не рефлексивним;

b) рефлексивним, антисиметричним, не транзитивним;

c) не симетричним, не антисиметричним.

А11.8 Скільки рефлексивних відношень існує на n-елементній множині? Скільки серед них симетричних?

Д11.1 Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Для заданого бінарного відношення ρ на множині M визначте $Pr_1\rho, Pr_2\rho, \rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho \circ \rho^{-1}$ і $\rho^{-1} \circ \rho$:

a) $\rho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 4)\}$;

b) $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 5)\}$.

Побудуйте їх транзитивні, рефлексивні й симетричні замикання.

Д11.2 Нехай $k \geq 2$ — натуральне число. Для бінарного відношення ρ_k на множині $\mathbb{N}$ такого, що

$$\rho_k = \{(m, n) |\ m - n \text{ ділиться на } k\}$$

визначте $Pr_1\rho_k$, $Pr_2\rho_k$, ρ_k^{-1}, $\rho_k \circ \rho_k$, $\rho_k \circ \rho_k^{-1}$, $\rho_k^{-1} \circ \rho_k$, $\overline{\rho}_k$. Перевірте, чи буде це відношення рефлексивним, антирефлексивним, симетричним, антисиметричним, асиметричним, транзитивним.

Д11.3 Доведіть, що для довільного бінарного відношення ρ на множині M

a) $(\rho \cup \rho) \cap \rho = \rho$;

b) $\left(\rho^{-1}\right)^{-1} = \rho$;

c) $Pr_1\rho = Pr_2\rho^{-1}$.

Д11.4 Які з бінарних відношень на множині $\mathbb{Z}$

$(m, n) \in \rho_6 \quad \Leftrightarrow \quad$ неповна частка від ділення m на n парна;

$(m, n) \in \rho_7 \quad \Leftrightarrow \quad$ неповна частка від ділення m на n непарна;

$(m, n) \in \rho_8 \quad \Leftrightarrow mn \quad$ парне число;

$(m, n) \in \rho_9 \quad \Leftrightarrow mn \quad$ непарне число;

$(m, n) \in \rho_{10} \quad \Leftrightarrow m - n \quad$ є степенем числа 2;

$(m, n) \in \rho_{11} \quad \Leftrightarrow m$ і n не взаємнопрості;

є рефлексивними, антирефлексивними, симетричними, антисиметричними, асиметричними, транзитивними?

Д11.5 Наведіть приклад симетричних бінарних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, для яких добуток $\rho_1 \circ \rho_2$ не буде симетричним відношенням.

Д11.6 Наведіть приклад таких транзитивних відношень ρ_1 і ρ_2 на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, що:

a) $\rho_1 \circ \rho_2$ не транзитивне;

b) $\rho_1 \circ \rho_2$ транзитивне;

c) $\rho_1 \circ \rho_2 \neq \rho_1$;

d) $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_1$.

Д11.7 Наведіть приклад бінарного відношення на деякій множині, яке було б одночасно:

a) рефлексивним, симетричним, не транзитивним;

b) рефлексивним, симетричним, транзитивним;

c) не рефлексивним, не антирефлексивним, несиметричним, транзитивним.

Д11.8 Скільки антирефлексивних відношень існує на n-елементній множині? Скільки серед них антисиметричних?

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Дискретна математика *2017/2018 н.р., 2 семестр*

Практичне заняття 12. Еквівалентності та порядки

A12.1 Нехай M — множина всіх прямих на площині. Чи буде відношенням еквівалентності на M відношення:

a) паралельності прямих;

b) перпендикулярності прямих?

A12.2 На множині $\mathbb{R}$ усіх дійсних чисел визначимо відношення ρ, поклавши

$$a\rho b \iff a - b \in \mathbb{Q}.$$

Доведіть, що ρ є відношенням еквівалентності, і опишіть його класи еквівалентності.

A12.3 Чи завжди об'єднання відношень еквівалентності буде відношенням еквівалентності?

A12.4 Доведіть, що відношення, обернене до відношення еквівалентності, також є відношенням еквівалентності.

A12.5 Доведіть, що множина всіх підмножин даної множини частково впорядкована за відношенням включення.

A12.6 Нехай $a \le b \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{N}$ і a є дільником b. Доведіть, що $\le$ — частковий порядок на $\mathbb{N}$.

A12.7 Побудуйте всі неізоморфні відношення часткового порядку на множині

a) $M = \{a, b\}$;

b) $M = \{a, b, c\}$;

c) $M = \{a, b, c, d\}$.

A12.8 Вкажіть всі неізоморфні частково впорядковані 6-елементні множини з найбільшим і чотирма мінімальними елементами.

A12.9 Доведіть, що

a) множина $\mathbb{N}$ з порядком $0 < 2 < 4 ... < 1 < 3 < 5...$ є цілком впорядкованою;

b) множина $\mathbb{N}$ з порядком $...4 < 3 < 2 < 1$ не є цілком впорядкованою;

c) множина $\mathbb{Z}$ з порядком $1 < 2 < 3 < \ldots < 0 < -1 < -2 < -3 < \ldots$ є цілком впорядкованою.

Д12.1 Доведіть, що відношення подібності на множині усіх трикутників є еквівалентністю.

Д12.2 Доведіть, що на множині $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (де $\mathbb{N}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел) відношення ρ_1 і ρ_2 є відношеннями еквівалентності:

a) $((a,b),(c,d)) \in \rho_1 \iff a+d=b+c$;

b) $((a,b),(c,d)) \in \rho_2 \iff$ ($a \cdot d = b \cdot c$ для $b \neq 0$ і $d \neq 0$) або ($a = c$ для $b = 0$ і $d = 0$).

