Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

2 семестр 2012

Зміст

1 Лекція 14

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання
3. Оцінювання моделей розвитку

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання
3. Оцінювання моделей розвитку
4. Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання
3. Оцінювання моделей розвитку
4. Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона
5. Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона
   - Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання
3. Оцінювання моделей розвитку
4. Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона
5. Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона
   - Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона
6. Вибір оптимальної оцінки резерву

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання
3. Оцінювання моделей розвитку
4. Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона
5. Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона
   - Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона
6. Вибір оптимальної оцінки резерву
7. Cape Cod метод

Зміст

1. Лекція 14
2. Моделі розвитку
   - Частки наростання
   - Частки накопичення
   - Фактори розвитку
   - Рівні наростання
3. Оцінювання моделей розвитку
4. Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона
5. Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона
   - Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона
6. Вибір оптимальної оцінки резерву
7. Cape Cod метод
8. Адитивний метод

Моделі розвитку

Використання трикутників розвитку в резервуванні збитків може бути виправдане тільки за припущення, що розвиток збитків в кожному році настання страхової події підкоряється одній і тій самій моделі розвитку для кожного року настання збитків.

Припущення про існування моделі розвитку може розглядатись як найпростіша стохастична модель і дає змогу порівнювати методи резервування збитків.

Частки наростання

Вектор $\nu = (\nu_0, \ldots, \nu_n), \sum_{l=0}^{n} \nu_l = 1$ називається моделлю розвитку для часток наростання, якщо рівність

$$\nu_k = \frac{EZ_{i,k}}{ES_{i,n}}$$

виконується $\forall k = \overline{0, n}, \forall i = \overline{0, n}$.
У випадку трикутника розвитку для оплачених збитків або кількості позовів є доцільним також припускати, що $\nu_k > 0 \ \forall k = \overline{0, n}$. У випадку понесених збитків, таке припущення може бути недоречним, оскільки внаслідок поміркованого резервування збитків, очікуваний приріст збитку може бути від'ємним.

Частки накопичення

Вектор $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n), \gamma_n = 1$ називається моделлю розвитку для часток накопичення, якщо рівність

$$\gamma_k = \frac{ES_{i,k}}{ES_{i,n}}$$

виконується $\forall k = \overline{0,n}, \forall i = \overline{0,n}$. Очевидними є формули зв'язку між моделями розвитку:

$$\nu_k = \begin{cases} \gamma_0, & k = 0, \\ \gamma_k - \gamma_{k-1}, & \text{інакше} \end{cases} \quad \text{та} \quad \gamma_k = \sum_{l=0}^{k} \nu_l.$$

У випадку трикутника розвитку для оплачених збитків або кількості позовів є доцільним також припускати, що $0 < \gamma_0 < \dots < \gamma_n$.

Фактори розвитку

Вектор $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ називається моделлю розвитку для факторів розвитку, якщо рівність

$$\varphi_k = \frac{ES_{i,k}}{ES_{i,k-1}}$$

виконується $\forall k = \overline{1, n}, \forall i = \overline{0, n}$. Відповідні формули зв'язку:

$$\gamma_k = \prod_{l=k+1}^{n} \frac{1}{\varphi_l}; \quad \varphi_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}.$$

У випадку трикутника розвитку для оплачених збитків або кількості позовів є доцільним також припускати, що $\varphi_k > 1 \, \forall k = \overline{1, n}$.

Рівні наростання

Вектор $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n), \beta_0 = 1$ називається моделлю розвитку для рівнів наростання, якщо рівність

$$\beta_k = \frac{EZ_{i,k}}{EZ_{i,0}}$$

виконується $\forall k = \overline{0, n}, \forall i = \overline{0, n}$. Відповідні формули зв'язку:

$$\nu_k = \frac{\beta_k}{\sum_{l=0}^{n} \beta_l}, \beta_k = \frac{\nu_k}{\nu_0}, \gamma_k = \frac{\sum_{l=0}^{k} \beta_l}{\sum_{l=0}^{n} \beta_l}, \beta_k = \begin{cases} 1\,,\ k = 0 \\ \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_0} \text{ інакше} \end{cases}.$$

У випадку трикутника розвитку для оплачених збитків або кількості позовів є доцільним також припускати, що $\beta_k > 0\ \forall k = \overline{0, n}$.

Оцінювання моделей розвитку

Для кожного з методів резервування збитків прогноз остаточних збитків може бути обґрунтований у припущенні, що відповідна модель розвитку існує. Взагалі кажучи, оцінювання моделі розвитку може ґрунтуватись на одному або двох з наступних джерел інформації:

1. Внутрішня інформація – будь-яка інформація, яка повністю міститься в трикутнику розвитку.
2. Зовнішня інформація – будь-яка інформація, яка повність не залежить від даних трикутника. Вона може бути отримана з статистики ринку або з інших схожих портфелів; також кількісні показники, такі як розмір премій або кількість контрактів є зовнішньою інформацією, бо вона не міститься в трикутнику .

Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона

Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона базується на припущенні, що існують вектори $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ та $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_n = 1$, такі, що рівність

$$\mathrm{E}S_{i,k} = \gamma_k \alpha_i$$

виконується для будь-яких $k = \overline{0, n}$, та $i = \overline{0, n}$. Тоді, ми маємо $\mathrm{E}S_{i,n} = \alpha_i$, а отже,

$$\gamma_k = \frac{\mathrm{E}S_{i,k}}{\mathrm{E}S_{i,n}},$$

що означає, що γ_k – модель розвитку для часток накопичення.

Розширений метод Борнхуеттера-Фергюсона також базується на додатковому припущенні, що вектори

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_0, \ldots, \hat{\gamma}_n),\ \hat{\gamma}_n = 1$$

оцінок часток накопичення та

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_0, \ldots, \hat{\alpha}_n)$$

оцінок очікуваних остаточних збитків вже відомі. Зазначимо, що у цих припущеннях має місце рівність

$$\mathsf{E}S_{i,k} = \mathsf{E}S_{i,n-i} + (\gamma_k - \gamma_{n-i})\alpha_i.$$

Прогнози методу Борнхуеттера-Фергюсона накопичених збитків $S_{i,k}, i+k \geq n$ визначаються як

$$\hat{S}_{i,k}^{BF} = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i.$$

Позначимо через

$$\hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \left\{ \hat{S}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) \right\}_{i+k \geq n} \tag{1}$$

трикутник всіх прогнозів методу Борнхуеттера-Фергюсона.

Розглядаючи різницю між прогнозом і поточними збитками маємо:

$$\hat{S}_{i,k}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) - S_{i,n-i} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i.$$

У випадку $k = n$ це дає вираз

$$\hat{S}_{i,n}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) - S_{i,n-i} = (1 - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i,$$

який є прогнозом для резерву $S_{i,n} - S_{i,n-i}$ для i-го року настання страхової події і має вигляд прогнозу резерву, який був запропонований Борнхуеттером і Фергюсоном в 1972 р. Проте, у початковій формі методу БФ припускалось, що оцінки очікуваних остаточних збитків базуються на преміях, і що очікувані рівні збитковості отримуються з трикутника розвитку. Обидва ці припущення відкинуті в розширеному методі БФ.

Ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона

У випадку, коли дані про поточні збитки є надійними, може бути бажаним модифікувати прогнози методу БФ з метою збільшити вагу поточних збитків, і зменшити вагу оцінок очікуваних остаточних збитків.

Ця мета може бути досягнута шляхом ітерування.

Наприклад, якщо в правій частині формули для прогнозу розширеним методом Борнхуеттера-Фергюсона замінити

$$\hat{\alpha}_i$$

на

$$\hat{S}_{i,n}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}).$$

Тоді остаточні прогнози накопичених збитків

$$S_{i,k}, \quad i+k \geq n$$

будуть прогнозами Бенктандера-Ховінен:

$$\hat{S}_{i,k}^{BH}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{S}_{i,n}^{BF},$$

які у випадку

$$0 < \gamma_0 < ... < \gamma_n$$

збільшують вагу поточних збитків і зменшують вагу апріорних оцінок очікуваних остаточних втрат.

Більш загально, прогнози накопичених збитків $S_{i,k}, i+k \geq n$ ітерованим методом Борнхуеттера-Фергюсона порядку $m \in \mathrm{N}_0$ визначаються таким чином:

$$\hat{S}^{(m)}_{i,k}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = \begin{cases} S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i, & m = 0, \\ S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{S}^{(m-1)}_{i,n}, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Тоді ми маємо

$$\hat{S}^{0}_{i,k}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = \hat{S}^{BF}_{i,k}(\hat{\gamma},\hat{\alpha})$$

та

$$\hat{S}^{1}_{i,k}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}) = \hat{S}^{BH}_{i,k}(\hat{\gamma},\hat{\alpha}).$$

Позначимо через

$$\hat{S}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \left\{ \hat{S}_{i,k}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) \right\}_{i+k \geq n}$$

трикутник прогнозів ітерованого методу Борнхуеттера-Фергюсона порядку m. Поклавши

$$\hat{\alpha}_i^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \begin{cases} \hat{\alpha}_i, \ m = 0 \\ \hat{S}_{i,n}^{(m-1)}, \text{ інакше} \end{cases},$$

прогнози ітерованого методу Борнхуеттера-Фергюсона можуть бути записані як

$$\hat{S}_{i,k}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\hat{\alpha}_i^{(m-1)}$$

тоді з

$$\hat{\alpha}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = (\hat{\alpha}_0^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}), \ldots, \hat{\alpha}_n^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}))$$

ми отримаємо:

$$\hat{S}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}) = \hat{S}^{BF}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha})).$$

Таким чином, ітерований метод Борнхуеттера-Фергюсона порядку m є нічим іншим як розширеним методом Борнхуеттера-Фергюсона з $\hat{\gamma}$ та $\hat{\alpha}^{(m)}(\hat{\gamma}, \hat{\alpha})$.

