Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

I семестр 2012

Зміст

1. Лекція 10: Експоненційний клас
    - Експоненційний клас
        - Пуассонівська-гамма модель
        - Біноміальна-бета модель
        - Гамма-гамма модель
        - Нормальна-нормальна модель
        - Геометрична-бета модель
    - Теорія довіри
    - Загальний інтуїтивний принцип

Експоненційний клас та відповідна йому сім'я спряжених розподілів

Будемо казати, що розподіл експоненційного типу, якщо його можна подати так:

$$\mathrm{d}F(x) = \exp\left\{ \frac{x\nu - b(\nu)}{\sigma^2/w} + c(x, \sigma^2/w) \right\} \mathrm{d}\eta(x), \quad x \in A \subset \mathbb{R}. \tag{1}$$

В рівності (1) η позначає міру Лебегу або зліченну міру, $b(\cdot)$ – деяка дійснозначна двічі диференційовна функція від ν, w та σ^2 – дійсні сталі.

Клас розподілів експоненційного типу, визначений (1), називають однопараметричним експоненційним класом

$$\mathcal{F}_{\exp} = \{F_\nu : \nu \in \Theta\}. \tag{2}$$

Однопараметричний експоненціальний клас $\mathcal{F}_{\mathrm{exp}}$ охоплює широкий клас сімейств розподілів. Він включає в себе, з-поміж інших, сімейства розподілів Пуассона, Бернуллі, гамма, нормальних та зворотно-гауссових. Також він відіграє центральну роль в рамках загальної лінійної моделі (GLM), яка відноситься до стандартних набору інструментів, використовуваних під час розрахунку страхових внесків залежно від декількох рейтингових факторів.

Кожна з таких сімей із $\mathcal{F}_{\mathrm{exp}}$ характеризується специфічною формою функцій $b(\cdot)$ та $c(\cdot,\cdot)$. Ми будемо позначати таку задану сім'ю $\mathcal{F}_{\mathrm{exp}}^{b,c}$.

Параметр ν в (1) називають канонічним або натуральним. У нашому контексті, ν треба інтерпретувати як профіль ризику, що набуває значення в Θ. Зауважимо, що ν тут одномірна дійсна величина. Параметр σ^2 вважають фіксованим і називають дисперсійним параметром. Нарешті, w позначає попередньо відомий ваговий коефіцієнт, приписаний до спостереження. В той час, як дисперсійний параметр σ^2 є постійним щодо спостережень, ваговий коефіцієнт w може бути різним для компонент вектору спостережень.

Розглянемо тепер конкретне сімейство розподілів $\mathcal{F}_{\mathrm{exp}}^{b,c} \in F_{\mathrm{exp}}$ із заданою формою $b(\cdot)$ та $c(\cdot,\cdot)$.

Теорема

Припустимо, що для даного ν компоненти вектора спостережень $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ є незалежними щодо розподілу $F_\nu \in \mathcal{F}^{b,c}_{exp}$, кожне спостереження має однакову дисперсію σ^2 та вагові коефіцієнти w_j, $j = 1, 2 \ldots, n$. Розглянемо сімейство

$$\mathcal{U}^b_{exp} = \{u_\gamma(\nu) \colon \gamma = (x_0, \tau^2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}, \tag{3}$$

де

$$u_\gamma(\nu) = \exp\left\{\frac{x_0\nu - b(\nu)}{\tau^2} + d(x_0, \tau^2)\right\}, \quad \nu \in \Theta, \tag{4}$$

є щільностями (відносно міри Лебега).
Тоді клас розподілів $\mathcal{U}^b_{exp}$ є спряженим до $\mathcal{F}^{b,c}_{exp}$.

