Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

2 семестр 2012

Зміст

Зміст

Процеси ризику в страхуванні

Основна відмінність між цим розділом і попередніми полягає в тому, що тепер нас цікавить, як розвивається портфель упродовж часу.

Процес, неперервний у часі, позначатимемо $\{X_t; t \geq 0\}$. Якщо він містить випадкові елементи, то для визначення процесу досить вказати сумісний розподіл $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ для всіх $t_1, \ldots, t_n$ і всіх n.

Зауважимо, що загалом недостатньо вказати лише розподіл X_t для довільного t, оскільки в багатьох процесів значення, які спостерігають у різний час, є корельованими.

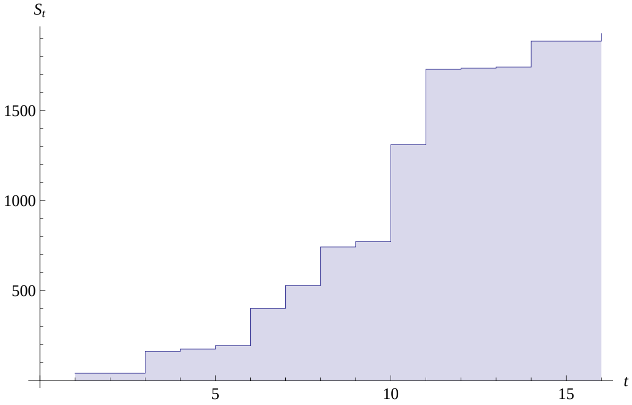
Приклад

Нехай $\{S_t; t \geq 0\}$ – загальні втрати від часу від 0 до t. Вкажіть, як можна використати модель колективного ризику для описання цього процесу.

Припустимо для простоти, що $t_1 < \cdots < t_n$. Нехай

$$W_j = S_{t_j} - S_{t_{j-1}},$$

де $S_{t_0} = S_0 = 0$. Нехай W_j незалежно розподілені з розподілами, заданими моделлю колективного ризику. Розподіли індивідуальних втрат можуть бути однаковими, коли розподіл частот має середнє, що пропорційне тривалості періоду $t_j - t_{j-1}$. Приклад реалізації цього процесу (яку називають *траєкторією*) наведено на рис.


S_t
1500
1000
500
5
10
15
t

Як правило, легше описати процес, якщо він не дуже змінюється упродовж часу.

Кажуть, що процес має *незалежні прирости*, якщо в.в. $X_t - X_s$ і $X_u - X_v$ є незалежними для будь-яких $s < t \leq v < u$.

Ця властивість вказує на те, що прирости процесу в одному проміжку часу не залежать від приростів процесу в іншому, що не перетинається з ним, проміжку.

Кажуть, що процес має *стаціонарні прирости*, якщо розподіл $X_t - X_s$ залежить лише від різниці $t - s$.

Ця властивість означає, що прирости не залежать від конкретного моменту часу.

Більшість організацій, веде не постійний моніторинг їхнього стану. Тому доцільно буде розглядати такий вид процесів.

Дискретний процес позначають через $\{_t; t = 0, 1, 2 \dots\}$. Якщо він містить випадкові елементи, досить вказати сумісний розподіл $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ для цілих t_i та всіх n.

Дискретний процес може бути отриманим із неперервного процесу, просто записуючи значення X_t у цілі моменти часу. У цьому розділі всі процеси з дискретним часом вимірюватимуть в кінці кожного періоду спостереження, наприклад, місяця, кварталу або року.

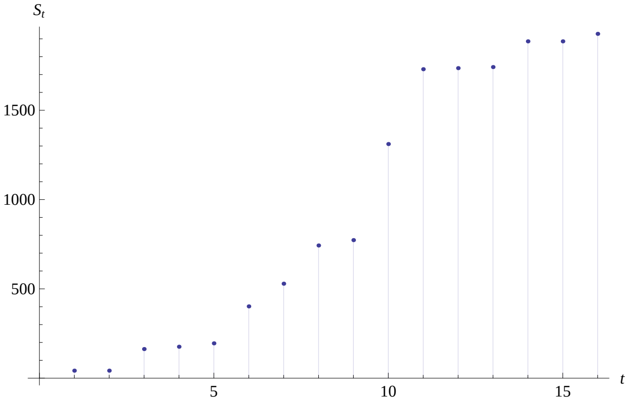
Приклад (продовження)

Перетворіть процес у дискретний час зі стаціонарними, незалежними приростами.

Нехай $X_1, X_2, \dots$ відображають загальні втрати за кожен період, причому в.в. X_j н.о.р., і кожен X_j має складний розподіл. Тоді загальний процес втрат матиме вигляд $S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_t$. Цей процес має стаціонарні прирости, оскільки приріст

$$S_t - S_s = X_{s+1} + X_{s+2} + \cdots + X_t$$

залежить тільки від кількості X_j, яка дорівнює $t - s$. Приклад такого процесу зображено на рис.



S_t
1500
1000
500
5
10
15
t

Модель у страхуванні

Ми починаємо в нульовий момент часу з початковим залишком (капіталом) $u = U_0$.

Процес залишків

Залишок в момент часу t становить

$$U_t = U_0 + P_t - S_t,$$

де $\{P_t, t \geq 0\}$ – це процес надходження премій, який підраховує величину всіх премій (за вирахуванням витрат), зібраних до моменту t і $\{S_t, t \geq 0\}$ – це процес втрат, який підраховує всі витрати, сплачені на момент t.

Зауважимо, що

1) P_t може відображати записані або зароблені премії.
2) S_t може відображати сплачені або заявлені збитки.
3) P_t може залежати від S_u при $u < t$.
Наприклад, величина дивідендів, яка ґрунтується на помірних втратах минулих років, може призвести до зниження поточної премії.