Помилка прогнозу методу Борнхуеттера-Фергюсона

Нагадаємо позначення. $C_{i,k}, 1 \leq i, k \leq n$ позначають накопичені збитки в i році настання страхової події та k році розвитку, π_i – величину отриманих премій в i році настання страхової події. Тоді $C_{i,n+1-i}$ – відомі поточні збитки в i році настання страхової події.

Нехай $S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1}$ – прирости збитків, а U_i – невідома величина остаточних втрат в i році настання страхової події. Тоді

$$R_i = U_i - C_{i,n+1-i}$$

– величина невідомого справжнього резерву в i році, а

$$S_{i,n+1} = U_i - C_{i,n}$$

– приріст збитків після n року розвитку.

Прогноз методу Борнхуеттера-Фергюсона визначається як:

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}),$$

де

$$\hat{U}_i = \pi_i \hat{q}_i$$

($\hat{q}_i$ – апріорна оцінка остаточного рівня збитковості), а

$$\hat{z}_k \in [0, 1]$$

– оцінена частка остаточних збитків, яка очікується бути відомою після k року розвитку.

В класичному варіанті методу $\hat{q}_i$ брались з зовнішньої інформації, а $\hat{z}_k$ знаходились методом ланцюгових сходів.

Розглянемо стохастичну модель: припускаємо, що виконується рівність

$$\mathsf{E}C_{i,k} = x_i z_k,$$

або, що еквівалентно,

$$\mathsf{E}S_{i,k} = x_i y_k, \quad 1 \le i \le n, 1 \le k \le n+1.$$

Оскільки, x_k, y_k визначені з точністю до сталого множника, можемо вважати, що

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i = 1.$$

Це дає

$$\mathrm{E}U_i = \mathrm{E}(S_{i,1} + \ldots + S_{i,n+1}) = x_i$$

і показує, що x_i може розглядатись як міра об'єму для i року настання страхової події.

Таким чином, маємо такі припущення для $S_{i,k}$:

1. усі $S_{i,k}$незалежні;
2. існують x_i, y_k такі, що

$$\mathrm{E}S_{i,k} = x_i y_k, \quad \sum_{i=1}^{n+1} y_i = 1;$$

3. існують s_k^2 такі, що $\mathrm{D}S_{i,k} = s_k^2 x_i$.

З цього легко отримати

$$\mathsf{E}R_i = x_i(y_{n+2-i} + \ldots + y_{n+1}) = x_i(1 - z_{n+1-i}),$$

де $z_k = y_1 + \ldots + y_k$, а це означає, що очікувані резерви співпадають з оцінкою Борнхуеттера-Фергюсона резерву. Також

$$\mathsf{D}U_i = \mathsf{D}(S_{i,1} + \ldots + S_{i,n+1}) = x_i(s_1^2 + ... + s_{n+1}^2)$$

і

$$\mathsf{D}R_i = x_i(s_{n+2-i}^2 + ... + s_{n+1}^2).$$

Перейдемо до оцінювання параметрів моделі.

Припускаємо, що оцінка $\hat{x}_i$ походить з ціноутворення і можемо вважати, що $\hat{U}_i$ є оцінкою для x_i, і в подальшому будемо писати $\hat{U}_i$ замість $\hat{x}_i$. Таким чином, нам залишилось знайти оцінки для

$$y_k \text{ та } s_k^2.$$

Головна проблема в тому, що ми маємо мало спостережень для останніх років розвитку.

Так як у нас нема спостережень після n року розвитку, ми не можемо оцінити залишкову (хвостову) частку y_{n+1} без додаткових припущень.

У цьому випадку, ми можемо скористатись зовнішньою інформацією зі схожих портфелів. Без подібної інформації, ми можемо отримати оцінку $\hat{y}_{n+1}$ шляхом екстраполяції з

$$\hat{y}_1, ...\hat{y}_n$$

(які поки невідомі). Аналогічно, оцінка для s_n^2 не може бути отримати з єдиного спостереження в n стовпчику, але також може бути отримана шляхом екстраполяції.

