

## ДІП-2018: Варіант І.

1. Нехай  $A$  і  $B$  – незалежні події. Доведіть, що  $A$  і  $\bar{B}$ , доповнення до множини  $B$ , теж є незалежними подіями.
2. Урна містить  $m > 3$  білих і  $n$  чорних куль. Випадково втрачено одну кулю. Для перевірки складу урни з неї витягнули без повернення дві кулі, які виявилися білими. Яка ймовірність, що втрачено чорну кулю?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова дама. Яка ймовірність того, що у гравця комбінація з двох пар (наприклад,  $7\heartsuit, 7\clubsuit, 10\heartsuit, 10\spadesuit, A\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Страхова компанія покриває вимоги від чотирьох різних портфельів полісів загального страхування, позначених через  $G_1, G_2, G_3$  і  $G_4$ . Число полісів у кожному з портфельів наведено нижче:

|               |       |       |        |       |
|---------------|-------|-------|--------|-------|
| Портфель      | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$  | $G_4$ |
| Число полісів | 4 000 | 7 000 | 13 000 | 6 000 |

Оцінюють, що частка полісів, за якими виникнуть вимоги у наступному році становить 8%, 5%, 2% і 4% відповідно.

Припустимо, що за вибраним навмання через один рік полісом із загальної групи 30 000 полісів усіх чотирьох портфельів надійшла за цей рік вимога. Обчисліть ймовірність, що поліс вибрано з портфелю  $G_3$ .

5. Величини позовів за певної страхової ситуації моделюють за допомогою розподілу, генератриса моментів якого дорівнює

$$M(t) = \left( \frac{0.5e^t}{1 - 0.5e^t} \right)^2.$$

Обчисліть  $EX$ ,  $EX^2$  та  $EX^3$ .

## ДІП-2018: Варіант ІІ.

1. Розглянемо дві події  $A$  і  $B$  такі, що  $P(A) = 0.3$  і  $P(A \cap B) = 0.1$ . Знайти найменше і найбільше можливі значення умовної ймовірності  $P(A|B)$ .
2. Яка ймовірність, що у навмання вибраному розв'язку рівняння  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ , де  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , усі змінні не рівні нулю?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова дама. Яка ймовірність того, що у гравця флеш (усі карти однієї масті, наприклад,  $2\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, B\heartsuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Маємо 5 урн: 2 урни містять по 2 білих і одній чорній кулі, 1 урна – 10 чорних куль, ще дві урни – по 3 білих та по одній чорній кулі. Чому дорівнює ймовірність, що вийнята куля біла?
5. Розглянемо дискретну в.в.  $X$  із розподілом

$$P(X = x) = \frac{4}{5^{x+1}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- i) Визначте генератрису моментів  $X$ .
- ii) Обчисліть  $EX$  і  $EX^2$ , використовуючи результат пункту i).

### ДІП-2018: Варіант III.

1. Подія  $A$  не залежить від  $B$  і  $C$ , причому  $B \subset C$ . Показати, що  $A$  не залежить і від події  $C \setminus B$ .
2. Нехай ймовірність  $p_n$  того, що в сім'ї  $n$  дітей, дорівнює  $\alpha p^n$  при  $n \geq 1$  і  $p_0 = 1 - \alpha p(1 + p + p^2 + \dots)$ . Припустимо, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки однакові. Яка ймовірність того, що в сім'ї два або більше хлопчиків?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова дама. Яка ймовірність того, що у гравця фул-хаус (трійка та пара, наприклад,  $7\heartsuit, 7\clubsuit, 7\spadesuit, 10\heartsuit, 10\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Маємо 5 урн: 2 урни містять по 2 білих, одній чорній і одній червоній кулі, 1 урна – 5 чорних і 5 червоних куль, ще дві урни – по 3 білих та по одній чорній кулі. Чому дорівнює ймовірність, що вийнята куля біла?
5. Припустимо, що  $X$  є в.в. із генератрисою моментів  $M_X(t)$  та генератрисою кумулянт  $C_X(t)$ . Нехай  $Y = aX + b$ , де  $a$  та  $b$  – деякі сталі. Нехай також в.в.  $Y$  має генератрису моментів  $M_Y(t)$  та генератрису кумулянт  $C_Y(t)$ .
  - i) Покажіть, що  $C_Y(t) = bt + C_X(at)$ .
  - ii) Обчисліть коефіцієнт асиметрії  $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$  в.в.  $Y$ , де  $\mu_3$  – третій центральний момент,  $\sigma$  – стандартний відхил (корінь із дисперсії), якщо  $M_X(t) = (1 - t)^{-2}$  та  $Y = 3X + 2$ .

