Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

І семестр 2012

Зміст

Вступ

У 1903 році шведський актуарій Філіп Лундберґ заклав основи сучасної теорії ризику.

Теорія ризику є синонімом математики загального страхування (зазвичай, страхування життя розглядають окремо), яка вивчає моделі позовів, які виникають у страховому бізнесі, і дає поради щодо того, якого розміру мають бути встановлені премії, щоб уникнути банкрутства страхової компанії.

Базовими поняттями, якими ми будемо оперувати, є: ризик, індивідуальний позов, кількість позовів, сумарні позови, імовірність банкрутства, розмір страхової премії.

Модель Лундберґа

- Позови відбуваються у моменти часу T_i, де $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ Їх називають *моментами часу надходження позовів*.
- i-ий позов, який надійшов у момент T_i, визначає *величину позову* X_i. Послідовність $\{X_i\}$ складається із незалежних однаково розподілених (н.о.р.) невід'ємних випадкових величин.
- Величини позовів $\{X_i\}$ та моменти їх надходження $\{T_i\}$ *взаємно незалежні*.

Визначимо тепер *процес кількості позовів*

$$N(t) = |\{i \geq 1\colon\ T_i \leq t\}|, \quad t \geq 0,$$

тобто $N = \{N(t), t \geq 0\}$ – це лічильний процес на $[0, \infty)$: $N(t)$ – кількість позовів, що надійшли до часу t.

Об'єктом основного інтересу з точки зору страхової компанії є *процес сумарної величини позовів* чи *сумарні виплати*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbb{I}_{[0,t]}(T_i), \quad t \geq 0,$$

де $S(t) = 0$, коли $N(t) = 0$.

Стохастичні ситуації та їх математичні моделі

Питання адекватності математичної моделі реальної ситуації викликає особливу увагу в такій прикладній галузі математики, як актуарна математика.

Властивості чи умови стохастичної ситуації:

- **непередбачуваність:** результат ситуації неможливо наперед передбачити з абсолютною точністю;
- **відтворюваність:** є принаймні теоретична можливість відтворити розглянуту ситуацію якзавгодно багато разів за незмінних умов;
- **стійкість частот:** якою б не була подія, що нас цікавить, під час багатократного відтворювання ситуації частота події (тобто відношення кількості випадків, коли спостерігали дану подію, до загальної кількості відтворювань ситуації) коливається біля деякого числа і наближається до нього все ближче і ближче при

Нехай Ω – непорожня множина, елементи якого позначають ω. Будемо ототожнювати елементи Ω з можливими елементарними, тобто неподільними, наслідками деякої стохастичної ситуації. Відповідно до цього множину Ω називають *множиною елементарних подій*.

Нехай $\mathcal{F}$ – множина підмножин множини Ω елементарних подій, яка має такі властивості:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
ii) якщо $B \in \mathcal{F}$, то і $\overline{B} \in \mathcal{F}$, де $\overline{B}$ – доповнення до множини B;
iii) якщо $B_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \ldots$, то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}.$$

Множину $\mathcal{F}$ називають *σ-алгеброю подій*, а її елементи (які є підмножинами множини Ω) називають *подіями*.

Міру, тобто σ-адитивну функцію множин, P, визначену на $\mathcal{F}$ і нормовану умовою $\mathsf{P}(\Omega) = 1$, називають *імовірнісною мірою* або *ймовірністю*. Нагадаємо, що властивість σ-адитивності полягає в наступному: якщо $A_1, A_2, \ldots$ – несумісні події, тобто $A_i \in \mathcal{F}$ та $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i).$$

Для $A \in \mathcal{F}$ значення $\mathsf{P}(A)$ називають ймовірністю події A.

Трійку $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ називають *імовірнісним простором* або *ймовірнісною моделлю*.

Незалежні події. Умовні ймовірності

Події A та B називають *незалежними*, якщо

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Нехай $\mathrm{P}(B) \neq 0$. *Умовна ймовірність* події A за умови B

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Якщо події A та B незалежні, то

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають *взаємно незалежними* або *незалежними у сукупності*, якщо для довільного $m \leq n$ та будь-яких індексів $i_1, \ldots, i_m$ ($i_p \neq i_q$ при $p \neq q$ та $1 \leq i_p \leq n$, $p = 1, \ldots, m$)

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{m} A_{i_p}\right) = \prod_{p=1}^{m} \mathrm{P}(A_{i_p}).$$

Розглянемо події $H_1, H_2, \dots, H_n (n \geq 2)$, які мають такі властивості:

а) події $H_1, H_2, \dots, H_n$ несумісні, тобто жодні дві з них не можуть здійснитися одночасно;

б) одна з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$ обов'язково відбудеться, тобто $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, причому $\mathrm{P}(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Якщо події $H_1, H_2, \dots, H_n$ мають властивості а) та б), то кажуть, що вони утворюють *повну групу подій*.

Формула повної ймовірності

Лема (Формула повної ймовірності)

Нехай A – деяка подія, а події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу. Тоді має місце рівність

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k). \tag{1}$$

Доведення.

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap H_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{P}(A \cap H_k)}{\mathrm{P}(H_k)} \mathrm{P}(H_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A|H_k)\mathrm{P}(H_k).$$

□

Формула Баєса

Теорема (Формула Баєса)

Нехай A – деяка подія, яка має додатну ймовірність, $P(B) > 0$, а події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу. Тоді має місце рівність

$$P(H_k|A) = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A|H_k)P(H_k)}. \qquad (2)$$

Доведення.

Безпосередньо застосовуючи визначення умовної ймовірності

$$\mathrm{P}(H_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap H_k)}{\mathrm{P}(A)}, \quad \mathrm{P}(A \cap H_k) = \mathrm{P}(A|H_k)\mathrm{P}(H_k)$$

та формулу повної ймовірності (1), отримуємо твердження

Дискретні та абсолютно неперервні випадкові величини

Розглянемо події $B_1, B_2, \dots,$ такі, що $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ та $\bigcup\limits_j B_j = \Omega$. Нехай $\{x_1, x_2, \dots\}$ – дійсні числа. Випадкову величину

$$X(\omega) = \sum_j x_j \mathbb{I}_{B_j}(\omega)$$

називають *дискретною*. При цьому $B_j = \{\omega \colon X(\omega) = x_j\}$.

Позначимо $p_i = \mathrm{P}(B_i)$. Набір $\{(x_i, p_i)\}_{i \geq 1}$ називають *законом розподілу ймовірностей* чи просто *розподілом* дискретної в.в. X.

Функція розподілу

Розглянемо ймовірність $\mathrm{P}(X \in A)$ у випадку, коли множина A є нескінченним інтервалом вигляду $(-\infty, x), x \in \mathbb{R}$. Покладемо

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X < x).$$

Функція $F(x)$ визначена для кожного дійсного x. Її називають *функцією розподілу* в.в. X.