Тому, для ітеративної процедури спочатку розглянемо для визначеності випадок, коли у нас вже є оцінки для

$$\hat{y}_{n+1}, \hat{s}_1^2, ..., \hat{s}_n^2.$$

Тоді ми можемо отримати оцінки зважених найменших квадратів для

$$y_1, ...y_n$$

мінімізуючи

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n+1-i} \frac{(S_{i,k} - \hat{U}_i \hat{y}_k)^2}{\hat{U}_i \hat{s}_k^2}$$

з обмеженням

$$\hat{y}_1 + ... + \hat{y}_n = 1 - \hat{y}_{n+1}.$$

Як початкові наближення можна взяти

$$\hat{\hat{y}}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} S_{i,k} / \sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i,$$

але ці значення зазвичай не задовольняють обмеженню.

Далі можна визначити

$$\hat{\hat{s}}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{(S_{i,k} - \hat{U}_i \hat{y}_k)^2}{\hat{U}_i}, 1 \le k \le n-1.$$

Для отримання правдоподібних оцінок може знадобитися згладжування. Нехай ми отримали оцінки

$$\hat{y}_1^*, ..., \hat{y}_{n+1}^*, \hat{s}_1^{2*}, ..., \hat{s}_n^{2*}, \hat{s}_{n+1}^*,$$

з яких ми оцінюємо резерв методу Борнхуеттера-Фергюсона:

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(\hat{y}_{n+2-i}^* + ... + \hat{y}_{n+1}^*) = \hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*),$$

де

$$\hat{z}_k^* = \hat{y}_1^* + \ldots + \hat{y}_k^*.$$

Властивості отриманих оцінок такі:

1. $\hat{y}_1^*, ..., \hat{y}_{n+1}^*$ попарно від'ємно корельовані.
2. $\hat{y}_1^*, ..., \hat{y}_{n+1}^*$, а отже і $\hat{z}_1^*, ..., \hat{z}_{n+1}^*$ не залежать від $\hat{U}_1, ..., \hat{U}_n$.
3. $\hat{R}_i^{BF}$ та R_i незалежні.
4. $E\hat{U}_i = EU_i = x_i, 1 \leq i \leq n$.
5. $E\hat{y}_k^* = y_k, 1 \leq k \leq n+1$ і, відповідно,
   $E\hat{z}_k^* = z_k, 1 \leq k \leq n+1$.
6. $E\hat{s}_k^{2*} = s_k^2, 1 \leq k \leq n+1$.

Звідси випливає незміщеність оцінок резервів $\hat{R}_i^{BF}$:

$$\mathsf{E}\hat{R}_i^{BF} = \mathsf{E}(\hat{U}_i)\mathsf{E}(1 - \hat{z}^*_{n+1-i}) = x_i(1 - z_{n+1-i}) = \mathsf{E}R_i.$$

Перейдемо тепер безпосередньо до оцінки похибки прогнозу.

Середньоквадратична похибка прогнозу будь-якої оцінки резерву $\hat{R}_i$ визначається як

$$\sigma_p^2(\hat{R}_i) = \mathsf{E}((\hat{R}_i - R_i)^2 | S_{i,1}, ..., S_{i,n+1-i}).$$

За припущень

$$R_i = S_{i,n+2-i} + ... + S_{i,n+1}$$

не залежить від $S_{i,1}, ..., S_{i,n+1-i}$.

Також, оцінку резерву МБФ можна взяти незалежною від $S_{i,1}, ..., S_{i,n+1-i}$.

Тоді ми маємо

$$\sigma_p^2(\hat{R}_i^{BF}) = \mathsf{E}(\hat{R}_i^{BF} - R_i)^2$$

$$= \mathsf{D}(\hat{R}_i^{BF} - R_i) + (\mathsf{E}\hat{R}_i^{BF} - \mathsf{E}R_i)^2 = \mathsf{D}\hat{R}_i^{BF} + \mathsf{D}R_i.$$

Тобто, середньоквадратична похибка прогнозу є сумою середньоквадратичної похибки оцінки $\mathsf{D}\hat{R}_i^{BF}$ та похибки методу $\mathsf{D}R_i$.

Для похибки методу маємо:

$$\mathsf{D}R_i = \mathsf{D}S_{i,n+2-i} + \cdots + \mathsf{D}S_{i,n+1} = x_i(s^2_{n+2-i} + \cdots + s^2_{n+1}),$$

яка буде оціненою виразом

$$\mathsf{D}R_i = \hat{U}_i(\hat{s}^{2*}_{n+2-i} + \cdots + \hat{s}^{2*}_{n+1}).$$

Для оцінки похибки

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i(1 - \hat{z}^*_{n+1-i})$$

скористаємось загальною формулою

$$\mathsf{D}XY = (\mathsf{E}X)^2\mathsf{D}Y + \mathsf{D}X\mathsf{D}Y + (\mathsf{E}Y)^2\mathsf{D}X$$

для незалежних в.в. X та Y. Маємо

$$\mathsf{D}\hat{R}_i^{BF} = (x_i^2 + \mathsf{D}\hat{U}_i)\mathsf{D}\hat{z}^*_{n+1-i} + \mathsf{D}\hat{U}_i(1 - \hat{z}^*_{n+1-i})^2.$$

Стандартна помилка $\sigma(\hat{U}_i)$ не може бути отримана з похибки $\sigma(\hat{R}_i^{BF(n-1)})$ резервів останнього року, тому що це ігноруватиме мінливість $C_{i,n-i}$, яка має бути врахована. Як і $\hat{U}_i$, $\sigma(\hat{U}_i)$ краще за все отримувати з переоцінки бізнесу (зовнішньої інформації).