## ДІП-2018: Варіант IV.

1. Нехай  $A$  і  $B$  – дві події такі, що  $P(A) = 0.4$  і  $P(A \cap B) = 0.2$ . Знайти найменше і найбільше можливі значення умовної ймовірності  $P(A|B)$ .
2. Припустимо, що у групі страхових полісів (які є незалежними щодо надходження вимог), від 20% полісів надійшли вимоги протягом останнього року. Аудитор вивчає поліси з групи один за одним у випадковому порядку, доки не знайде два поліси (не обов'язково послідовні) з вимогою.
  - (i) Визначте ймовірність, що рівно п'ять полісів треба було дослідити, перш ніж два послідовні поліси з вимогами було знайдено.
  - (ii) Знайти очікуване число полісів, які треба дослідити, поки два поліси з вимогами не будуть виявлені.
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявився піковий король. Яка ймовірність того, що у гравця стріт (наприклад,  $7\heartsuit, 8\clubsuit, 9\spadesuit, 10\heartsuit, B\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Яка ймовірність того, що у нескінченній серії випробувань Бернуллі подія НН станеться раніше за УУ?
5. Випадкова величина  $\xi$  набуває цілих невід'ємних значень з імовірностями

$$P(\xi = n) = \frac{a^n}{(1 + a)^{n+1}},$$

де  $a > 0$  (розподіл Паскаля). Обчислити  $E\xi$ ,  $D\xi$ .

## ДІП-2018: Варіант V.

1. Нехай  $A$  і  $B$  – незалежні події. Доведіть, що  $\bar{A}$  і  $\bar{B}$ , доповнення до множин  $A$  і  $B$ , теж є незалежними подіями.
2. Урна містить  $m > 3$  білих і  $n$  чорних куль. Випадково втрачено одну кулю. Для перевірки складу урни з неї витягнули без повернення дві кулі, які виявилися білими. Яка ймовірність, що втрачено чорну кулю?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова трійка. Яка ймовірність того, що у гравця пара (наприклад,  $7\heartsuit, 7\clubsuit, 9\heartsuit, 10\spadesuit, A\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Деталі виробляють на трьох заводах. Об'єм продукції третього заводу в  $n_1$  разів перевищує об'єм продукції першого та в  $n_2$  – другого. Доля браку на заводах –  $p_1, p_2$  і  $p_3$  відповідно. Навмання взята деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що вона випущена третім заводом?
5. Величини позовів за певної страхової ситуації моделюють за допомогою розподілу, генератриса моментів якого дорівнює  $M(t) = \exp\{10(\exp\{t\} - 1)\}$ . Обчисліть  $EX$ ,  $EX^2$  та  $EX^3$ .

## ДІП-2018: Варіант VI.

1. Довести, що коли події  $A, B, C$  незалежні в сукупності, то події  $A$  і  $B \setminus C$  – незалежні.
2. Із послідовності чисел  $1, 2, \dots, N$  вибирають навмання  $k$  чисел, причому кожне число може бути вибране  $0, 1, \dots, k$  раз. Яка ймовірність того, що при послідовному виборі буде одержана група з  $k$  різних чисел?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова десятка. Яка ймовірність того, що у гравця флеш (наприклад,  $2\heartsuit, 8\heartsuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, B\heartsuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фулхаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Маємо 5 урн: 2 урни містять по 2 білих і одній чорній кулі, 1 урна – 10 чорних куль, ще дві урни – по 3 білих та по одній чорній кулі. Чому дорівнює ймовірність, що вийнята куля біла?
5. Перевірити, чи є сума двох незалежних випадкових величин, розподілених за біномним законом, теж розподіленою за біномним законом.