Можливо, хоча й не обов'язково, відокремити частотну компоненту S_t. Нехай $\{N_t, t \geq 0\}$ – процес вимог, який записує кількість позовів на момент часу t. Тоді

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}.$$

Якщо послідовність $X_1, X_2, \ldots$ складається з однаково розподілених в.в., хоч це й необов'язково мусить бути так, і вони не залежать від усіх N_t, тоді S_t матиме складний розподіл.

Тепер розглянемо два особливих випадки процесу залишків.

Модель із дискретним часом

Нехай приріст у процесі залишків за t-ий рік визначено так:

$$W_t = P_t - P_{t-1} - S_t + S_{t-1}, \quad t = 1, 2, \ldots .$$

Тоді залишки можна подати у вигляді

$$U_t = U_{t-1} + W_t, \quad t = 1, 2, \ldots .$$

Із цього представлення відносно легко дізнатися про розподіл $\{U_t, t = 0, 1, 2, \ldots\}$ за умови, що випадкова величина W_t не залежить від інших в.в. W_t, а залежить лише від U_{t-1}.

Неперервна модель

У більшості випадків дуже важко аналізувати неперервні моделі, тому що треба визначити сумісний розподіл у будь-який момент часу, а не лише для скінченної множини моментів. Одна із моделей, яка була добре проаналізована – складний процес Пуассона надходження вимог, у якому премії надходять зі сталою неперервною невипадковою інтенсивністю

$$P_t = (1+\theta)\mathsf{E}(S_1)t$$

і загальним процесом втрат

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t},$$

де $\{N_t, t \geq 0\}$ – пуассонівський процес. Цей процес докладно вже було розглянуто раніше.

Банкрутство

Основна мета побудови моделі процесу є оцінка виживання портфеля з плином часу. Імовірність виживання може бути визначена чотирма різними способами.

(1)

Імовірність виживання для неперервного часу й нескінченого горизонту визначають так:

$$\phi(u) = \mathrm{P}(U_t \geq 0 \text{ для всіх } t \geq 0 | U_0 = u). \qquad (1)$$

Тут постійно перевіряємо залишок і вимагаємо, щоб портфель завжди був платоспроможним. Обидві вимоги: неперервне перевіряння та "вічність" портфелю є нереалістичними. На практиці, імовірніше, прирости перевірятимуть у регулярні

(2)

Імовірність виживання для дискретного часу і скінченного горизонту визначають, як

$$\tilde{\phi}(u,\tau) = \mathsf{P}(U_t \geq 0 \text{ для всіх } t = 0, 1, \ldots, \tau | U_0 = u). \qquad (2)$$

У цьому випадку нашому портфелю необхідно не набувати від'ємних значень протягом τ періодів (як правило, років), і ми робимо перевірку лише в кінці кожного періоду.

Виділимо з наведених визначень два проміжні випадки.

(3)

Імовірність виживання для неперевного часу і скінченного горизонту визначають, як

$$\phi(u,\tau) = \mathsf{P}(U_t) \geq 0 \text{ для всіх } 0 \leq t \leq \tau | U_0 = u), \qquad (3)$$

(4)

Ймовірність виживання для дискретного часу й нескінченного горизонту – як

$$\tilde{\phi}(u) = \mathsf{P}(U_t \geq 0 \text{ для всіх } t = 0, 1, \dots | U_0 = u). \qquad (4)$$

Очевидно, що мають місце такі нерівності:

$$\tilde{\phi}(u, \tau) \geq \tilde{\phi}(u) \geq \phi(u)$$

і

$$\tilde{\phi}(u, \tau) \geq \phi(u, \tau) \geq \phi(u),$$

та граничні переходи:

$$\lim_{\tau \to \infty} \phi(u, \tau) = \phi(u)$$

і

$$\lim_{\tau \to \infty} \tilde{\phi}(u, \tau) = \tilde{\phi}(u).$$

Нарешті, визначимо ймовірність банкрутства.

Імовірність банкрутства в неперервному часі з нескінченним горизонтом визначають, як

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

Інші три ймовірності банкрутства визначають і записують аналогічно.

Ймовірність банкрутства в дискретному скінченому часі

Нехай P_t – це премії, зібрані за t-ий період часу, а S_t – виплати, здійснені протягом цього періоду. Додамо одне узагальнення. Нехай C_t будуть будь-якими іншими грошовими потоками, ніж збирання страхових премій і виплачування збитків. Найважливішим є грошовий потік доходу від інвестування залишку, наявного на початку кожного періоду. Тоді

$$U_t = u + \sum_{j=1}^{t}(P_j + C_j - S_j) = U_{t-1} + P_t + C_t - S_t \qquad (5)$$

Останнє припущення полягає в тому, що за даного значення U_{t-1} в.в. $W_t = P_t + C_t - S_t$ залежить лише від U_{t-1}, а не від будь-якого іншого попереднього стану процесу. Ця особливість робить $\{U_t; t = 1, 2, \dots\}$ марківським процесом.

Для оцінки ймовірності банкрутства, розглянемо другий процес який визначається наступним чином. Спершу визначимо

$$W_t^* = \begin{cases} 0, & U_{t-1}^* < 0 \\ W_t, & U_{t-1}^* \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

і

$$U_t^* = U_{t-1}^* + W_t^*, \tag{7}$$

де новий процес стартує з $U_0^* = u$. В цьому випадку ймовірність виживання для скінченного горизонту дорівнює

$$\tilde{\phi}(u, \tau) = \mathrm{P}(U_\tau^* \geq 0).$$

Після цього досить перевірити U_t^* в момент часу τ, оскільки в разі банкрутства йому не дозволяють набути невід'ємних значень. Наступний приклад ілюструє це.

Приклад

Розглянемо процес з початковим залишком 2,і фіксованою щорічною премією 3, а також витратами 0 або 6 з імовірністю 0,6 і 0,4 відповідно. Ніяких інших грошових потоків в цьому прикладі не передбачено. Визначити $\tilde{\phi}(2,2)$.