Зауважимо, що $\exp\left\{d(x_0, \tau^2)\right\}$ в (4) є просто нормувальним множником. Крім того, сімейство спряжених до $\mathcal{F}^{b,c}_{exp}$ розподілів

Доведення

Апостеріорна щільність W для даного значення $\mathbf{X}$ має вигляд

$$u(\nu|\mathbf{X}=\mathbf{x}) \propto \prod_{j=1}^{n} \exp\left\{\frac{x_j\nu - b(\nu)}{\sigma^2/w}\right\} \exp\left\{\frac{x_0\nu - b(\nu)}{\tau^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{\left(\frac{\sigma^2}{\tau^2}+w_*\right)^{-1}\left(\frac{\sigma^2}{\tau^2}x_0 + w_*\bar{x}\right)\nu - b(\nu)}{\sigma^2/\left(\frac{\sigma^2}{\tau^2}+w_*\right)}\right\}$$

де $\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{w_*} x_j$ та $w_* = \sum_{j=1}^{n} w_j$.
Як бачимо, апростеріорний розподіл за даного $\mathbf{X}=\mathbf{x}$ знову належить $\mathcal{U}_{\mathrm{exp}}^{b}$, оновленими параметрами є

$$x' = \frac{\sigma^2}{\tau^2}x_0 + w_*\bar{x} \quad \text{та} \quad \tau'^2 = \sigma^2\left(\frac{\sigma^2}{\tau^2}+w_*\right)^{-1}.$$

Визначимо тепер індивідуальну, колективну та баєсівську премії.

Теорема

Для сімейства $\mathcal{F}^{b,c}_{exp}$ та спряженого $\mathcal{U}^{b}_{exp}$ до нього

$$P^{інд}(\nu) = b'(\nu) \quad та \quad D(X_j | W = \nu, w_j) = b''(\nu)\sigma^2 / w_j. \tag{5}$$

Якщо область Θ така, що $\exp\left\{d(x_0, \tau^2)\right\}$ зникає на межі Θ для будь-якого можливого значення x_0, то

$$P^{кол} = x_0, \tag{6}$$

$$P^* = \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) P^{кол}, \tag{7}$$

де

$$\bar{X} = \sum^{n} \frac{w_j}{\ldots} X_j, 8 \quad \alpha = \frac{w_*}{\ldots \sigma^2}.$$

Доведення

Розглянемо генератрису моментів в.в. X за умови даного значення $W=\nu$ та даного вагового коефіцієнта w.

$$M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX}|W=\nu)=\int e^{tx}\exp\left\{\frac{x\nu-b(\nu)}{\sigma^2/w}+c(x,\sigma^2/w)\right\}\mathrm{d}\eta(x)$$

$$=\int \exp\left\{\frac{x\left(\nu+t\sigma^2/w\right)-b\left(\nu+t\sigma^2/w\right)}{\sigma^2/w}+c(x,\sigma^2/w)\right\}\mathrm{d}\eta(x)\exp\Bigg\{$$

$$=\exp\left\{\frac{b\left(\nu+t\sigma^2/w\right)-b(\nu)}{\sigma^2/w}\right\},$$

оскільки перший множник в останній рівності є інтегралом від щільності, а тому дорівнює одиниці.

Відповідно, генератриса кумулянт має вигляд

$$C_X(t) = \ln M_X(t) = \frac{b\left(\nu + t\sigma^2/w\right) - b(\nu)}{\sigma^2/w}.$$

Звідси

$$P^{\text{інд}}(\nu) = \mathrm{E}(X|W = \nu) = C_X'(0) = b'(\nu),$$

$$\mathrm{D}(X|W = \nu) = C_X''(0) = b''(\nu)\frac{\sigma^2}{w}.$$

Для доведення (6) помітимо, що

$$P^{\text{кол}} = \int_\Theta \mu(\nu) \exp\left\{\frac{x_0\nu - b(\nu)}{\tau^2}\right\} \mathrm{d}\nu \exp\{d(x_0, \tau^2)\}$$

$$= \int_\Theta b'(\nu) \exp\left\{\frac{x_0\nu - b(\nu)}{\tau^2}\right\} \mathrm{d}\nu$$

$$\times \exp\{d(x_0, \tau^2)\}$$

$$= x_0 - \int_\Theta (x_0 - b'(\nu)) \exp\left\{\frac{x_0\nu - b(\nu)}{\tau^2}\right\} \mathrm{d}\nu \exp\{d(x_0, \tau^2)\}$$

$$= x_0 - \tau^2 \exp\{x_0\nu - b(\nu)\}\Big|_{\partial\Theta},$$

де $\partial\Theta$ позначає межу області Θ. Вибір параметричної області Θ виявляється важливим. За технічного припущення, зробленого в умові теореми, граничний доданок зникає для довільного x_0, та ми отримуємо