У випадку некорельованості $\hat{U}_1, ..., \hat{U}_n$, можна використовувати формули:

$$(\sigma(\hat{U}_i))^2 = \frac{\pi_i}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \pi_j \left(\frac{\hat{U}_j}{\pi_j} - \hat{q} \right)^2$$

та

$$\hat{q} = \sum_{j=1}^{n} \hat{U}_j / \sum_{j=1}^{n} \pi_j.$$

Тепер треба визначитись зі способом оцінки

$$\mathsf{D}(1-\hat{z}^*_{n+1-i}) = \mathsf{D}\hat{z}^*_{n+1-i} = \mathsf{D}(\hat{y}^*_1+\ldots+\hat{y}^*_{n+1-i}) = \mathsf{D}(\hat{y}^*_{n+2-i}+\ldots+\hat{y}^*_{n+1}).$$

Із властивостей оцінок видно, що можна замінити

$$\mathsf{D}(\hat{y}^*_1 + \ldots + \hat{y}^*_{n+1-i})$$

на

$$\mathsf{D}\hat{y}^*_1 + \ldots + \mathsf{D}\hat{y}^*_{n+1-i}.$$

Але, тоді як остання сума збільшується з кожним доданком, цього не можна сказати про попередню, оскільки

$$\mathsf{D}(\hat{y}^*_1 + \ldots + \hat{y}^*_{n+1}) = \mathsf{D}(1) = 0.$$

Тоді будемо замінювати $\mathrm{D}\hat{z}_k^*$ величиною

$$\min(\mathrm{D}\hat{y}_1^* + \ldots + \mathrm{D}\hat{y}_k^*, \mathrm{D}\hat{y}_{k+1}^* + \ldots + \mathrm{D}\hat{y}_{n+1}^*).$$

Так як

$$\hat{y}_k^* \approx \hat{\hat{y}}_k = \sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} / \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j,$$

то

$$\mathrm{D}\hat{y}_k^* \approx \mathrm{D}\left(\sum_{j=1}^{n+1-k} S_{j,k} / \sum_{j=1}^{n+1-k} x_j\right) = \frac{s_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j}, \quad 1 \le k \le n.$$

Таким чином, ми оцінюємо $\mathrm{D}\hat{y}_k^*$, як

$$\mathrm{D}\hat{y}_k^* = \frac{\hat{s}_k^{2*}}{\sum_{j=1}^{n+1-k} \hat{U}_j}, \quad 1 \le k \le n.$$

Але значення $\sigma(\hat{y}^*_{n+1})$ має бути визначено із зовнішньої інформації. Інакше відповідним вибором буде

$$\sigma(\hat{y}^*_{n+1}) = 0.5\hat{y}^*_{n+1}.$$

Загалом, наша оцінка для $\mathrm{D}\hat{z}^*_k$ буде такою:

$$(\sigma(\hat{z}^*_k))^2 = \min((\sigma(\hat{y}^*_1))^2 + \ldots + (\sigma(\hat{y}^*_k))^2, (\sigma(\hat{y}^*_{k+1}))^2 + \ldots + (\sigma(\hat{y}^*_{n+1}))^2).$$

У будь-якому випадку матимемо $\sigma(\hat{z}^*_{n+1}) = \sigma(1) = 0$.

Остаточно отримуємо оцінку для середньоквадратичної похибки прогнозу

$$\sigma_p^2(\hat{R}_i^{BF}) = \hat{U}_i(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + ... + \hat{s}_{n+1}^{2*}) + (\hat{U}_i^2$$

$$+(\sigma(\hat{U}_i))^2)(\sigma(\hat{z}_{n+1-i}^*))^2 + (\sigma(\hat{U}_i))^2(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)^2.$$

У випадку необхідності перевірити значимість відмінності між різними оцінками або для побудови довірчого інтервалу для $\mathrm{E}U_i$ достатньо помилки оцінювання

$$(\sigma(\hat{R}_i^{BF}))^2 = (\hat{U}_i^2 + (\sigma(\hat{U}_i))^2)(\sigma(\hat{z}_{n+1-i}^*))^2 + (\sigma(\hat{U}_i))^2(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)^2.$$