U_1 може набувати тільки двох значень: 5 і -1 з імовірностями 0,6 і 0,4. У кожному році, W_t набуває значень 3 і -3 з імовірностями 0,6 і 0,4. Для 2-го року, є чотири можливі шляхи розвитку подій цього процесу, які наведено в таблиці нижче.

Випадок	U_1	W_2	W_2^*	U_2^*	Ймовірність
1	5	3	3	8	$0,36$
2	5	-3	-3	2	$0,24$
3	-1	3	0	-1	$0,24$
4	-1	-3	0	-1	$0,16$

Отже, $\tilde{\phi}(2,2) = 0,36 + 0,24 = 0,60$. Зазначимо, що, продовжуючи для U_2 процес у випадках 3 і 4, отримаємо значення 2 і -4. Але наш процес не може відновитися після банкрутства, а тому в третьому випадку має зберігатися від'ємне значення.

Обчислення ймовірності банкрутства

Існують три способи для обчислення ймовірності банкрутства. Один із способів, який завжди доступний – це **моделювання**.

Так само, як може бути змодельований сумарний розподіл витрат, можна змоделювати і процес залишків. Для дуже складних моделей (наприклад, для медичного страхування, яке включає госпіталізацію, виписані ліки, відвідування пацієнтів, а також і випадкову інфляцію, відсоткові ставки та рівні утилізації), такий шлях може виявитися єдиним.

Для більш скромних налаштувань інші два методи дають гарні результати.

Метод згорток

Для практичного застосування цього методу розподіл всіх в.в. має бути дискретним зі скінченним носієм. Якщо це не так, то повинні бути побудовані деякі дискретні наближення. Обчислення робляться рекурсивно, використовуючи (6)–(7). Для простоти позначень, припустимо, що ми отримали закон розподілу U^*_{t-1}.

Тоді ймовірність банкрутства

$$\tilde{\psi}(u, t-1) = \mathrm{P}(U^*_{t-1} < 0),$$

а розподіл невід'ємних залишків

$$f_j = \mathrm{P}(U^*_{t-1} = u_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

де $u_j \geq 0$ для всіх j, u_n є максимальним можливим значенням

Ми припустили, що для кожного додатного значення U_{t-1}^* розподіл W_t відомий. Нехай $g_{j,k} = \mathsf{P}(W_t = w_{j,k} | U_{t-1}^* = u_j)$. Залишимо відкритою можливість того, що значення W_t можуть залежати від u_j. Тепер можна обчислити ймовірності U_t^* через згортку. Спершу визначимо

$$\tilde{\psi}(u,t) = \tilde{\psi}(u,t-1) + \mathsf{P}(U_{t-1})^* \geq 0 \text{ та } U_{t-1})^* + W_t < 0)$$

$$= \tilde{\psi}(u,t-1) + \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(U_{t-1})^* + W_t < 0 | U_{t-1})^* = u_j) \mathsf{P}(U_{t-1}^* = u_j)$$

$$= \tilde{\psi}(u,t-1) + \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(u_j) + W_t < 0 | U_{t-1})^* = u_j) f_j$$

$$= \tilde{\psi}(u,t-1) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{w_{j,k} < -u_j} g_{j,k} f_j.$$

Тоді,

$$\mathsf{P}(U_t^* = x) = \mathsf{P}(U_t^* \geq 0 \text{ та } U_{t-1}^* + W_t = x$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(U_{t-1}^* \geq 0 \text{ та } U_{t-1}^* + W_t = x | U_{t-1}^* = u_j)\mathsf{P}(U_{t-1}^* = u_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(u_j + W_t = x | U_{t-1}^* = u_j) f_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{w_{j,k}+u_j=x} g_{j,k} f_j.$$

Розглянемо такий приклад.

Приклад

Припустимо, що щорічні втрати можуть набувати значень 0, 2, 4 і 6 з імовірностями 0,4, 0,3, 0,2 і 0,1 відповідно. Далі припустимо, що початковий залишок дорівнює 2, а премію завбільшки 2,5 збирають на початку кожного року. Відсоткову прибуток у 10% отримують від будь-якого залишку, доступного на початку року, оскільки виплати здійснюють в кінці кожного року. Крім того, у будь-який рік, у якому немає втрат, нараховують знижку в розмірі 0,5.

Визначити ймовірність виживання в кінці кожного з перших двох років.

Насамперед зауважимо, що знижку не може бути застосовано до премії в наступному році, оскільки для цього, треба не лише починати рік, знаючи величину залишку, а й знати, чи буде знижку нараховано.

У нульовий момент часу $\tilde{\psi}(2,0) = 0$ і $f_1 = \mathsf{P}(U_0^* = 2) = 1$. Можливі значення $w_{1,k}$, наведено в таблиці 6.1 разом з імовірностями. Наприклад, значення $w_{1,1}$ отримано на основі премії $2,5$, відсотків $0,45$ (на залишок після збору премії), виплати рівні 0, і знижка 0,5.

k	$w_{1,k}$	$g_{1,k}$
1	$2,45$	$0,4$
2	$0,95$	$0,3$
3	$-1,05$	$0,2$
4	$-3,05$	$0,1$

Для оцінки $\tilde{\psi}(2,1)$, зауважимо, що єдине значення $w_{1,k}$, менше за $u_1 = -2$, це $w_{1,4}$, а тому $\tilde{\psi}(2,1) = 0,1$. Неважко бачити, що єдине значення , яке матиме додатну ймовірність, дорівнює $2 + w_{1,k}$. Звідси отримуємо значення розподілу U_1^*, які наведено в таблиці

j	u_j	f_j
1	$0,95$	$0,2$
2	$2,95$	$0,3$
3	$4,45$	$0,4$

Остання ймовірність дорівнює $\mathrm{P}(U_1^* = -1,05) = 0,1$.
Один із способів подання другого року є побудова таблиці, яка містить усі комбінації u_j і $w_{j,k}$. У таблиці далі записано значення $u_j + wj, k$ та $g_{j,k}$.