З доведення попередньої теореми 1.1, де було показано, що апостеріорний розподіл W за даного $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ також належить до $\mathcal{U}^{b}_{\exp}$ з параметрами

$$P^{\text{інд}}(\nu) = b'(\nu), \quad \mathsf{D}(X_j | W = \nu, w_j) = b''(\nu)\sigma^2 / w_j,$$

легко отримуємо, що

$$P^* = \mathsf{E}(\mu(W) | \mathbf{X}) = \alpha \bar{X} + (1 - \alpha) x_0,$$

де

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{w_*} X_j, \quad w_* = \sum_{j=1}^{n} w_j, \quad \alpha = \frac{w_*}{w_* + \sigma^2 / \tau^2}.$$

Розглянемо деякі класичні приклади.

Пуассонівська-гамма модель

Припустимо, що ми маємо частотні спостереження $X_j = \frac{N_j}{w_j}$, де, умовно за ν, N_j має пуассонівський розподіл з параметром $\lambda_j = w_j\nu$. Розподіл X_j тоді має вигляд

$$f_\nu(x) = e^{-w_j\nu}\frac{(w_j\nu)^{w_jx}}{(w_jx)!}, \quad x = \frac{k}{w_j}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Цю функцію можна переписати у формі (1), якщо покласти

$$\tilde{\nu} = \ln\nu, \quad b(\tilde{\nu}) = \exp\{\tilde{\nu}\}, \quad \tilde{\sigma}^2 = 1, \quad \tilde{w} = w_j,$$

$$c(x, \tilde{\sigma}^2/\tilde{w}) = -\ln((\tilde{w}x)!) + \tilde{w}x\ln\tilde{w}.$$

Щоб знайти спряжене сімейство $\mathcal{U}^{b}_{\mathrm{exp}}$ до попередньо відомих розподілів, підставимо $\tilde{\nu}$ та $b(\tilde{\nu})$ в (4). Матимемо

$$u_{\gamma}(\tilde{\nu}) \propto \exp\left\{\frac{x_0\tilde{\nu} - \exp\{\tilde{\nu}\}}{\tau^2}\right\}, \tag{8}$$

Виразимо отриману в (8) щільність у термінах ν, а не $\tilde{\nu}$.

$$u_{\gamma}(\tilde{\nu}) \propto \frac{1}{\tilde{\nu}} \exp\left\{\ln\left(\nu^{x_0/\tau^2}\right) - \frac{\nu}{\tau^2}\right\} = \nu^{\frac{x_0}{\tau^2}-1} e^{-\frac{\nu}{\tau^2}}. \tag{9}$$

Отже,

$$\mathcal{U}^{b}_{\mathrm{exp}} = \left\{ u(\nu)\colon u(\nu) \propto \nu^{\frac{x_0}{\tau^2}-1} e^{-\frac{\nu}{\tau^2}};\ \ x_0, \tau^2 > 0 \right\},$$

тобто є сімейством гамма-розподілів.

Обчислюючи колективну премію, отримаємо

$$P^{\text{кол}} = \mathsf{E}W = \frac{x_0}{\tau^2}\tau^2 = x_0,$$

таким чином, (6) виконується.