Функція розподілу $F(x)$ будь-якої в.в. має такі властивості:

- $F(x)$ монотонно зростаюча і неперервна зліва;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Обернене твердження також істинне: для довільної функції $F(x)$, яка задовольняє ці три умови, існують ймовірнісний простір і задана на ньому в.в. така, що $F(x)$ є її функцією розподілу.

Абсолютно неперервні випадкові величини

В.в. X та її функцію розподілу F_X називають *абсолютно неперервними*, якщо існує невід'ємна функція $f_X(x)$ така, що

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\mathrm{d}y$$

для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

$f_X(x)$ називають *щільністю розподілу* в.в. X та ф-ї розподілу F_X.

Властивості щільності:

- **невід'ємність:** $f_X(x) > 0$;
- **нормованість:** $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\mathrm{d}y = 1$.

Якщо функція розподілу диференційовна, то

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Моменти випадкових величин

Математичним сподіванням $\mathsf{E}X$ в.в. X є її інтеграл Лебега:

$$\mathsf{E}X = \int_{\Omega} X \mathrm{d}\mathsf{P}.$$

$\mathsf{E}X$ існує тоді і лише тоді, коли існує $\mathsf{E}|X|$. Тоді в.в. X називають *інтегровною*.

Має місце рівність

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F_X(x),$$

у правій частині якого стоїть інтеграл Стілтьєса. Якщо в.в. X абсолютно неперервна і має щільність $f_X(x)$, то

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Якщо X – дискретна в.в. з розподілом $\{(x_i, p_i)\}_{i\geq 1}$, то

$$\mathsf{E}X = \sum_{i\geq 1} p_i x_i \quad \left(= \sum_{i\geq 1} x_i \mathsf{P}(X = x_i) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathsf{P}(\omega) \right).$$

Нехай $g(x)$ – борелівська функція, т.б. дійсна функція, визначена на $\mathbb{R}$ так, що для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ множина $\{x\colon g(x) < a\}$ є борелівською. Тоді

$$\mathsf{E}g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F_X(x).$$

Якщо в.в. X та Y незалежні, то

$$\mathsf{E}XY = \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y.$$

Математичне сподівання в.в. X^k називають *моментом порядку* k чи k*-м моментом* в.в. X:

$$m_k = \mathsf{E}X^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F_X(x).$$

Центральний момент порядку k в.в. X визначають рівністю:

$$\mu_k = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k \mathrm{d}F_X(x).$$

Особливу роль відіграє другий центральний момент μ_2, який називають *дисперсією* в.в. X:

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2.$$

Величину $\sigma_X = \sqrt{\mathsf{D}X}$ називають *середньоквадратичним* або *стандартним відхилом* в.в. X.

Генератриса розподілу

Нехай X – цілочисельна невід'ємна в.в. з розподілом імовірностей

$$\mathsf{P}(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Генератрисою $G_X(t)$ *розподілу* в.в. X називають ряд

$$G_X(t) = \mathsf{E}t^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad |t| \le 1.$$

Степеневий ряд однозначно визначений своїми коефіцієнтами, тому зв'язок між розподілами і відповідними генератрисами взаємно однозначний. Розподіл імовірностей відновлюють за генератрисою:

$$p_k = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Зокрема, $G_X(0) = \mathsf{P}(X = 0)$. Також $G_X(1) = p_0 + p_1 + \cdots = 1$.

Генератрису $G_X(t)$ можна використовувати для простого знаходження моментів нижчих порядків. Розвинемо функцію t^X у ряд Тейлора в околі точки 1:

$$t^X = 1 + X(t-1) + X(X-1)\frac{(t-1)^2}{2!} + X(X-1)(X-2)\frac{(t-1)^3}{3!} + \dots$$

Тоді

$$G_X(t) = \mathsf{E}t^X = 1 + (t-1)\mathsf{E}X + \frac{(t-1)^2}{2!}\mathsf{E}X(X-1) +$$

$$+ \frac{(t-1)^3}{3!}\mathsf{E}X(X-1)(X-2) + \dots$$

Диференціюючи цей вираз по t і покладаючи $t = 1$, отримуємо математичне сподівання. Подальше диференціювання дає формули для визначення моментів інших порядків.

Генератриса моментів

Генератрисою моментів $M_X(t)$ в.в. X називають функцію

$$M_X(t) = \mathrm{E}\exp\{tX\}.$$

$M_X(t)$ визначена для всіх значень t, для яких існує $\mathrm{E}X$.

Різним імовірнісним розподілам відповідають різні генератриси моментів. Зокрема, існує взаємно однозначна відповідність між генератрисами моментів та розподілами, для яких вони існують.

k-й момент в.в. X можна отримати за допомогою диференціювання $M_X(t)$ у точці 0. Для цього розвинемо у ряд Тейлора експоненційну функцію:

$$M_X(t) = 1 + t\mathrm{E}X + \frac{t^2}{2!}\mathrm{E}X^2 + \frac{t^3}{3!} + \mathrm{E}X^3 + \dots.$$

Тоді

$$m_k = M_X^{(k)}(0), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Нехай цілочисельна невід'ємна в.в. X має генератрису розподілу $G_X(t) = \mathsf{E}t^X$. Її генератрису моментів можна отримати, підставивши e^t замість t у $G_X(t)$, тобто

$$M_X(t) = G_X(e^t).$$

Генератриса кумулянт

Для багатьох в.в. знаходження математичного сподівання і дисперсії за допомогою генератриси кумулянт є простішим, ніж за допомогою генератриси моментів.

Генератрисою кумулянт $C_X(t)$ в.в. X називають функцію

$$C_X(t) = \ln M_X(t).$$

r-ю кумулянтою називають коефіцієнт $\frac{t^r}{r!}$ у розкладі в ряд Тейлора $C_X(t)$.

Коли відома $C_X(t)$, легко можна визначити $M_X(t)$:

$$M_X(t) = \exp\{C_X(t)\}.$$

Розглянемо перші дві похідні генератриси кумулянт:

$$C_X'(t) = \frac{M_X'(t)}{M_X(t)} \quad \text{та} \quad C_X''(t) = \frac{M_X''(t)M_X(t) - (M_X'(t))^2}{M_X^2(t)}.$$

Оскільки $M_X(0) = 1$, то

$$C_X'(0) = \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} = \mathsf{E}X \;\; \text{та} \;\; C_X''(0) = \frac{M_X''(0)M_X(0) - (M_X'(0))^2}{M_X^2(0)} = \mathsf{E}X^2 -$$

Таким чином, перші дві подхідні $C_X(t)$, обчислені при $t = 0$, безпосередньо дають середнє значення та дисперсію в.в. X.