j	u_j	f_j	1	2	3	4
1	$0,95$	$0,2$	$3,295;\ 0,4$	$1,795;\ 0,3$	$-0,205;\ 0,2$	$-2,205;\ 0,1$
2	$2,95$	$0,3$	$5,495;\ 0,4$	$3,995;\ 0,3$	$1,995;\ 0,2$	$-0,005;\ 0,1$
3	$4,45$	$0,4$	$7,145;\ 0,4$	$5,645;\ 0,3$	$3,645;\ 0,2$	$1,645;\ 0,1$

Сумісна ймовірність для будь-якої клітинки є добутком f_j з відповідного рядка на ймовірність у цій клітинці. Додавання до $\tilde{\psi}(2,1)$ дає ймовірність для всіх клітинок таблиці з від'ємними значеннями, тобто

$$\widetilde{\psi}(2,2) = 0,1 + 0,2(0,2) + 0,2(0,1) + 0,3(0,1) = 0,19.$$

Повторні значення для $w_{i,k}$ відсутні, тому найкраще, що можна зробити, це впорядкувати значення і перепозначити їх як нові u_j на початку третього року.

j	u_j	f_j
1	$1,645$	$0,04$
2	$1,795$	$0,06$
3	$1,995$	$0,06$
4	$3,295$	$0,08$
5	$3,695$	$0,08$
6	$3,995$	$0,09$
7	$5,495$	$0,12$
8	$5,645$	$0,12$
9	$7,145$	$0,16$

Сума всіх імовірностей становить $0,81$ – доповнення до $\tilde{\psi}(2,2)$. За визначенням, решта $0,19$ відповідає події $U_2^* < 0$.

Метод інверсії

Однією із сильних сторін методу інверсії є те, що процес обчислення згортки зводиться до кількох операцій множення. Це справедливо за умови, що в.в. незалежні. У нашому випадку це означає, що значення W_t не залежить від U_{t-1}.

Використаємо інший підхід для відстеження банкрутства (раніше було використано заморожування величини U_t^* після банкруства). Цей підхід також може бути застосований і до методу згортки.

Нехай U_t^{**} і U_t визначені при $U_t \geq 0$. В кінці кожного періоду всі ймовірності, що відповідають банкрутству, перерозподіляють серед невід'ємних залишків.

Послідовний аналіз має такий вигляд.

1. Визначають $\varphi_{1,t}(z) = \mathrm{E}(e^{izU^{**}_{t-1}})$ – характеристичну функцію U^{**}_{t-1}.
2. Визначають $\varphi_{2,t}(z) = \mathrm{E}(e^{izW_t})$ – х.ф. W_t.
3. Тоді $\varphi_{3,t}(z) = \varphi_{1,t}(z) \cdot \varphi_{2,t}(z)$ – це х.ф. суми $U^{**}_{t-1} + Wt$.
4. Використовуючи інверсію (обернене перетворення Фур'є), визначимо щільність $f_1(u)$ суми $U^{**}_{t-1} + W_t$.
5. Позначимо через $r_t = \mathrm{P}(U^{**}_{t-1} + Wt < 0)$ імовірність банкрутства в момент часу t за умови виживання в момент часу $t-1$. Тоді $f^{**}_t(u) = f_t(u)/(1-r_t)$ при $u \geq 0$ – щільність в.в. U^{**}_t.
6. Імовірність банкрутства в момент часу t дорівнює $\tilde{\psi}(u,t) = \tilde{\psi}(u,t-1) + r_t[1-\tilde{\psi}(u,t-1)]$.

Зауважимо, що щільність розподілу U_1 можна отримати безпосередньо з рівності $U_1 = u + W_1$.

Неперервна модель

Оскільки неперервні моделі, як правило, важко аналізувати, почнемо розглядати інтервали, на яких кількість виплат має розподіл Пуассона.

У неперервному випадку знаходимо, що точні аналітичні розв'язки можуть бути отримані в часткових випадках – наближеннями, а верхня межа може бути обчислена у багатьох ситуаціях. У цьому розділі ми розглянемо процес Пуассона і неперервний підхід до обчислення ймовірності банкрутства.

Складний процес Пуассона

Нехай процес числа подій $\{N_t; t \geq 0\}$ є процесом Пуассона з інтенсивністю λ. Припустимо, що індивідуальні виплати $X_{1,2},\ldots$ – н.о.р. невід'ємні в.в., незалежні від N_t, із функцією розподілу $F()$ і середнім $\mu < \infty$. Нехай S_t – загальна сума виплат на інтервалі $(0, t]$. Відповідно,

$$S_t = 0, \text{ коли } N_t = 0 \text{ і } S_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_j, \text{ коли } N_t > 0.$$

При фіксованому t S_t має складний розподіл Пуассона. Процес $\{S_t; t \geq 0\}$ назвемо складним процесом Пуассона.

Оскільки $N_t; t \geq 0$ – стаціонарний процес із незалежними приростами, то й $\{S_t; t \geq 0\}$ має такі самі властивості. Крім того, $\mathsf{E}(S_t) = \mathsf{E}(N_t)\mathsf{E}(X_j) = (\lambda t)(\mu) = \mu\lambda t$.

Будемо вважати, що премії сплачуються неперервно зі сталою інтенсивністю в одиницю часу. Це означає, що загальна нетто-премія за час $(0, t]$ становить ct. Ми ігноруємо відсоткову ставку для математичної простоти.

Припустимо, що нетто-премії мають невід'ємне навантаження, тобто $ct > \mathsf{E}(S_t)$, звідки випливає, що $c > \lambda\mu$. Отже, нехай

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu, \tag{8}$$

де $\theta > 0$ – відносне навантаження на безпеку.

Підладжений коефіцієнт і нерівність Лундберга

Після визначення процесу витрат і премій, можемо перейти до процесу залишків. Він має вигляд

$$U_t = U_0 + ct - S_t > 0, \quad t \geq 0.$$

Визначимо спеціальний параметр, а потім покажемо, як можна його використати для отримання верхньої межі величини $\psi(u)$.