Біноміальна-бета модель

Ми маємо спостереження X_j, які, умовно за ν, мають гамма-розподіл з параметрами $w_j\gamma$ та $w_j\gamma\nu$, де w_j – ваговий коефіцієнт спостереження X_j. Зокрема, цей випадок виникає, коли спостереження X_j є середнім w_j незалежних величин позовів, кожна з яких має гамма-розподіл з параметрами γ та $\gamma\nu$. Щільність X_j тоді має вигляд

$$f_\nu(x) = \frac{(w_j\gamma\nu)^{w_j\gamma}}{\Gamma(w_j\gamma)} x^{w_j\gamma-1} e^{-w_j\gamma\nu x}.$$

Її можна переписати у формі (1), якщо покласти

$$\tilde{\nu} = -\nu, \quad b(\tilde{\nu}) = -\ln(-\tilde{\nu}) \quad \tilde{\sigma}^2 = \gamma^{-1}, \quad \tilde{w} = w_j,$$

$$c(x, \tilde{\sigma}^2/\tilde{w}) = (\tilde{w}\gamma - 1)\ln x - \ln\Gamma(\tilde{w}\gamma) + \tilde{w}\gamma\ln(\tilde{w}\gamma).$$

Зауважимо, що

$$\mu(\nu) = \mathsf{E}_\nu(X_j) = \nu^{-1}.$$

З (4) маємо

$$\mathcal{U}^b_{\exp} = \left\{u(\nu)\colon u(\nu) \propto \nu^{\frac{1}{\tau^2}-1} e^{-\frac{x_0}{\tau^2}\nu};\ \ x_0 > 0, \tau^2 \in (0,1)\right\},$$

тобто є сімейством гамма-розподілів.
Легко перевірити, що

$$P^{\text{кол}} = \mathsf{E}(\mu(W)) = x_0.$$

Гамма-гамма модель

Припустимо, що ми маємо частотні спостереження $X_j = \frac{N_j}{w_j}$, де, умовно за ν, N_j має біноміальний розподіл з параметрами $n = w_j$ та $\theta = \nu$. Розподіл X_j тоді має вигляд

$$f_\nu(x) = C_{w_j}^{w_j x} \nu^{w_j x} (1-\nu)^{n - w_j x}, \quad x = \frac{k}{w_j}, k = 0, 1, 2, \ldots, w_j, \; w_j \in \mathbb{N}.$$

Цю функцію можна переписати у формі (1), якщо покласти

$$\tilde{\nu} = \ln\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right), \quad b(\tilde{\nu}) = \ln(1+\tilde{\nu}) \quad \tilde{\sigma}^2 = 1, \quad \tilde{w} = w_j,$$

$$c(x, \tilde{\sigma}^2/\tilde{w}) = \ln(C_{\tilde{w}}^{\tilde{w}x}.$$

З (4) отримаємо

$$\mathcal{U}_{\exp}^{b} = \left\{ u(\nu) \colon u(\nu) \propto \nu^{\frac{x_0}{\tau^2}-1}(1-\nu)^{\frac{1-x_0}{\tau^2}-1};\ \ 0 < x_0 < 1, \tau^2 > 0 \right\},$$

тобто є сімейством бета-розподілів.
Для колективної премії маємо

$$P^{\text{кол}} = \mathsf{E}W = \frac{\frac{x_0}{\tau^2}}{\frac{x_0}{\tau^2} + \frac{1-x_0}{\tau^2}} = x_0.$$

Нормальна-нормальна модель

Ми маємо спостереження X_j, які, умовно за ν, нормально розподілені з середнім ν та дисперсією σ^2/w_j. Щільність X_j має вигляд

$$f_{\nu,\gamma,w_j}(x) = (2\pi\sigma^2/w_j)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2/w_j}\right\}.$$

Геометрична-бета модель

Ми маємо спостереження X_j, які, умовно за ν, мають геометричний розподіл з параметром ν (всі вагові коефіцієнти w_j рівні 1). Щільність X_j має вигляд

$$f_\nu(x) = (1-\nu)^x \nu, \quad x \in \mathbb{N}.$$

Вправа

В.в. W має біноміальний розподіл, зокрема

$$\mathsf{P}(W=\nu)=C_n^{\nu}\theta^{\nu}(1-\theta)^{n-\nu},\quad \nu=0,1,\ldots,n.$$

Нехай $Y=\frac{W}{n}$.