Основні типи розподілів індивідуальних позовів та кількості позовів

Розглянемо деякі спеціальні розподіли, які надалі ми будемо часто використовувати для моделювання кількості індивідуальних позовів та їх величини.

Дискретні розподіли

Розглянуті тут розподіли є моделями кількості якихось подій: числа "успіхів", числа "випробувань", кількості смертей, кількості вимог тощо. Будемо припускати, що значення, яких набуває в.в., є цілими числами з множини $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Рівномірний розподіл

Множина елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Всі елементарні події відбуваються з рівною ймовірністю $\frac{1}{n}$. Визначимо в.в. X так: $X(i) = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді розподіл X має вигляд

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обчислимо моменти в.в. X:

$$\begin{aligned} m_1 &= \mathrm{E}X = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}; \\ m_2 &= \mathrm{E}X^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}; \\ \mu_2 &= \mathrm{D}X = m_2 - m_1^2 = \frac{n^2 - 1}{12}. \end{aligned}$$

Розподіл Бернуллі

Випробуванням Бернуллі називають стохастичну ситуацію, яка може закінчитися лише одним із двох результатів: або “успіхом” (У) або “невдачею” (Н).

Множина елементарних подій $\Omega = \{\text{У}, \text{Н}\}$. Ймовірнісна міра:

$$\mathsf{P}(\{\text{У}\}) = \theta, \quad \mathsf{P}(\{\text{Н}\}) = 1 - \theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

В.в. X визначимо так: $X(\text{У}) = 1$, $X(\text{Н}) = 0$. Тоді X є кількістю успіхів, що відбулися (0 чи 1).

Розподіл Бернуллі

Випробуванням Бернуллі називають стохастичну ситуацію, яка може закінчитися лише одним із двох результатів: або “успіхом” (У) або “невдачею” (Н).

Множина елементарних подій $\Omega = \{У, Н\}$. Ймовірнісна міра:

$$\mathsf{P}(\{У\}) = \theta, \quad \mathsf{P}(\{Н\}) = 1 - \theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

В.в. X визначимо так: $X(У) = 1$, $X(Н) = 0$. Тоді X є кількістю успіхів, що відбулися (0 чи 1).

Розподіл в.в. X:

$$\mathsf{P}(X = k) = \theta^k (1 - \theta)^{1-k}, \quad k = 0, 1.$$

Моменти X:

$$m_1 = \theta, \quad m_2 = \theta^2, \quad \mu_2 = \theta(1 - \theta).$$

Біноміальний розподіл

Розглянемо послідовність із n випробувань Бернуллі, які

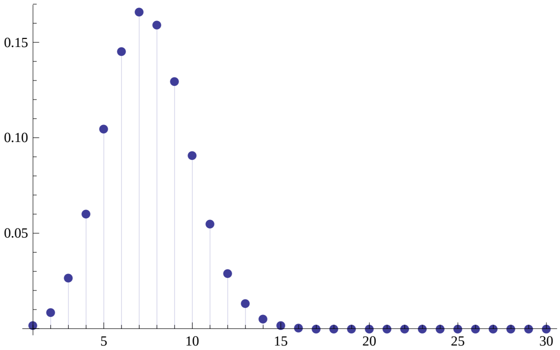
- незалежні у сукупності між собою, причому
- ймовірність успіху не залежить від номеру випробування.

Таку послідовність називають *схемою випробувань Бернуллі*.

Множина елементарних подій Ω є об'єднанням усіх можливих елементарних результатів n випробувань.

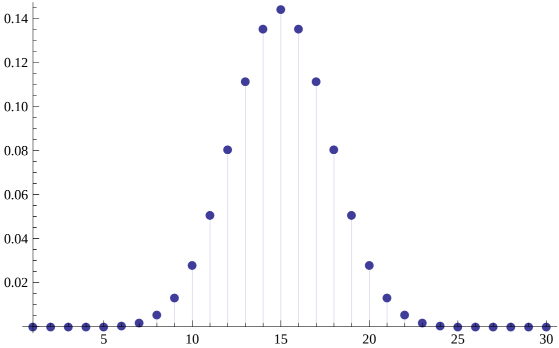
Нехай в.в. X позначає кількість успіхів з-поміж n випробувань. Тоді розподіл X такий:

$$\mathrm{P}(X = k) = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < \theta < 1.$$



$$n = 30,\ \theta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.1. Біноміальні розподіли



$$n = 30,\ \theta = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.2. Біноміальні розподіли

Знайдемо генератриси в.в. X:

Знайдемо генератриси в.в. X:

$$G_X(t) = \mathsf{E}t^X = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} t^k = (\theta t + 1 - \theta)^n;$$
$$M_X(t) = G_X(e^t) = (\theta e^t + 1 - \theta)^n;$$
$$C_X(t) = \ln M_X(t) = n \ln(\theta e^t + 1 - \theta).$$

Знаючи вигляд генератриси розподілу $G_X(t)$, легко обчислити моменти біноміально розподіленої в.в. X:

$$\begin{aligned} G_X'(t) = n\theta(\theta t + 1 - \theta)^{n-1} &\quad\Rightarrow\quad m_1 = G_X'(1) = n\theta; \\ G_X''(t) = n(n-1)\theta^2(\theta t + 1 - \theta)^{n-2} &\quad\Rightarrow \end{aligned}$$

$$m_2 - m_1 = G_X''(1) = n(n-1)\theta^2;$$

$$m_2 = n(n-1)\theta^2 + n\theta; \quad \mu_2 = n\theta(1-\theta).$$

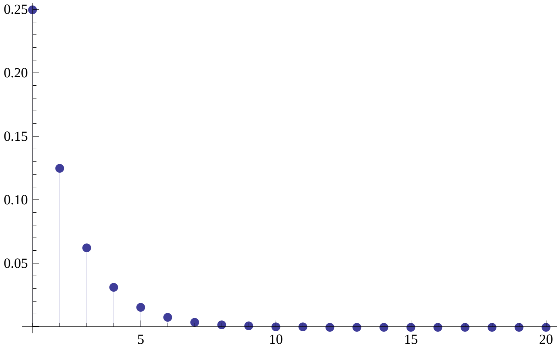
Геометричний розподіл

Знову розглянемо схему випробувань Бернуллі з $\mathsf{P}(\{\text{У}\}) = \theta$, $0 < \theta < 1$, яка триває до здійснення першого успіху.

Множина елементарних подій $\Omega = \{\text{У, НУ, ННУ, ННУ}, \dots\}$.