Для загального резерву $R = R_1 + ... + R_n$ ми маємо незміщену оцінку $\hat{R}^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + ... + \hat{R}_n^{BF}$. Його середньоквадратична похибка прогнозу

$$\sigma_p^2(\hat{R}^{BF}) = \mathrm{D}\hat{R}^{BF} + \mathrm{D}R.$$

Для $\mathrm{D}R$ маємо оцінку (внаслідок незалежності років):

$$\mathrm{D}R = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i(\hat{s}_{n+2-i}^{2*} + ... + \hat{s}_{n+1}^{2*}).$$

Оцінка для $\mathrm{D}R^{BF}$ більш складна внаслідок корельованості величин $\hat{R}_1^{BF}, ..., \hat{R}_n^{BF}$. Маємо

$$\mathrm{D}\hat{R}^{BF} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}\hat{R}_i^{BF} + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}).$$

Для

$$\mathrm{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) = \mathrm{cov}(\hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*), \hat{U}_j(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*))$$

використаємо загальну формулу $\mathrm{cov}(XY, WZ)$

$$= \mathrm{cov}(X, W)\mathrm{E}Y\mathrm{E}Z + \mathrm{cov}(X, W)\mathrm{cov}(Y, Z) + \mathrm{E}X\mathrm{E}W\mathrm{cov}(Y, Z),$$

де в.в. $\{X, W\}$ та $\{Y, Z\}$ незалежні.
Ми опустимо середній член, оскільки він має нижчий порядок і отримаємо

$$\mathrm{cov}(\hat{U}_i(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*), \hat{U}_j(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*))$$

$$= \rho_{ij}^U \sqrt{\mathrm{D}\hat{U}_i \mathrm{D}\hat{U}_j}\mathrm{E}(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)\mathrm{E}(1 - \hat{z}_{n+1-j}^*) +$$

$$+ \rho_{ij}^z \sqrt{\mathrm{D}\hat{z}_{n+1-i}^* \mathrm{D}\hat{z}_{n+1-j}^*}\mathrm{E}\hat{U}_i \mathrm{E}\hat{U}_j,$$

де коефіцієнти кореляції
$\rho_{ij}^{z} = \text{cov}(1 - \hat{z}^*_{n+1-i}, 1 - \hat{z}^*_{n+1-j}) / \sqrt{\text{D}\hat{z}^*_{n+1-i}\text{D}\hat{z}^*_{n+1-j}}$ та
$\rho_{ij}^{U} = \text{cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_j) / \sqrt{\text{D}\hat{U}_i \text{D}\hat{U}_j}$.

Тепер нам потрібно лише оцінити ці коефіцієнти кореляції. Якщо в нас немає можливості оцінити ці коефіцієнти за допомогою наявних даних, то можна використовувати наступні апроксимації: $\rho_{ij}^{U} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ або $\rho_{ij}^{U} = \frac{1}{1+|i-j|}$ та
$\rho_{ij}^{z} = \sqrt{\frac{\hat{z}^*_{n+1-j}(1-\hat{z}^*_{n+1-i})}{\hat{z}^*_{n+1-i}(1-\hat{z}^*_{n+1-j})}}$, де $i < j, \hat{z}^*_1 \le ... \le \hat{z}^*_{n+1}$.

Остаточно маємо

$$(\sigma(\hat{R}^{BF}))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sigma(\hat{R}_i^{BF}))^2 + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}),$$

де

$$\mathrm{cov}(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) = \rho_{ij}^{U} \sigma(\hat{U}_i)\sigma(\hat{U}_j)\mathrm{E}(1 - \hat{z}_{n+1-i}^{*})\mathrm{E}(1 - \hat{z}_{n+1-j}^{*}) +$$

$$+\rho_{ij}^{z} \sigma(\hat{z}_{n+1-i}^{*})\sigma(\hat{z}_{n+1-j}^{*})\mathrm{E}\hat{U}_i \mathrm{E}\hat{U}_j.$$

Вибір оптимальної оцінки резерву

Для спрощення позначень розглянемо один рік настання страхової події. На кінець фіксованого року розвитку $k < n$ резерв Борнхуеттера-Фергюсона такий:

$$R^{BF} = (1 - z_k)U_0 = q_k U_0,$$

де U_0 – очікувана остаточна величини позовів. Нехай C_k – величина оплачених позовів, тоді фінальна оцінка остаточних позовів

$$U^{BF} = C_k + R^{BF}.$$

У методі ЛС ми мали

$$U^{CL} = \frac{C_k}{z_k} \quad \text{та} \quad R^{CL} = U^{CL} - C_k.$$

Помітимо, що $R^{CL} = q_k U^{CL}$.