Опишіть класи еквівалентності цих відношень.

Д12.3 Доведіть, що перетин відношень еквівалентності є відношенням еквівалентності.

Д12.4 Наведіть приклад таких двох відношень еквівалентності ρ_1 і ρ_2 на множині $M = \{1,2,3,4\}$, що добуток $\rho_1 \circ \rho_2$ не є відношенням еквівалентності.

Д12.5 Визначимо на множині $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел відношення ρ так, що $a\rho b$ тоді і тільки тоді, коли $a/(a^2+1) \leq b/(b^2+1),\ a,b \in \mathbb{R}$. Доведіть, що

a) ρ не є відношенням часткового порядку на множині $\mathbb{R}$;

b) ρ є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(1,\infty)$.

c) ρ є відношенням часткового порядку на множині дійсних чисел з інтервалу $(-\infty,-1]$.

Д12.6 Вкажіть всі неізоморфні частково впорядковані 5-елементні множини з найменшим і найбільшим елементами.

Д12.7 Побудуйте приклад частково впорядкованої множини, яка має

a) точно один мінімальний елемент, але не має найменшого елемента;

b) точно один максимальний елемент, але не має найбільшого елемента;

c) один мінімальний і один максимальний елементи, але не має найменшого і найбільшого елементів;

d) не має жодного мінімального і максимального елементів та не має найменшого і найбільшого елементів.

Практичне заняття 13. Булеві функції. ДДНФ та ДКНФ. Булеві многочлени.

A13.1 Знайдіть номер булевого вектора

a) $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$,

b) $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{100}, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{100}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{100})$.

A13.2 Знайдіть булевий вектор мінімальної довжини, який має номер

a) 325,

b) $2^{325} - 2$.

A13.3 Побудуйте таблицю значень булевої функції, заданої формулою

$$(x_1 \to \neg x_3) \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3).$$

A13.4 Скільки існує булевих векторів довжини n, булева сума координат кожного з яких рівна 1?

A13.5 Перевірте, чи буде тавтологією формула

a)
$$(x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to x_3),$$

b)
$$(x_1 \to x_2) \to ((\neg x_1 \to x_2) \to x_2).$$

A13.6 Побудуйте ДДНФ булевої функції, заданої формулою

$$(x_1 \to x_2) \wedge (\neg x_3 \leftrightarrow \neg x_1).$$

A13.7 Побудуйте ДКНФ булевої функції, заданої формулою

$$((x_1 \oplus x_2) \to (x_3 \vee \neg x_1)) \leftrightarrow (\neg x_2 \vee x_3).$$

A13.8 Вкажіть правило побудови ДДНФ булевої функції, заданої формулою $F_1 \leftrightarrow F_2$, якщо відомі ДДНФ булевих функцій, заданих формулами F_1, F_2.

A13.9 Вкажіть булевий многочлен, котрий визначає булеву функцію, задану формулою

$$(\neg x_3 \leftrightarrow x_2) \to (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)).$$

А13.10 На скількох булевих векторах набуває значення 1 булева функція від 100 змінних, визначена булевим многочленом

$$\bigoplus_{1 \leq i < j \leq 100} x_i \wedge x_j?$$

Д13.1 Знайдіть номер булевого вектора

a) $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 9)$,

b) $(0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{50}, 0, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{50}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{50}, 1)$.

Д13.2 Знайдіть булевий вектор мінімальної довжини, який має номер

a) 173,

b) $2^{173} - 3$.

Д13.3 Побудуйте таблицю значень булевої функції, заданої формулою

$$(\neg x_1 \vee \neg x_3) \oplus \neg(x_2 \to x_3).$$

Д13.4 Скільки існує булевих векторів довжини n, булевий добуток координат кожного з яких рівний 0?

Д13.5 Перевірте, чи буде тавтологією формула

a)
$$((x_1 \to x_3) \to (x_2 \to x_3)) \to ((x_1 \vee x_2) \to x_3),$$

b)
$$(x_1 \to x_2) \to ((x_1 \to x_3) \to (x_1 \to (x_2 \wedge x_3))).$$

Д13.6 Побудуйте ДДНФ булевої функції, заданої формулою

$$(x_1 \wedge (x_2 \to \neg x_3)) \oplus ((\neg x_3 \vee x_1) \to \neg x_2).$$

Д13.7 Побудуйте ДКНФ булевої функції, заданої формулою

$$((\neg x_1 \wedge (x_2 \to \neg x_3)) \vee ((\neg x_2 \to x_1) \vee (\neg x_1 \leftrightarrow x_3)).$$

Д13.8 Вкажіть правило побудови ДКНФ булевої функції, заданої формулою $F_1 \vee F_2$, якщо відомі ДКНФ булевих функцій, заданих формулами F_1, F_2.

Д13.9 Вкажіть булевий многочлен, котрий визначає булеву функцію, задану формулою

$$(x_1 \to \neg x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_1).$$

Практичне заняття 14. Повні системи булевих функцій.

A14.1 Для всіх булевих функцій від двох змінних визначте, чи належить вона до кожного з класів $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$ з теореми Поста.

A14.2 Вкажіть всі двоелементні повні системи булевих функцій від двох змінних, які не містять ні штрих Шеффера, ні стрілку Пірса.

A14.3 Знайдіть дві одноелементні повні системи, утворені з булевих функцій від трьох змінних.

A14.4 Виразіть через стрілку Пірса та штрих Шеффера заперечення, імплікацію, диз'юнкцію та кон'юнкцію.

A14.5 Доведіть, що в кожній повній системі булевих функцій існує повна підсистема, яка містить не більше 4 функцій.

A14.6 Вкажіть повну систему булевих функцій, яка містить 4 функції і не має власних повних підсистем.