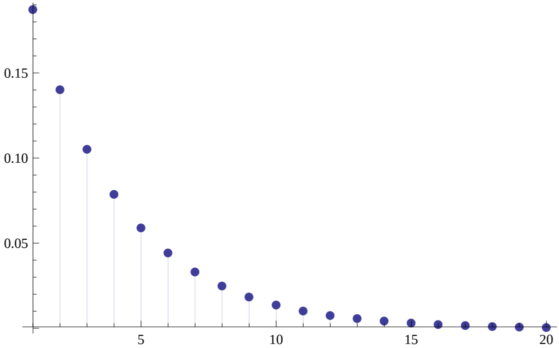
Визначимо в.в. X як номер випробування, коли відбувся успіх. Тоді

$$\mathsf{P}(X = k) = \theta(1 - \theta)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$



$$\theta = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.3. Геометричні розподіли



$$\theta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.4. Геометричні розподіли

Генератриси:

Генератриси:

$$G_X(t) = \mathsf{E}t^X =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{k-1} t^k = \theta t \sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)^k t^k = \frac{\theta t}{1-(1-\theta)t};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = \frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t};$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = t + \ln\theta - \ln(1-(1-\theta)e^t).$$

Моменти X:

Генератриси:

$$G_X(t) = \mathsf{E} t^X =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{k-1} t^k = \theta t \sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)^k t^k = \frac{\theta t}{1-(1-\theta)t};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = \frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t};$$

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = t + \ln\theta - \ln(1-(1-\theta)e^t).$$

Моменти X:

$$M_X'(t) = \frac{\theta e^t}{(1-(1-\theta)e^t)^2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = M_X'(0) = \frac{1}{\theta};$$

$$M_X''(t) = \frac{\theta e^t(1+(1-\theta)e^t)}{(1-(1-\theta)e^t)^3} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{2+\theta}{\theta^2},$$

$$\mu_2 = M_X''(0) = m_2 - m_1^2 = \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

Розподіл Пуассона

Цей розподіл моделює кількість подій, які сталися протягом зазначеного проміжку часу, коли події відбуваються одна за одною за певним правилом. Це правило передбачає, що події здійснюються окремо, зі сталою інтенсивністю, а кількості подій, які відбулися на неперетинних проміжках часу, є незалежними між собою.

Як інший підхід до розподілу Пуассона розглянемо послідовність біноміальних розподілів з параметрами (n, θ), коли $n \to \infty$ та $\theta \to 0$ одночасно так, що середнє значення $n\theta$ є сталим і дорівнює λ.

В.в. X має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо

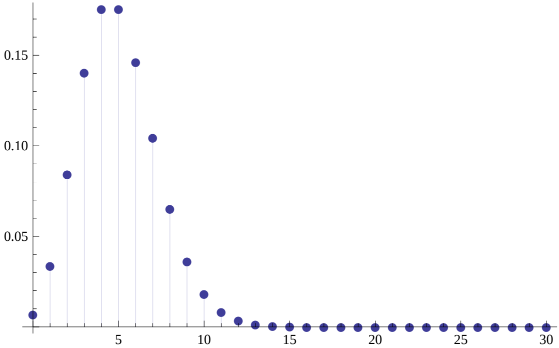
$$\mathrm{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Ці ймовірності отримують з біноміальних при $n \to \infty$ та $\theta = \frac{\lambda}{n} \to 0$:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

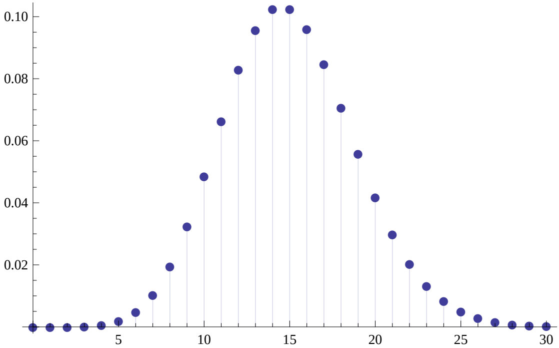
$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \to$$

$$\to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \to \infty.$$



$\lambda = 5$

Рис. 1.5. Розподіли Пуассона



$\lambda = 15$

Рис. 1.6. Розподіли Пуассона

Генератриси:

Генератриси:

$$G_X(t) = \mathsf{E}t^X = \sum_{k=0}^{\infty} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}; \qquad C_X(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t-1).$$

Моменти X:

Генератриси:

$$G_X(t) = \mathsf{E}t^X = \sum_{k=0}^{\infty} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)};$$

$$M_X(t) = G_X(e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}; \qquad C_X(t) = \ln M_X(t) = \lambda(e^t-1).$$

Моменти X:

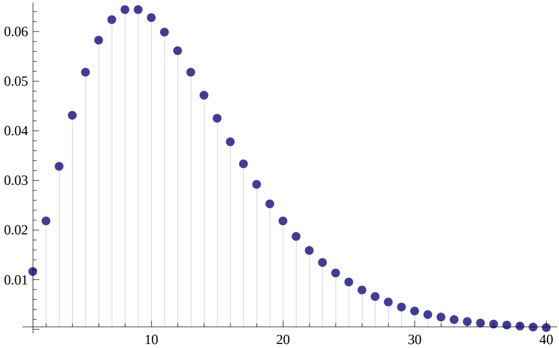
$$C_X'(t) = \lambda e^t \Rightarrow m_1 = C_X'(0) = \lambda; \qquad C_X''(t) = \lambda e^t \Rightarrow \mu_2 = C_X''(0) = \lambda.$$

Від'ємний біноміальний розподіл

Цей розподіл є узагальненням геометричного. Нехай в.в. X – номер того випробування, на якому відбувся k-й успіх, де k – натуральне число. Тоді розподіл X такий:

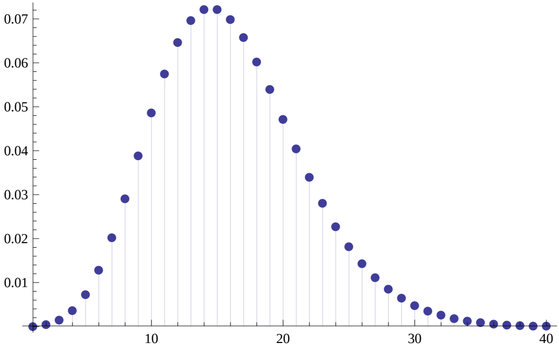
$$\mathrm{P}(X = j) = C_{j-1}^{k-1}\theta^k(1-\theta)^{j-k}, \quad j = k, k+1, \dots, \quad 0 < \theta < 1.$$

Зокрема, при $k = 1$ в.в. X має геометричний розподіл.