## ДЙП-2018: Варіант VII.

1. Подія  $A$  не залежить від  $B$  і  $C$ , причому  $B \subset C$ . Показати, що  $A$  не залежить і від події  $C \setminus B$ .
2. Розглянемо 12 незалежних полісів страхування, пронумерованих 1, 2, 3, ..., 12, за кожним з яких може надійти не більше однієї вимоги. Для кожного полісу ймовірність настання страхового випадку становить 0.1. Знайти ймовірність, що жодної вимоги не надійде від групи полісів із номерами 1, 2, 3, 4, 5 і 6, та лише 1 вимога надійде від групи полісів з номерами 7, 8, 9, 10, 11, і 12.
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась чирвовий король. Яка ймовірність того, що у гравця фул-хаус (трійка і двійка, наприклад,  $7\heartsuit, 7\clubsuit, 7\spadesuit, 10\heartsuit, 10\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Маємо 5 урни: 2 урни містять по 2 білих, одній чорній і одній червоній кулі, 1 урна – 5 чорних і 5 червоних куль, ще дві урни – по 3 білих та по одній чорній кулі. Чому дорівнює ймовірність, що вийнята куля біла?
5. Випадкова величина  $\xi$  має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda$ . Обчислити  $E \frac{1}{1+\xi}$ .

## ДІП-2018: Варіант VIII.

1. Нехай  $A$  і  $B$  – дві події такі, що  $P(A) = 0.4$  і  $P(A \cap B) = 0.2$ . Знайти найменше і найбільше можливі значення умовної ймовірності  $P(A|B)$ .
2. Припустимо, що у групі страхових полісів (які є незалежними щодо надходження вимог), від 20% полісів надійшли вимоги протягом останнього року. Аудитор вивчає поліси з групи один за одним у випадковому порядку, доки не знайде два поліси (не обов'язково послідовні) з вимогою.
  - (i) Визначте ймовірність, що рівно п'ять полісів треба було дослідити, перш ніж два послідовні поліси з вимогами було знайдено.
  - (ii) Знайти очікуване число полісів, які треба дослідити, поки два поліси з вимогами не будуть виявлені.
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова сімка. Яка ймовірність того, що у гравця стріт (наприклад,  $7\heartsuit, 8\clubsuit, 9\spadesuit, 10\heartsuit, B\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Нехай  $\xi$  – довжина серії (успіхів або невдач) у послідовності випробувань Бернуллі, яка почалась при першому випробуванні. Знайти розподіл  $\xi$ ,  $E\xi$ ,  $D\xi$ .
5. Розмір виплат у деякій страховій ситуації моделюють за допомогою розподілу, генератриса моментів якого має вигляд  $M(t) = (1-10t)^{-2}$ . Покажіть, що  $EX^2 = 600$  і знайдіть значення  $EX^3$ .



## ДІП-2018: Варіант ІХ.

1. Довести, що коли  $P(A) > 0$  і  $P(B/\bar{A}) = P(B/A)$ , то події  $A$  і  $B$  – незалежні.
2. Урна містить  $m > 3$  білих і  $n$  чорних куль. Випадково втрачено одну кулю. Для перевірки складу урни з неї витягнули без повернення дві кулі, які виявилися білими. Яка ймовірність, що втрачено чорну кулю?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова двійка. Яка ймовірність того, що у гравця комбінація з двох пар (наприклад,  $7\heartsuit, 7\clubsuit, 10\heartsuit, 10\spadesuit, A\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Нехай ймовірність  $p_n$  того, що в сім'ї  $n$  дітей, дорівнює  $\alpha p^n$  при  $n \geq 1$  і  $p_0 = 1 - \alpha p(1 + p + p^2 + \dots)$ . Припустимо, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки однакові. Довести, що ймовірність того, що в сім'ї  $k$  хлопчиків при  $k \geq 1$  становить  $2\alpha p^k / (2 - p)^k$ .
5. Нехай  $X$  – випадкова величина, розподілена за геометричним законом. Знайти генератрису  $X_n^+ = \max\{n, X\}$  для деякого натурального  $n$ .