Нехай κ – єдиний додатний розв'язок рівняння

$$1 + (1+\theta)\mu\kappa = \mathsf{E}(e^{\kappa X}). \tag{9}$$

Якщо таке значення існує, то його називають *підладженим коефіцієнтом* або *коефіцієнтом Крамера–Лундберга*.

Щоб побачити, чи може бути розв'язок, розглянемо дві криві на площині (t, y):

$$y_1(t) = 1 + (1+\theta)\mu t, \quad y_2(t) = \mathsf{E}(e^{tX}).$$

Припустимо, що генератриса моментів існує для всіх невід'ємних t. Тоді

$$y_2'(t) = \mathsf{E}(Xe^{tX}) > 0, \quad y_2''(t) = \mathsf{E}(X^2 e^{tX}) > 0.$$

Оскільки $y_1(0) = y_2(0) = 1$, то дві криві перетинаються при $t = 0$. Але

$$y_2'(0) = \mathsf{E}(X) = \mu < (1+\theta)\mu = y_1'(0).$$

Таким чином, зі зростанням t, починаючи від 0, функція $y_2(t)$ спочатку лежить нижче $y_1(t)$, але оскільки $y_2'(t) > 0$ і $y_2''(t) > 0$, зрештою $y_2(t)$ перетне $y_1(t)$ в точці $\kappa > 0$.

Зауважимо, що рівняння (9) може не мати додатних розв'язків. Наприклад, якщо розподіл індивідуальних втрат не має генератриси моментів (розподіл Парето, логнормальний та ін.).

Приклад (Експоненційний розподіл)

Нехай X має експоненційний розподіл із середнім μ. Визначте підладжений коефіцієнт.

Зауважимо, що рівняння (9) може не мати додатних розв'язків. Наприклад, якщо розподіл індивідуальних втрат не має генератриси моментів (розподіл Парето, логнормальний та ін.).

Приклад (Експоненційний розподіл)

Нехай X має експоненційний розподіл із середнім μ. Визначте підладжений коефіцієнт.

Отже, маємо $F() = 1 - e^{-x/\mu}$, $x > 0$. Тоді $\mathsf{E}(e^{tX}) = (1 - \mu t)^{-1}$, $t < 1/\mu$. Таким чином, з рівності (9) маємо рівняння

$$1 + (1 + \theta)\mu\kappa = (1 - \mu\kappa)^{-1}. \tag{10}$$

Як і передбачалося, $\kappa = 0$ є одним із розв'язків, додатний розв'язок дорівнює $\kappa = \theta/[\mu(1 + \theta)]$.

Приклад (Гамма-розподіл)

Припустимо, що $\theta = 2$, а величини індивідуальних позовів мають гамма-розподіл із параметрами $\alpha = 2$ та β. Визначити підладжений коефіцієнт.

Приклад (Гамма-розподіл)

Припустимо, що $\theta = 2$, а величини індивідуальних позовів мають гамма-розподіл із параметрами $\alpha = 2$ та β. Визначити підладжений коефіцієнт.

Запишемо щільність

$$f(x) = \beta^{-2} x e^{-x/\beta}, \quad x > 0.$$

Для гамма-розподілу $\mu = 2\beta$ і

$$\mathrm{E}(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx} f(x) \mathrm{d}x = (1 - \beta t)^{-2}, \quad \beta t < 1.$$

Тоді з (9) отримуємо рівність

$$1 + 6\kappa\beta = (1 - \beta\kappa)^{-2},$$

яку можна переписати у вигляді

$$6\beta^3\kappa^3 - 11\beta^2\kappa^2 + 4\beta\kappa = 0.$$

Отриманий виразлегко розкласти на множники

$$\kappa\beta(2\kappa\beta - 1)(3\kappa\beta - 4) = 0.$$

Підладжений коефіцієнт – це єдиний корінь, який задовольняє початкове рівняння, а саме

$$\kappa = 1/(2\beta).$$

Більший корінь $4/(3\beta)$ треба відкинути, оскільки генератриса моментів існує лише для значень, менших за $1/\beta$.

У загальному випадку для довільного розподілу індивідуальних втрат неможливо знайти явний вигляд підладженого коефіцієнта так, як це було зроблено у двох попередніх прикладах. Зазвичай для розв'язання (9) застосовують чисельні методи, багато з яких вимагають початкове припущення про значення κ. Щоб знайти таке значення, запишемо

$$1 + (1+\theta)\mu\kappa = \mathsf{E}(e^{\kappa X}) = \mathsf{E}(1 + \kappa X + \kappa^2 X^2/2 + \dots)$$
$$> \mathsf{E}(1 + \kappa X + \kappa^2 X^2/2) = \mathsf{E}(1 + k\mu + k^2 \mathsf{E}(X^2)/2).$$

Віднявши 1 з обох частин нерівності і розділивши на κ, отримаємо нерівність

$$k < \frac{2\theta\mu}{\mathsf{E}X^2}. \qquad (11)$$

Права частина (11) зазвичай є задовільним початковим

Приклад

Припустимо, що загальні втрати – це в.в. з дисперсією, що втричі більша за середнє. Знайти межу для підладженого коефіцієнта.

Приклад

Припустимо, що загальні втрати – це в.в. з дисперсією, що втричі більша за середнє. Знайти межу для підладженого коефіцієнта.

Для складного розподілу Пуассона $\mathsf{E}(S_t) = \mu\lambda t$, $\mathsf{D}(S_t) = \lambda t \mathsf{E}X^2$, звідки $\mathsf{E}(X^2) = 3\mu$. Таким чином, з (11) випливає, що $\kappa < 2\theta/3$.