$k = 4,\ \theta = \frac{1}{4}$

Рис. 1.7. Від'ємні біноміальні розподіли



$$k = 10,\ \theta = \frac{1}{2}$$

Рис. 1.8. Від'ємні біноміальні розподіли

Генератриси:

Генератриси:

$$G_X(t) = \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1}\theta^k(1-\theta)^{j-k}t^j = (\theta t)^k \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1}(1-\theta)^{j-k}t^{j-k} =$$

$$= \frac{\theta^k t^k}{(1-(1-\theta)t)^k};$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t}\right)^k; \quad C_X(t) = k(t+\ln\theta-\ln(1-(1-\theta)e^t))$$

Моменти X:

Генератриси:

$$G_X(t) = \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} \theta^k (1-\theta)^{j-k} t^j = (\theta t)^k \sum_{j=k}^{\infty} C_{j-1}^{k-1} (1-\theta)^{j-k} t^{j-k} =$$

$$= \frac{\theta^k t^k}{(1-(1-\theta)t)^k};$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t} \right)^k; \quad C_X(t) = k(t + \ln\theta - \ln(1-(1-\theta)e^t))$$

Моменти X:

$$C_X'(t) = \frac{k}{1-(1-\theta)e^t} \quad \Rightarrow \quad m_1 = C_X'(0) = \frac{k}{\theta};$$

$$C_X''(t) = \frac{k(1-\theta)e^t}{(1-(1-\theta)e^t)^2} \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = C_X''(0) = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}.$$

М. сподівання та дисперсія у k разів більші, ніж для геометрично розподіленої в.в. Це можна пояснити тим, що в.в. із від'ємно біноміальним розподілом можна подати як суму k в.в. із геометричним розподілом (кількість випробувань до першого успіху, ..., плюс кількість додаткових випробувань до k-го успіху).

Часто використовують інше формулювання від'ємного біноміального розподілу. Нехай в.в. Y – це кількість невдач перед k-м успіхом. Тоді $Y = X - k$, де в.в. X визначено вище, та

$$\mathsf{P}(Y = j) = C_{k+j-1}^{j} \theta^k (1-\theta)^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}X - k = \frac{k(1-\theta)}{\theta}, \quad \mathsf{D}Y = \mathsf{D}X = \frac{k(1-\theta)}{\theta^2}.$$

Рівномірний розподіл

В.в. X має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, що позначається $X \sim \mathcal{U}[a, b]$, якщо її щільність є сталою всередині цього відрізку та дорівнює нулю поза ним, тобто

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{x\in[a,b]}. \tag{3}$$

Моменти:

$$m_1 = \mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2};$$

$$m_2 = \mathsf{E}X^2 = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3};$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Гамма-розподіл (зокрема, експоненційний та хі-квадрат)

Сім'я гамма-розподілів має два додатних параметри і є дуже гнучкою. Щільність може набувати різної форми залежно від значень параметрів і визначена на додатній півосі $\{x\colon x > 0\}$.

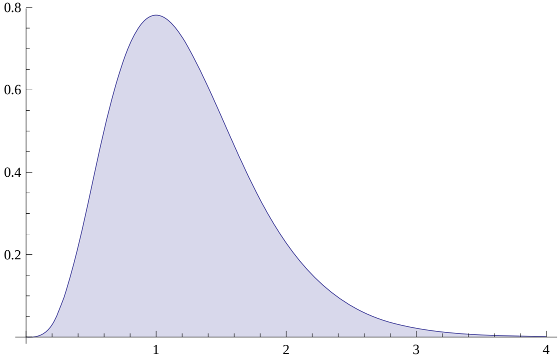
Нагадаємо спершу, що гамма-функцію $\Gamma(\alpha)$ визначають для $\alpha > 0$ таким чином:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} \mathrm{d}y.$$

Зокрема, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ для $\alpha > 1$ (тобто коли n – ціле число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$) та $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

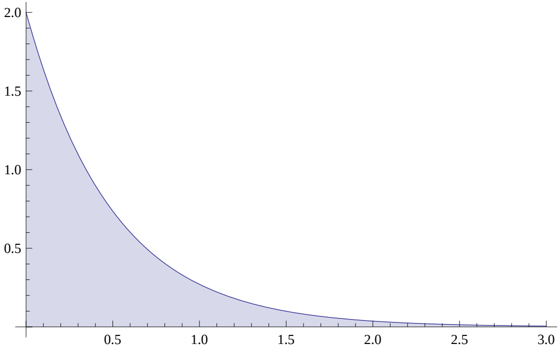
Щільність гамма-розподілу з параметрами α та λ має вигляд

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$



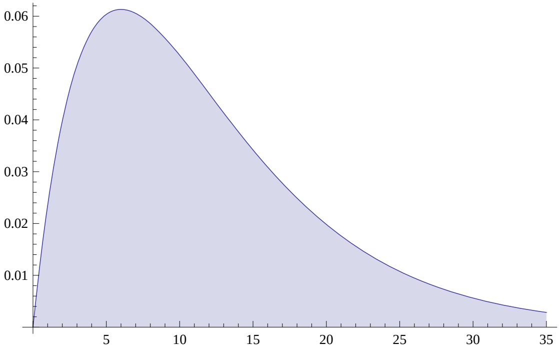
$\alpha = 5$, $\lambda = 4$

Рис. 1.9. Щільності гамма-розподілу



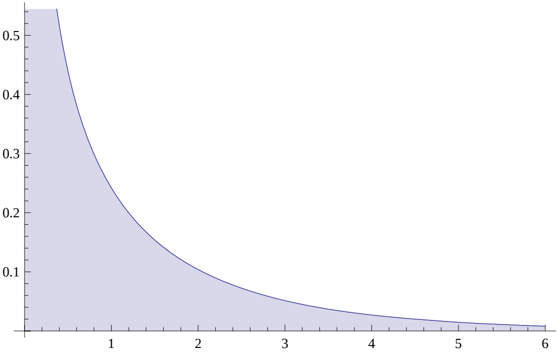
$\alpha = 1$, $\lambda = 2$

Рис. 1.10. Щільності гамма-розподілу



$\alpha = 2,\ \lambda = \frac{1}{6}$

Рис. 1.11. Щільності гамма-розподілу



$\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ $(\nu = 1)$

Рис. 1.12. Щільності гамма-розподілу

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

$$M_X(t) = \mathsf{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\lambda-t)x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{(\lambda-t)^\alpha}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\lambda-t)^\alpha}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}.$$

Обчислимо генератрису моментів $M_X(t)$, використовуючи заміну $y = (\lambda - t)x$:

$$M_X(t) = \mathsf{E}e^{tX} = \int_0^\infty e^{tx}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\lambda-t)x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{(\lambda-t)^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\lambda-t)^\alpha}\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}.$$

Гамма-розподіл. Спеціальний випадок 1

Експоненційний (показниковий) розподіл

Це гамма розподіл з параметром $\alpha = 1$.

Функція розподілу та щільність експоненційного розподілу:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 1 - e^{-\lambda x}, \ x > 0; \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0.$$

Моменти:

$$m_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Експоненційний розподіл часто використовують як просту модель тривалості життя певних типів обладнання.