Зазначимо, що метод БФ повністю ігнорує інформацію про поточні збитки в даному портфелі; в той час як у методі ЛС вважається, що поточні збитки є цілком достатніми для прогнозування. Таким чином, ці методи представляють дві крайні позиції. Тому Берктандер в 1976 році запропонував замінити апріорне U_0 на довірчу суміш

$$U_c = cU^{CL} + (1-c)U_0.$$

Оскільки фактор довіри c має зростати з розвитком збитків, він запропонував взяти $c = z_k$ й оцінювати резерви як

$$R^{GB} = R^{BF} U_{p_k} / U_0.$$

Помітимо, що

$$R^{GB} = q_k U_{p_k} \quad \text{та} \quad U_{p_k} = z_k U^{CL} + q_k U_0 = C_k + R^{BF} = U^{BF},$$

тобто $R^{GB} = q_k U^{BF}$.

Це означає, що резерв Бенктандера R^{GB} отримується застосуванням методу БФ на другому кроці до апостеріорної остаточної величини позовів U^{BF}, яка отримується зі звичайної процедури Борнхуеттера-Фергюсона. Тому цей метод іноді називають повторним методом Борнхуеттера-Фергюсона. Обчислимо

$$U^{GB} = C_k + R^{GB} = (1 - q_k^2)U^{CL} + q_k^2 U_0 = U_{1-q_k^2}.$$

Ховінен у 1981 році застосував довірчу суміш безпосередньо до резервів, тобто запропонував оцінку резерву

$$R^{EH} = cR^{CL} + (1 - c)R^{BF} =: R_c$$

також з $c = z_k$. Але резерв Ховінена

$$R^{EH} = z_k q_k U^{CL} + (1 - z_k)q_k U_0 = q_k U_{p_k} = R^{GB}.$$

Можна довести, що для довільної початкової точки $U^{(0)} = U_0$ ітераційне правило

$$R^{(m)} = q_k U^{(m)} \quad \text{та} \quad U^{(m+1)} = C_k + R^{(m)}, m \geq 0$$

дає довірчі суміші

$$U^{(m)} = (1 - q_k^m) U^{CL} + q_k^m U_0$$

і

$$R^{(m)} = (1 - q_k^m) R^{CL} + q_k^m R^{BF}$$

між резервами БФ і ЛС, які починаються з резерву БФ і прямують до резерву методу ЛС при $m \to \infty$.

Для порівняння R^{CL}, R^{BF} і R^{GB} використовуватимемо середньоквадратичну похибку

$$\sigma^2(R_c) = \mathrm{E}(R_c - R)^2$$

як критерій точності оцінки резерву R_c. Так як R_c є лінійною по c, то $\sigma^2(R_c)$ досягає мінімуму. Надалі ми вважаємо, що U_0 оцінена незалежно від C_k, U, R та має математичне сподівання $\mathrm{E}U_0 = \mathrm{E}U$ і дисперсію $\mathrm{D}U_0$.

Теорема

Оптимальний фактор довіри c^*, який мінімізує середньоквадратичну похибку $\sigma^2(R_c)$знаходиться за формулою:

$$c^* = \frac{z_k}{q_k} \frac{cov(C_k, R) + z_k q_k DU_0}{DC_k + z_k^2 DU_0}.$$

Доведення

$\mathsf{E}(R_c - R)^2 = \mathsf{E}(c(R^{CL} - R^{BF}) + R^{BF} - R)^2 =$
$c^2\mathsf{E}(R^{CL} - R^{BF})^2 - 2c\mathsf{E}((R^{CL} - R^{BF})(R - R^{BF})) + \mathsf{E}(R^{BF} - R)^2.$
Тоді

$$0 = \frac{\partial}{\partial c}\mathsf{E}(R_c - R)^2 = 2c\mathsf{E}(R^{CL} - R^{BF})^2 - 2\mathsf{E}((R^{CL} - R^{BF})(R - R^{BF})) \Rightarrow$$

$$c^* = \frac{\mathsf{E}((R^{CL} - R^{BF})(R - R^{BF}))}{\mathsf{E}(R^{CL} - R^{BF})^2} = \frac{z_k}{q_k}\frac{\mathsf{E}((C_k - z_k U_0)(R - q_k U_0))}{\mathsf{E}(C_k - z_k U_0)^2}$$

$$= \frac{z_k}{q_k}\frac{\operatorname{cov}(C_k - z_k U_0, R - q_k U_0)}{\mathsf{D}(C_k - z_k U_0)} = \frac{z_k}{q_k}\frac{\operatorname{cov}(C_k, R) + z_k q_k \mathsf{D} U_0}{\mathsf{D} C_k + z_k^2 \mathsf{D} U_0}.$$

Тут використано $\mathsf{E} C_k = z_k \mathsf{E} U_0$, що є наслідком моделі.