Вправа

Вимоги за портфелем страхових полісів надходять як процес Пуассона з річною інтенсивністю λ. Індивідуальні позови мають фіксовану величину 100, причому страховик використовує навантаження на премії 15%. Страховик розглядає можливість укладення угоди пропорційного перестрахування з перестраховиком, який використовує навантаження на премії 20%. Страховик покриватиме частку α кожного ризику.

(i) Запишіть і спростіть рівняння, що визначає підладжений коефіцієнт κ для страховика.

(ii) Розглядаючи κ як функцію від α і диференціюючи її, покажіть, що

$$(120\alpha - 5)\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} + 120\kappa = \left(100\kappa + 100\alpha\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha}\right) e^{100\alpha\kappa}.$$

Вправа

(iii) Поясніть, чому, встановивши $\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} = 0$ і розв'язавши відносно α, можна отримати оптимальне значення для α.

(iv) Використайте метод, запропонований у (iii), щоб знайти оптимальний вибір для α.

Визначимо

$$H(t) = 1 + (1+\theta)\mu t - \mathsf{E}e^{tX}. \qquad (12)$$

Тоді підладжений коефіцієнт $\kappa > 0$ задовольняє $H(\kappa) = 0$. Для знаходження розв'язків цього рівняння використаємо метод Ньютона–Рафсона

$$\kappa_{j+1} = \kappa_j - \frac{H(\kappa_j)}{H'(\kappa_j)},$$

де

$$H'(t) = (1+\theta)\mu - \mathsf{E}(Xe^{tX}),$$

стартуючи з початковим значенням κ_0. Оскільки $H(0) = 0$, треба слідкувати, щоб шукане значення не збігалося до 0. Також зауважимо, що може бути простіше отримати $\mathsf{E}(Xe^{tX})$, диференціюючи генератрису моментів, ніж обчислити очікуване значення.

Приклад

Нехай інтенсивність в процесі Пуассона $\lambda = 4$ і ставка премії $c = 7$. Далі припустимо, що розподіл суми витрат задано так

$$\mathrm{P}(X = 1) = 0,6, \mathrm{P}(X = 2) = 0,4.$$

Визначити підладжений коефіцієнт.

Приклад

Нехай інтенсивність в процесі Пуассона $\lambda = 4$ і ставка премії $c = 7$. Далі припустимо, що розподіл суми витрат задано так

$$\mathsf{P}(X = 1) = 0,6, \mathsf{P}(X = 2) = 0,4.$$

Визначити підладжений коефіцієнт.

Маємо

$$\mu = \mathsf{E}X = 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 = 1,4$$

і

$$\mathsf{E}X^2 = 1^2 \cdot 0,6 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,2.$$

Тоді $\theta = (\lambda\mu)^{-1} - 1 = 75,6^{-1} = 0,25$. З (11), ми знаємо, що κ повинно бути менше ніж $\kappa_0 = 2 \cdot 0,25 \cdot 1,4/2,2 = 0,3182$.

Далі,

$$\mathsf{E}(e^{tX}) = 0,6e^t + 0,4e^t$$

та з (12)

$$H(t) = 1 + 1,75t - 0,6e^t + 2e^{2t} \cdot 0,4.$$

Крім того,

$$\mathsf{E}(Xe^{tX}) = 0,6e^t + 0,8e^{2t},$$

а тому

$$H'(t) = 1,75 - 0,6e^t - 0,8e^{2t}.$$

Наша початкове наближення $\kappa_0 = 0,3182$. Тоді $(\kappa_0) = -0,02381$ і $(k_0') = -0,5865$. Таким чином, оновленою оцінкою для κ є

$$\kappa_1 = 0,3182 - (-0,02381)/(-0,5865) = 0,2776.$$

Тоді $H(0,2776) = -0,003091, H'(0,2776) = -0,4358$, і
$\kappa_2 = 0,2776 - (-0,003091)/(-0,4358) = 0,2705$.

Продовжуючи далі, обчислимо $\kappa_3 = 0,2703$, $\kappa_4 = 0,2703$, і, таким чином, підладжений коефіцієнт $\kappa = 0,2703$.

Існує ще одна форма для рівняння (9), яка буває корисною. Проінтегрувавши частинами, матимемо

$$\int_0^\infty e^{\kappa x}\mathrm{d}F(x) = -e^{\kappa x}[1-F(x)]\big|_0^\infty + \kappa\int_0^\infty e^{\kappa x}[1-F(x)]\mathrm{d}x.$$

Далі

$$0 \le e^{\kappa x}[1-F(x)] = e^{\kappa x}\int_0^\infty \mathrm{d}F(y) \le \int_0^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}F(y)$$

і $\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}F(y) = 0$, бо $\mathsf{E}(e^{\kappa X})\int_x^\infty e^{\kappa y}\mathrm{d}F(y) < \infty$. Таким чином, $\lim_{x\to\infty}\int_x^\infty e^{\kappa y}[1-\mathrm{d}F(y)] = 0$ і тому

$$\mathsf{E}(e^{\kappa X})\int_0^\infty e^{\kappa x}\mathrm{d}F(x) = 1 + \kappa\mathsf{E}(e^{\kappa X})\int_0^\infty e^{\kappa y}[1-\mathrm{d}F(x)]\mathrm{d}x.$$

Врахувавши рівність (9), сформулюємо наступне альтернативне визначення для κ:

$$1+\theta=\int_0^{\infty} e^{\kappa x} f_e(x)\mathrm{d}x, \tag{13}$$

де щільність $f_e(x)$ дорівнює

$$f_e(x)=\frac{1-F(x)}{\mu}, \quad x>0. \tag{14}$$

Вправа

Від портфелю страхових полісів надходять позови за Пуассонівським процесом з інтенсивністю λ. Величини позовів – н.о.р. в.в. $X_1, X_2, \ldots$ із розподілом

$$\mathsf{P}(X_i = k) = p_k, \ k = 1, 2, \ldots, M \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{M} = 1.$$

Коефіцієнт навантаження на премію дорівнює θ.
(i) Покажіть, що підладжений коефіцієнт κ задовольняє нерівність

$$\log(1+\theta)/M < \kappa < 2\theta m_1/m_2,$$

де $m_i = \mathsf{E}X_1^i$, $i = 1, 2$.