Гамма-розподіл. Спеціальний випадок 2

хі-квадрат (χ^2) розподіл з параметром ν "ступеней вільності"

Це гамма розподіл з параметрами $\alpha = \frac{\nu}{2}$, де ν – натуральне число, та $\lambda = \frac{1}{2}$.

Щільність хі-квадрат розподілу з ν ступеней вільності:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Моменти:

$$m_1 = \nu, \quad \mu_2 = 2\nu.$$

Бета-розподіл

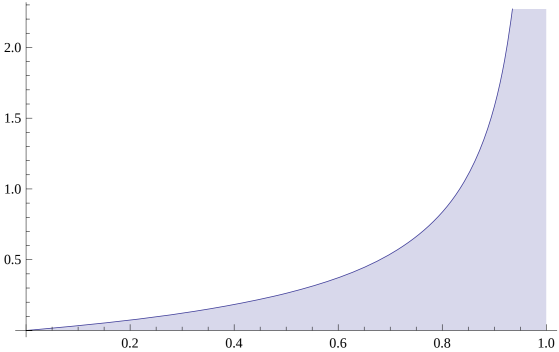
Також є іншою досить гнучкою сім'єю розподілів із двома параметрами, визначених на $\Omega = (0, 1)$.

Бета-функція

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

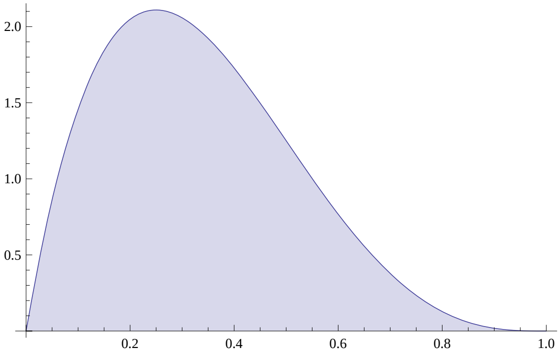
Щільність бета-розподілу:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{B(\alpha+\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ 0 < x < 1$$



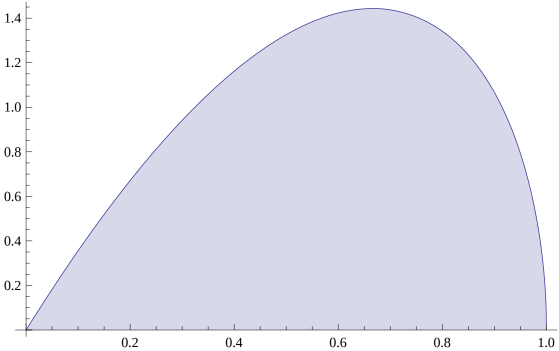
$$\alpha = 2,\ \beta = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.13. Щільності бета-розподілу



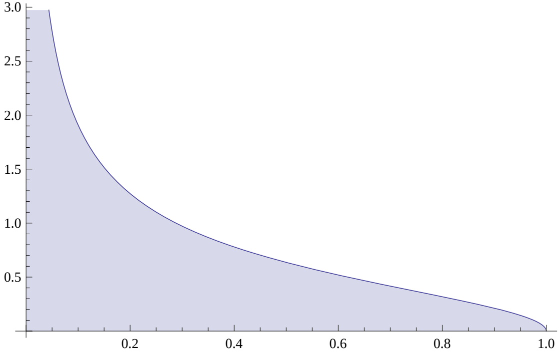
$\alpha = 2$, $\beta = 4$

Рис. 1.14. Щільності бета-розподілу



$$\alpha = 2,\ \beta = \frac{3}{2}$$

Рис. 1.15. Щільності бета-розподілу



$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{3}{2}$$

Рис. 1.16. Щільності бета-розподілу

Генератриса моментів:

Генератриса моментів:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathsf{E}e^{tX} = \int_0^1 e^{tx}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^k}{k!}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+k+\beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}\frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Моменти:

Моменти:

$$m_1 = M_X'(0) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta};$$

$$m_2 = M_X''(0) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)};$$

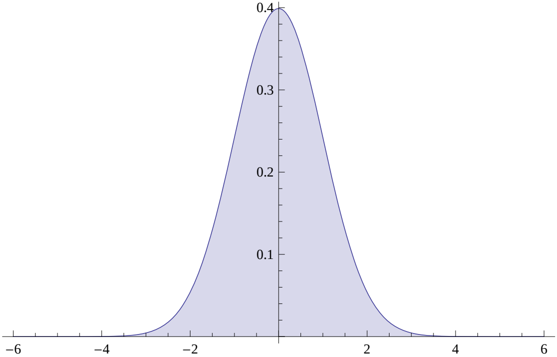
$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Нормальний (ґауссівський) розподіл

Нормальний розподіл $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ має два параметри, які зручним чином безпосередньо виражаються через середнє μ та стандартний відхил σ. Розподіл симетричний відносно μ. Щільність нормального розподілу

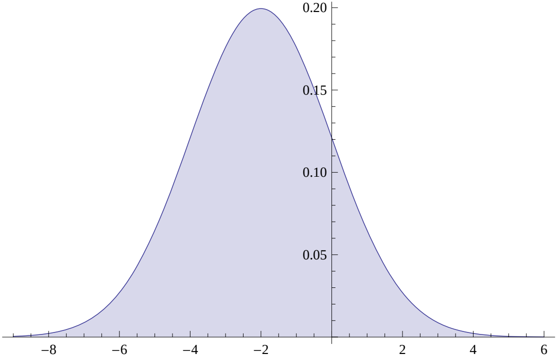
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Нормальний розподіл використовують для побудови багатьох інших розподілів (логнормальний, хі-квадрат, Фішера, Стьюдента тощо), на ньому ґрунтується велика кількість статистичних висновків.



$$\mu = 0,\ \sigma = 1$$

Рис. 1.17. Щільності нормального розподілу



$\mu = -2,\ \sigma = 2$

Рис. 1.18. Щільності нормального розподілу

Генератриса моментів:

Генератриса моментів:

$$M_X(t) = \mathsf{E}\exp\{tX\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{tx\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2 + \mu^2 - (\mu + t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x$$

$$= \exp\left\{\frac{2\mu t\sigma^2 + t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}x$$

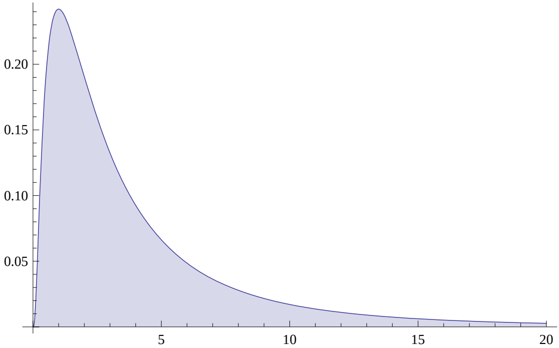
$$= \exp\left\{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}$$

Генератриса кумулянт $C_X(t) = \mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}$.
Моменти: $m_1 = C'_X(0) = \mu$; $\quad \mu_2 = C''X(0) = \sigma^2$.