Cape Cod метод

Cape Cod метод базується на припущенні, що існують:

1. Вектор$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n), \gamma_n = 1$ такий, що рівність $\gamma_k = \frac{ES_{i,k}}{ES_{i,n}}$ виконується $\forall i, k = \overline{0, n}$
2. Вектор $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_n)$відомих показників обсягу.
3. Параметр κ такий, що рівність $\kappa = \mathrm{E}\left(\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right)$ виконується $\forall i = \overline{0, n}$

Тоді γ – модель розвитку для часток накопичення, а останнє припущення означає, що окремі остаточні рівні збитковості

$$\kappa_i = \mathsf{E}\left(\frac{S_{i,n}}{\pi_i}\right)$$

однакові для кожного року настання страхової події, тоді параметр κ називається остаточним рівнем збитковості. Cape Cod метод також базується на додатковому припущенні, що вектор оцінок

$$\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_0, \ldots, \hat{\gamma}_n), \hat{\gamma}_n = 1$$

вже заданий.

Прогнози Cape Cod методу для накопичених збитків $S_{i,k}, i+k \geq n$ визначаються як

$$\hat{S}_{i,k}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i})\pi_i \hat{\kappa}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}),$$

де

$$\hat{\kappa}^{CC}(\pi,\hat{\gamma}) = \frac{\sum_{j=0}^{n} S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^{n} \hat{\gamma}_{n-j}\pi_j}$$

– оцінка для κ.

Позначимо через $\hat{S}^{CC}(\pi, \hat{\gamma}) = \left\{\hat{S}^{CC}_{i,k}(\pi, \hat{\gamma})\right\}_{i+k \geq n}$ – трикутник прогнозів Cape Cod методу. Відмітимо, що

$$\hat{S}^{CC}(c\pi, \hat{\gamma}) = \hat{S}^{CC}(\pi, \hat{\gamma}) \, \forall c > 0,$$

тобто прогнози Cape Cod методу залежать лише від відносного розміру показників обсягу. Поклавши

$$\hat{\alpha}_i^{CC} = \pi_i \hat{\kappa}^{CC}(\pi, \hat{\gamma})$$

бачимо, що Cape Cod метод також є формою розширеного МБФ.

Адитивний метод

Адитивний метод базується на припущенні, що існує вектор $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_n)$ відомих показників обсягу і вектор $\zeta(\pi) = (\zeta_0(\pi), \ldots, \zeta_n(\pi))$ такий, що рівність $\mathsf{E}Z_{i,k} = \pi_i \zeta_k(\pi)$ виконується для всіх $k = \overline{0, n}$ та $i = \overline{0, n}$. Тоді вектор $\zeta(\pi)$ – модель розвитку для наростаючих рівнів збитковості, а вектор $\gamma(\pi) = (\gamma_0(\pi), \ldots, \gamma_n(\pi))$, де $\gamma_k = \frac{\sum_{l=0}^{k} \zeta_l(\pi)}{\sum_{l=0}^{n} \zeta_l(\pi)}$, – модель розвитку для часток накопичення.

Зауважимо, що має місце рівність

$$\mathsf{E}S_{i,k} = \mathsf{E}S_{i,n-i} + \pi_i \sum_{l=n-i+1}^{k} \zeta_l(\pi),$$

та нагадаємо формулу $\hat{\zeta}_k^{AD}(\pi) = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j}$. Тоді прогнози адитивного методу для $S_{i,k}, i+k \geq n$ визначаються як

$$\hat{S}_{i,k}^{AD}(\pi) = S_{i,n-i} + \pi_i \sum_{l=n-i+1}^{k} \hat{\zeta}_l^{AD}(\pi).$$

Позначимо через $\hat{S}^{AD} = \left\{\hat{S}_{i,k}^{AD}\right\}_{i+k\geq n}$ – трикутник прогнозів адитивного методу.

Поклавши $\hat{\gamma}_k^{AD} = \frac{\sum_{l=0}^{k} \hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)}{\sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)}$ та $\hat{\alpha}_i^{AD} = \pi_i \sum_{l=0}^{n} \hat{\zeta}_l^{AD}(\pi)$, отримаємо

$$\hat{S}_{i,k}^{AD}(\pi) = S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k^{AD} - \hat{\gamma}_{n-i}^{AD})\hat{\alpha}_i^{AD}.$$

А отже, адитивний метод також є розширеним МБФ. Крім того, можна показати $\hat{\alpha}^{AD} = \hat{\alpha}^{CC}(\pi, \hat{\gamma}^{AD}(\pi))$, що дає $\hat{S}^{AD} = \hat{S}^{CC}(\pi, \hat{\gamma}^{AD}(\pi))$.