- Запишіть вираз для $\mathsf{P}(Y=y)$, $y=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n}\ldots,1$.
- Зобразіть розподіл Y у формі експоненційної сім'ї та вкажіть натуральний та дисперсійний параметри.
- Отримайте вираз для дисперсії.
- Для вибірки з n незалежних спостережень Y отримайте вираз для масштабованого відхилу.

Вправа

Гамма-розподіл з середнім μ та дисперсією μ^2/α має щільність

$$f(x) = \frac{\alpha^\alpha}{\mu^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{\alpha x}{\mu}\right\}, quad x > 0$$

- Покажіть, що її можна записати у формі експоненційної сім'ї.
- Використайте властивості експоненційної сім'ї для підтвердження того, що середнє й дисперсія цього розподілу рівні μ та μ^2/α.

Теорія довіри

Баєсівська премія $P^* = \mu(\tilde{W}) = \mathrm{E}(\mu(W)|\mathbf{X})$ є найкращою можливою оцінкою у класі всіх можливих оцінювальних функцій. Втім, у загальному випадку цю оцінку не можна виразити в закритій аналітичній формі та можна обчислити лише за допомогою чисельних методів. А тому вона не виконує вимогу простоти.

Крім того, щоб обчислити P^*, треба вказати умовні розподіли разом із попередньо відомим розподілом, що на практиці часто неможливо ні роблячи висновок із даних, ні інтуїтивно вгадуючи.

Основна ідея, що лежить в підґрунті довіри, – надати необхідну простоту оцінці, обмежуючи клас дозволених оцінювальних функцій лише лінійними за спостереженнями $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Інакше кажучи, ми шукатимемо найкращу оцінку в класі всіх лінійних оцінювальних функцій. "Найкращу" треба розуміти в баєсівському сенсі, критерієм оптимальності знову є квадратична функція втрат.

Таким чином, довірчі оцінки – це лінійні баєсівські оцінки.

Довірча премія в простій довірчій моделі

Ми розглянемо наступну просту довірчу модель:

1. в.в. X_j, $j = 1, \dots, n$, є, умовно за $W = \nu$, незалежними з однаковою функцією розподілу F_ν та умовними моментами
$$\mu(\nu) = \mathsf{E}(X_j | W = \nu), \quad \sigma^2(\nu) = \mathsf{D}(X_j | W = \nu).$$
2. W є в.в. з розподілом $U(\nu)$.

У цій моделі ми маємо

$$P^{\text{інд}} = \mu(W) = \mathsf{E}(X_{n+1}|W),$$

$$P^{\text{кол}} = \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\nu)\mathrm{d}U(\nu).$$

Нашою ціллю знову є віднайти оцінку індивідуальної премії $\mu(W)$, але зараз ми концентруємося на оцінках, які лінійні за спостереженнями. Будемо позначати найкращу оцінку в межах цього класу через $P^{\text{дов}}$ або $\mu(\hat{\hat{W}})$.

За означенням $\widehat{\widehat{\mu(W)}}$ повинна мати форму

$$\widehat{\widehat{\mu(W)}} = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j X_j,$$

де дійсні коефіцієнти $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n$ є розв'язками рівняння

$$\mathsf{E}\left(\mu(W) - \hat{a}_0 - \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j X_j\right) = \min_{a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}} \mathsf{E}\left(\mu(W) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right).$$

З того, що розподіл $X_1, \dots, X_n$ інваріантний щодо перестановки X_j та однозначності $\widehat{\widehat{\mu(W)}}$, випливає, що

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_1 = \cdots = \hat{a}_n,$$

тобто оцінка $\widehat{\widehat{\mu(W)}}$ має вигляд

$$\widehat{\widehat{\mu(W)}} = \hat{a} + \hat{b}\bar{X},$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{b} X_j$$

та де коефіцієнти $\hat{a}$, $\hat{b}$ є розв'язками задачі мінімізації

$$\mathsf{E}\left(\mu(W) - \hat{a} - \hat{b}\bar{X}\right) = \min_{a,b\in\mathbb{R}} \mathsf{E}\left(\mu(W) - a - b\bar{X}\right).$$