(ii) а) Визначте верхню та нижню межу для κ, якщо $\theta = 0,3$, а X_i з однаковою ймовірністю набуватиме значень 2 або 3 (і ніяких інших).
б) Отримайте верхню межу для ймовірності банкрутства, якщо початковий залишок становить u.

Вказівка. Використайте нерівність
$e^{\kappa x} \leq xe^{\kappa M}/M + 1 - x/M, 0 \leq x \leq M$.

Вправа

Моменти подання позовів за портфелем страхових полісів відповідають Пуассонівському процесу з параметром λ. Величини індивідуальних позовів мають щільність розподілу

$$f(x) = 0,01^2 x e^{-0,01x}, \quad x > 0.$$

Страхова компанія обчислює премії, використовуючи навантаження 45 %.
(i) Знайдіть генератрису моментів $M_X(t)$
(ii) Визначте підладжений коефіцієнт та отримайте верхню межу для ймовірності банкрутства, якщо початковий залишок становить u.

(iii) Використовуючи межу з (ii), визначте, якою має бути величини початкового залишку, щоб імовірність банкрутства не перевищувала 1 %.
Припустимо тепер, що величина всіх індивідуальних позовів є фіксованою і становить 200.
(iv) Визначте, чи зросте підладжений коефіцієнт стане порівняно з (ii) та прокоментуйте отриманий результат.

Нерівність Лундберга

Основне використання підладженого коефіцієнта наведено в такій теоремі.

Теорема

Нехай $\kappa > 0$ – розв'язок (9). Тоді ймовірність банкрутства $\psi(u)$ задовольняє нерівність

$$\psi(u) \leq e^{-ku}, \quad u \geq 0. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $\psi_n(u)$ – ймовірність того, що банкрутство настане не пізніше n-ї вимоги для $n = 0, 1, 2, \ldots$. За допомогою методу математичної індукції за n доведемо таку нерівність: $\psi_n(u) \leq e^{-\kappa u}$. Очевидно, що $\psi_0(u) = 0 \leq e^{-\kappa u}$. Далі припустимо, що $\psi_n(u) \leq e^{-\kappa u}$ і нам необхідно показати, що $\psi_{n+1}(u) \leq e^{-\kappa u}$.

Розглянемо, що трапиться після настання першої вимоги. Час до першої вимоги є експоненційно розподіленим зі щільністю $\lambda e^{-\lambda t}$.

Якщо позов надходить у момент $t > 0$, то залишок для оплати вимоги в час t буде $u + ct$. Тобто банкрутство наступить після першої вимоги, якщо величина капіталу рівна $u + ct$. Ймовірність настання такої події $1 - F(u + ct)$.

Якщо величина вимоги буде x, де $0 \leq x \leq u + ct$, то банкрутство не настане після першої вимоги. Після виплати першої вимоги залишок буде $u + ct - x$. Звідси процес ризику має стаціонарні та незалежні прирости, тобто це те саме, якби процес стартував з початковим капіталом $u + ct - x$ та було n вимог.

За формулою повної ймовірності одержимо рекурсивну рівність

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \left[1 - F(u+ct) + \int_0^{u+ct} \psi_n(u)\mathrm{d}F(x)\right] \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Використовуючи припущення індукції та те, що $-\kappa(u+ct-x) > 0$ при $x > u+ct$, маємо

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \left[\int_{u+ct}^\infty \mathrm{d}F(x) + \int_0^{u+ct} \psi_n(u+ct-x)\mathrm{d}F(x)\right] \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$\leq \int_0^\infty \left[\int_{u+ct}^\infty e^{-\kappa(u+ct-x)}\mathrm{d}F(x) + \int_0^{u+ct} e^{-\kappa(u+ct-x)}\mathrm{d}F(x)\right] \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

Додавши внутрішні інтеграли, отримаємо

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\kappa(u+ct-x)} \mathrm{d}F(x)\right] \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$$

$$= \lambda e^{-\kappa u} \int_0^\infty e^{-\kappa ct} \left[\int_0^\infty e^{\kappa x} \mathrm{d}F(x)\right] \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t$$

$$= \lambda e^{-\kappa u} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa c)t} \left[\mathsf{E}(e^{\kappa X})\right] \mathrm{d}t$$

$$= \lambda \mathsf{E}(e^{\kappa X}) e^{-\kappa u} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\kappa c)t} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\lambda \mathsf{E}(e^{\kappa X})}{\lambda + \kappa c} e^{-\kappa u},$$

але з (9) та (8)

$$\lambda \mathsf{E}(e^{\kappa X}) = \lambda[1 + (1+\theta)\kappa\mu] = \lambda + \kappa(1+\theta)\lambda\mu = \lambda + \kappa c,$$

тобто $\psi_{n+1}(u) \le e^{-\kappa u}$.

Отже, ми довели, що для довільного n виконується $\psi_n(u) \le e^{-\kappa u}$, а також, що

$$\psi(u) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \le e^{-\kappa u}.$$

Зауважимо, що отриманий результат є дуже важливим, оскільки може бути використаний для вивчення взаємодії між рівнем залишку u та інтенсивністю надходження премій θ – обох параметрів, які контролює страховик. Припустимо, що йому потрібно забезпечити ймовірність банкрутства $\alpha = 0,01$ для відомого залишку u. Тоді навантаження

$$\theta = \frac{u\left\{\mathsf{E}\left[\exp\left(-\frac{\log\alpha}{u}X\right)\right] - 1\right\}}{-\mu\log\alpha}$$

гарантує, що (9) задовільняється при $\kappa = (-\log\alpha)/u$
Тоді за теоремою 2.1 $\psi(u) \leq e^{-\kappa u} = e^{\log\alpha} = \alpha$.