Логнормальний розподіл

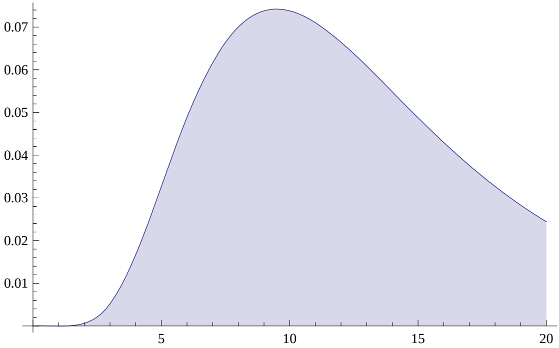
Якщо X відображає, наприклад, величину вимоги, а $Y = \ln X$ має нормальний розподіл, то кажуть, що в.в. X має логнормальний розподіл, $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$.
Щільність логнормального розподілу:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad 0 < x < \infty.$$



$\mu = 1,\ \sigma = 1$

Рис. 1.19. Щільності логнормального розподілу



$\mu = \frac{5}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$

Рис. 1.20. Щільності логнормального розподілу

Генератриса моментів:

$$M_X(t) = \mathsf{E}\exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\}\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\{te^y\}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k\exp\{ky\}}{k!}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2-2k\sigma^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\exp\left\{\mu k+\frac{k^2\sigma^2}{2}\right\}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{(y-\mu-k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\exp\left\{\mu k+\frac{k^2\sigma^2}{2}\right\}.$$

Звідси отримуємо моменти, як відповідні коефіцієнти при $\frac{t^k}{k!}$:

$$m_1 = M'_X(0) = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\};$$

$$m_2 = M''_X(0) = \exp\left\{2\mu + 2\sigma^2\right\};$$

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \exp\left\{2\mu + 2\sigma^2\right\} - \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\} \\ &= \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\}\left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right).\end{aligned}$$

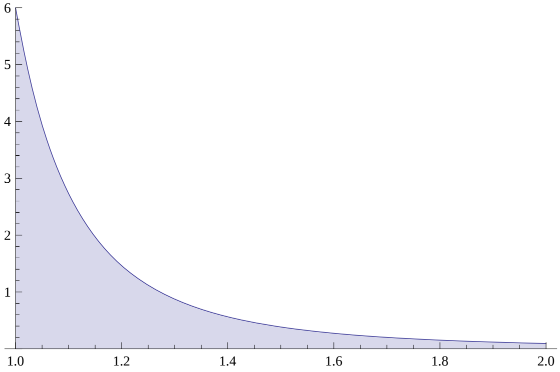
Розподіл Парето

В.в. X має розподіл Парето з параметрами $a > 0$, $\lambda > 0$, якщо

$$f_X(x) = \frac{a\lambda^a}{(\lambda + x)^{a+1}}, \quad x > 0.$$

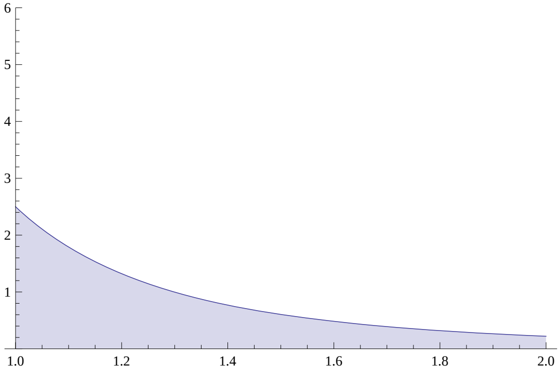
Тоді функція розподілу X має вигляд

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^a, \quad x > 0.$$



$a = 2,\ \lambda = \frac{1}{3}$

Рис. 1.21. Щільності розподілу Парето



$$a = \frac{5}{2},\ \lambda = 1$$

Рис. 1.22. Щільності розподілу Парето

Оскільки моменти порядку k в.в. X скінченні лише для $k < a$, математичне сподівання і дисперсію обчислимо безпосередньо:

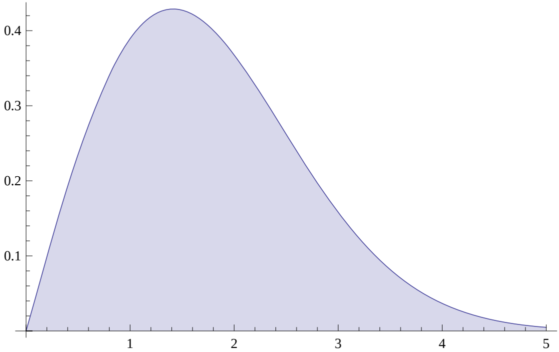
Оскільки моменти порядку k в.в. X скінченні лише для $k < a$, математичне сподівання і дисперсію обчислимо безпосередньо:

$$
\begin{aligned}
m_1 = &= \int_0^\infty x f_X(x)\mathrm{d}x = a\lambda^a \int_0^\infty \frac{x}{(\lambda + x)^{a+1}}\mathrm{d}x \\
&= a\lambda^a \int_0^\infty \left(\frac{1}{(\lambda + x)^a} - \frac{\lambda}{(\lambda + x)^{a+1}} \right) \mathrm{d}x \\
&= a\lambda^a \left(\frac{\lambda^{-a+1}}{a-1} - \frac{\lambda\lambda^{-a}}{a} \right) = \frac{\lambda}{a-1}, \quad a > 1; \\
m_2 = &= \int_0^\infty x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = a\lambda^a \int_0^\infty \frac{x^2}{(\lambda + x)^{a+1}}\mathrm{d}x \\
&= a\lambda^a \int_0^\infty \left(\frac{1}{(\lambda + x)^{a-1}} - \frac{2\lambda}{(\lambda + x)^a} + \frac{\lambda^2}{(\lambda + x)^{a+1}} \right) \mathrm{d}x \\
&= a\lambda^a \left(\frac{\lambda^{-a+2}}{a-2} - 2\frac{\lambda\lambda^{-a+1}}{a-1} + \frac{\lambda^2\lambda^{-a}}{a} \right) = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)}, \quad a > \\
\mu_2 = &= m_2 - m_1^2 = \frac{a\lambda^2}{(a-1)^2(a-2)}, \quad a > 2.
\end{aligned}
$$