Беручи частинні похідні по a та b, отримаємо

$$\mathsf{E}\left(\mu(W) - a - b\bar{X}\right) = 0,$$

$$\mathrm{cov}\left(\mu(W), \bar{X}\right) - b\mathsf{D}\bar{X} = 0.$$

З припущення 1 про форму залежності у моделі випливає, що

$$\mathrm{cov}\left(\mu(W), \bar{X}\right) = \mathsf{D}\mu(W) =: \tau^2.$$

$$\mathsf{D}\bar{X} = \frac{\mathsf{E}\sigma^2(W)}{n} + \mathsf{D}\mu(W) =: \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2,$$

звідки

$$b = \frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2} = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}},$$

$$a = (1 - b)\mu_0.$$

Теорема

Довірча оцінка за припущень 1 та 2 має вигляд

$$\widehat{\widehat{\mu(W)}} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0, \tag{10}$$

де

$$\mu_0 = E\mu(W),$$

$$\alpha = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}.$$

Частку

$$\kappa = \frac{\sigma^2}{\tau^2}$$

називають коефіцієнтом довіри, його також можна записати, як

$$\kappa = \frac{(\sigma/\mu_0)^2}{(\tau/\mu_0)^2}.$$

Зауважимо, що τ/μ_0 є коефіцієнтом варіації $\mu(W)$ та є гарною мірою однорідності портфелю, в той час як

$$\sigma/\mu_0 = \sqrt{\mathsf{E}(\mathsf{D}(X_j|W)}/\mathsf{E}X_j$$

є очікуваним стандартним відхилом в межах ризику, поділеним на загальне середнє значення, та є гарною мірою мінливості в межах ризику.

Загальний інтуїтивний принцип

Довірчу премію як зважене середнє $P^{\text{кол}}$ та $\bar{X}$ можна інтерпретувати наступним чином.

- $P^{\text{кол}} = \mu_0$ – це найкраща оцінка, побудована лише на самій попередньо відомій інформації. Квадратичні втрати цієї оцінки дорівнюють

$$\mathsf{E}(\mu_0 - \mu(W))^2 = \mathsf{D}\mu(W) = \tau^2.$$

- $\bar{X}$ – це накраща можлива лінійна та індивідуально незміщена (т.б. умовно незміщена за даного значення W) оцінка, побудована лише за вектором спостережень $\mathbf{X}$. Її квадратичні втрати

$$\mathsf{E}(\bar{X} - \mu(W))^2 = \mathsf{D}\frac{\sigma^2(W)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- $P^{\text{дов}}$ є зваженою оцінкою цих двох, вагові коефіцієнти якої пропорційні *оберненим квадратичним втратам (точності)*, відповідним кожній із двох компонент, а саме

$$\widehat{\widehat{\mu(W)}} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0,$$

де

$$\alpha = \frac{n/\sigma^2}{n/\sigma^2 + 1/\tau^2} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma^2/n} = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}.$$

Теорема

Квадратичні втрати довірчої оцінки $\widehat{\widehat{\mu(W)}}$ *дорівнюють*

$$E\left(\widehat{\widehat{\mu(W)}} - \mu(W)\right)^2 = (1-\alpha)\tau^2$$

$$= \alpha\frac{\sigma^2}{n}.$$

Доведення

Безпосередніми обчисленнями отримуємо, що

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\widehat{\mu(W)}} - \mu(W)\right)^2 = \mathrm{E}\left(\alpha(\mu(W) - \bar{X}) + (1-\alpha)(\mu(W) - \mu_0)\right)^2$$

$$= \alpha^2\frac{\sigma^2}{n} + (1-\alpha)^2\tau^2$$

$$= \left(\frac{n}{n+\sigma^2/\tau^2}\right)^2\frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{\sigma^2/\tau^2}{n+\sigma^2/\tau^2}\right)^2\tau^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{n+\sigma^2/\tau^2} = \alpha\frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \frac{\sigma^2/\tau^2}{n+\sigma^2/\tau^2}\tau^2 = (1-\alpha)\tau^2.$$