## ДІП-2018: Варіант X.

1. Розглянемо дві події  $A$  і  $B$  такі, що  $P(A) = 0.3$  і  $P(A \cap B) = 0.1$ . Знайти найменше і найбільше можливі значення умовної ймовірності  $P(A|B)$ .
2. Яка ймовірність, що у навмання вибраному розв'язку рівняння

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n, \quad x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

усі змінні не рівні нулю?

3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова шістка. Яка ймовірність того, що у гравця пара (наприклад,  $2\heartsuit, 2\spadesuit, 9\heartsuit, 10\heartsuit, B\heartsuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. В урну, яка містить  $n$  куль, поклали білу кулю. Яка ймовірність того, що взята з урни куля буде біла, якщо всі припущення про початковий склад урни рівноможливі?
5. Випадкові величини  $X$  та  $Y$  незалежні і мають той самий геометричний розподіл  $\{q^k p, k = 0, 1, \dots\}$ . Нехай  $Z = \max\{X, Y\}$ . Знайти сумісний розподіл величин  $Z$  і  $X$ .

## ДІП-2018: Варіант XI.

1. Довести, що коли події  $A, B, C$  незалежні в сукупності, то події  $A$  і  $B \cup C$  – незалежні.
2. Серед  $N$  виробів знаходиться  $M$  бракованих. Навмання беруть  $n$  виробів. Яка ймовірність того, що серед них  $m$  бракованих ( $m < M$ )? Яка ймовірність того, що серед них більше, ніж  $m$  бракованих?
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець отримує 5 (випадкових) карт. Після роздачі дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась пікова дама. Яка ймовірність того, що у гравця трійка (наприклад,  $7\heartsuit, 7\clubsuit, 7\spadesuit, 8\heartsuit, 10\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Маємо 5 урни: 2 урни містять по 2 білих, одній чорній і одній червоній кулі, 1 урна – 5 чорних і 5 червоних куль, ще дві урни – по 3 білих та по одній чорній кулі. Чому дорівнює ймовірність, що вийнята куля біла?
5. Нехай  $X$  – випадкова величина, розподілена за геометричним законом. Знайти генератрису  $X_n^- = \min\{n, X\}$  для деякого натурального  $n$ .

## ДІП-2018: Варіант XII.

1. Нехай  $A$  і  $B$  – дві події такі, що  $P(A) = 0.4$  і  $P(A \cap B) = 0.2$ . Знайти найменше і найбільше можливі значення умовної ймовірності  $P(A|B)$ .
2. Припустимо, що у групі страхових полісів (які є незалежними щодо надходження вимог), від 20% полісів надійшли вимоги протягом останнього року. Аудитор вивчає поліси з групи один за одним у випадковому порядку, доки не знайде два поліси (не обов'язково послідовні) з вимогою.
  - (i) Визначте ймовірність, що рівно п'ять полісів треба було дослідити, перш ніж два послідовні поліси з вимогами було знайдено.
  - (ii) Знайти очікуване число полісів, які треба дослідити, поки два поліси з вимогами не будуть виявлені.
3. При грі у звичайний оазис-покер гравець грає проти казино. Після роздачі по 5 (випадкових) карт із 52 дилер відкриває одну зі своїх карт. Нею виявилась бубновий туз. Яка ймовірність того, що у гравця комбінація туз і король (наприклад,  $7\heartsuit, 8\clubsuit, 9\spadesuit, K\heartsuit, A\spadesuit$ )? Всі значущі комбінації за зростанням: туз і король, пара, дві пари, трійка, стріт, флеш, фул-хаус, четвірка, стріт-флеш, роял-флеш.
4. Яка ймовірність того, що у нескінченній серії випробувань Бернуллі подія УН станеться раніше за НУ?
5. Випадкові величини  $X$  та  $Y$  незалежні і мають той самий геометричний розподіл  $\{q^k p, k = 0, 1, \dots\}$ . Нехай  $Z = \min\{X, Y\}$ . Знайти розподіл величини  $Z$ .