Розподіл Вейбулла

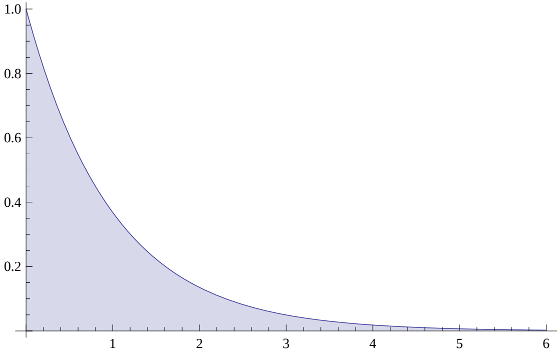
В.в. X має розподіл Вейбулла з параметрами $c > 0$, $\gamma > 0$, якщо

$$f_X(x) = c\gamma x^{\gamma-1}\exp\{-cx^{\gamma}\}, \quad x > 0.$$



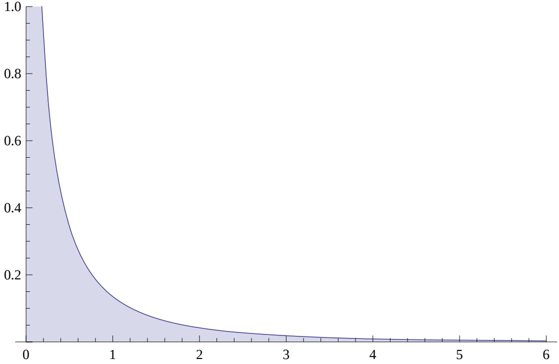
$$\gamma = 2,\ c = \frac{1}{4}$$

Рис. 1.23. Щільності розподілу Вейбулла



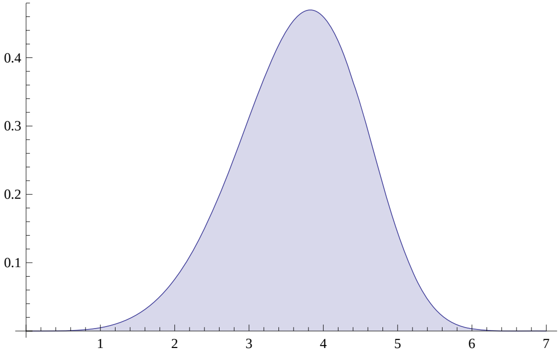
$\gamma = 1$, $c = 1$

Рис. 1.24. Щільності розподілу Вейбулла



$\gamma = \frac{1}{2}$, $c = 2$

Рис. 1.25. Щільності розподілу Вейбулла



$\gamma = 8, \ c = 2^{-10}$

Рис. 1.26. Щільності розподілу Вейбулла

Генератрису моментів (використаємо заміну $cx^{\gamma} = y$):

Генератрису моментів (використаємо заміну $cx^\gamma = y$):

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathsf{E}\exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\}c\gamma x^{\gamma-1}\exp\{-cx^\gamma\}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \exp\left\{t\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}\exp\{-y\}\mathrm{d}y = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{k}{\gamma}}\exp\{-y \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}c^{-\frac{k}{\gamma}}\int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}}\exp\{-y\}\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}c^{-\frac{k}{\gamma}}\Gamma\left(1+\frac{k}{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Моменти:

Генератрису моментів (використаємо заміну $cx^\gamma = y$):

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathsf{E}\exp\{tX\} = \int_0^\infty \exp\{tx\} c\gamma x^{\gamma-1}\exp\{-cx^\gamma\}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \exp\left\{t\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\}\exp\{-y\}\mathrm{d}y = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{k}{\gamma}} \exp\{-y \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}} \int_0^\infty y^{\frac{k}{\gamma}}\exp\{-y\}\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} c^{-\frac{k}{\gamma}}\Gamma\left(1+\frac{k}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

Моменти:$m_k = M^{(k)}(0) = c^{-\frac{k}{\gamma}}\Gamma\left(1+\frac{k}{\gamma}\right)$,

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = c^{-\frac{2}{\gamma}}\left(\Gamma\left(1+2\gamma^{-1}\right) - \left(\Gamma\left(1+\gamma^{-1}\right)\right)^2\right).$$

Зауважимо, що розглянутий вище розподіл Парето – це розподіл, у якого "правий хвіст"

$$\mathsf{P}(X > x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{a}$$

прямує до нуля як x^{-a} і є значно "важчим", ніж експоненційний, у якого

$$\mathsf{P}(X > x) = \exp\{-\lambda x\}.$$

Повертаючись до розподілу Вейбулла, маємо такі випадки:

- якщо $\gamma < 1$, то виникає розподіл, який, у певному розумінні, є проміжним між експоненційним та розподілом Парето;
- при $\gamma > 1$ правий хвіст легший за експоненційний;
- випадок $\gamma = 1$ відповідає експоненційному розподілу.

Така гнучкість розподілу Вейбулла дозволяє використовувати його для моделювання збитків (як правило, з $\gamma < 1$).

Задача

Величини позовів за певної страхової ситуації моделюють за допомогою розподілу, генератриса моментів якого дорівнює $M(t) = (1 - 10t)^{-2}$. *Обчисліть* EX, EX^2 *та* EX^3.

Задача

Розглянемо дискретну в.в. X *із розподілом* $P(X = x) = \frac{4}{5^{x+1}}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

i) *Визначте генератрису моментів* X.

ii) *Обчисліть* EX, *використовуючи результат пункту i).*

Задача

Величину позову X в одиницях \$1000 для певного типу страхування промисловості моделюють як гамма-розподілену в.в. із параметрами $\alpha = 3$ та $\lambda = \frac{1}{4}$.

i) *Використовуючи генератриси моментів, покажіть, що $\frac{1}{2}X$ має χ^2 розподіл з 6 степенями вільності.*

ii) *Обчисліть ймовірність того, що величина позову перевищить \$20 000.*

Задача

Припустимо, що X є в.в. з генератрисою моментів $M_X(t)$ та генератрисою кумулянт $C_X(t)$. Нехай $Y = aX + b$, де a та b – деякі сталі. Нехай також в.в. Y має генератрису моментів $M_Y(t)$ та генератрису кумулянт $C_Y(t)$.

i) *Покажіть, що $C_Y(t) = bt + C_X(at)$.*

ii) *Обчисліть коефіцієнт асиметрії $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ в.в. Y, якщо $M_X(t) = (1-t)^{-2}$ та $Y = 3X + 2$.*

Задача

Загальне число позовів, які виникають у групі полісів протягом року, моделюють як пуассонівську в.в. з середнім 10. Величину кожного позову, в $\$100$, *незалежно моделюють як гамма-розподілену в.в. з параметрами* $\alpha = 4$ *та* $\lambda = \frac{1}{5}$. *Обчисліть середнє значення та стандартний відхил сумарної величини позовів.*