Нерівність (15) дозволяє довести такий факт:

$$\psi(\infty) = \lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0. \tag{16}$$

Оскільки $\psi(u)$ – це ймовірність, то

$$0 \le \psi(u) \le e^{-\kappa u} \tag{17}$$

і тому

$$0 \le \lim_{u\to\infty} \psi(u) \le \lim_{u\to\infty} e^{-\kappa u} = 0,$$

то отримаємо рівність (15). Тоді ймовірність виживання дорівнює

$$\phi(\infty) = 1. \tag{18}$$

Інтегрально-диференційне рівняння

Отже, ми знайшли явну формулу для оцінки ймовірності настання банкрутства. Цей результат можна використати для оцінки більш загальної функції.

Позначимо через $G(u, y)$ ймовірність того, банкрутство настає за умови, що початковий капітал рівний u, а дефіцит одразу після настання банкрутства не перевищує y, $u \geq 0$, $y \geq 0$.

Таким чином, залишок зразу після настання банкрутства лежить між 0 та y. Тоді

$$\psi(u) = \lim_{y \to \infty} G(u, y), \quad u \geq 0. \tag{19}$$

Теорема

$G(u, y)$ задовільняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial u} G(u, y) =$$

$$= \frac{\lambda}{c} G(u, y) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u G(u - x, y) dF(x) - \frac{\lambda}{c} \left[F(u + y) - F(u)\right], \tag{20}$$

$u \geq 0$.

Розглянемо, що станеться в перші h одиниць часу, де h мале.

Кількість вимог є пуассонівським процесом, тому трапиться 0 чи 1 вимога (ймовірність більше одної вимоги $= o(h)$).

Якщо не трапиться жодної вимоги (з імовірністю $1 - \lambda h$ (плюс $o(h)$)), тоді зі стаціонарності й незалежності приростів, банкрутство з дефіцитом, що не перевищує y, настане з імовірністю $G(u + ch, y)$.

Якщо надходить вимога на суму x, де $0 \leq x \leq u + ch$, банкрутство з дефіцитом, що не перевищує y, ще не настало, але може настати згодом з імовірністю $G(u + ch - x, y)$, якщо ж $u + ch < x \leq u + ch + y$, банкрутство настане із дефіцитом не більше ніж y (коли $x > u + ch + y$ дефіцит перевищить y).

Отже, за формулою повної ймовірності

$$G(u,y) = (1-\lambda h)G(u+ch,y) + \lambda h \int_0^{u+ch} G(u+ch-x,y)\mathrm{d}F(x) +$$

$$+\lambda h\left[F(u+ch+y) - F(u+ch)\right] + o(h).$$

Це можна переписати у вигляді

$$c\frac{G(u+ch,y) - G(u,y)}{ch} = \lambda G(u+ch,y) - \lambda \int_0^{u} G(u+ch-x,y)\mathrm{d}F(x)$$

$$-\lambda\left[F(u+ch+y) - F(u+ch)\right] + \frac{o(h)}{h}.$$

Нехай $h \to 0$, тоді, поділивши на c, отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y) = \frac{\lambda}{c}G(u,y) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u G(u-x,y)\mathrm{d}F(x) - \frac{\lambda}{c}\left[F(u+y) - F(u)\right].$$

Визначимо явну формулу для $G(0,y)$.

Теорема

$G(0,y)$ задовільняє рівняння

$$G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_0^y (1 - F(x))dx, \quad y \geq 0. \tag{21}$$

Спочатку зауважимо, що

$$0 \leq G(u,y) \leq \psi(u) \leq e^{-\kappa u}.$$

Спрямувавши $u \to \infty$, отримаємо $0 \le G(\infty, y) = 0$. Також

$$\int_0^\infty G(u, y)\mathrm{d}u \le \int_0^\infty e{-}\kappa u du = \kappa^{-1} < \infty.$$

Нехай $\tau(y) = \int_0^\infty G(u, y)\mathrm{d}u$, і ми знаємо, що $0 < \tau(y) < \infty$. Тоді, проінтегрувавши (20) по u від 0 до ∞ та врахувавши вищевикладені результати, отримаємо

$$G(0, y) = -\frac{\lambda}{c}\tau(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^u G(u - x, y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}u$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \left[F(u + y) - F(u)\right]\mathrm{d}u.$$

Змінивши порядок інтегрування в подвійному інтегралі,

$$G(0,y) = -\frac{\lambda}{c}\tau(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_x^\infty G(u-x,y)\mathrm{d}u\mathrm{d}F(x)$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [F(u+y)-F(u)]\,\mathrm{d}u$$

Змінивши змінну інтегрування u на $v = u - x$,

$$G(0,y) = -\frac{\lambda}{c}\tau(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^\infty G(v,y)\mathrm{d}v\mathrm{d}F(x)$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [F(u+y)-F(u)]\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\lambda}{c}\tau(y) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \tau(y)\mathrm{d}F(x) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty [F(u+y)-F(u)]\,\mathrm{d}u$$

Оскільки $\int_0^\infty \mathrm{d}F(x) = 1$,

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [F(u + y) - F(u)] \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(u)] \, \mathrm{d}u - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(u + y)] \, \mathrm{d}u.$$

Тоді, змінивши змінну інтегрування в першому інтегралі u на $x = u$, а в другому u на $x = u + y$, отримаємо

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(x)] \, \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{c} \int_y^\infty [1 - F(x)] \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^y [1 - F(x)] \, \mathrm{d}x.$$

Зауважимо, що (21) справедливе, навіть якщо підладжений коефіцієнт не існує. До вивчення властивостей функції $G(0, y)$ ми повернемось пізніше, а зараз розглянемо декілька співвідношень для функції $\phi(u)$.

Теорема

Ймовірність виживання без початкового капіталу

$$\phi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{22}$$

Нагадаємо, що $\mu = \int_0^\infty [1 - F(x)]\,\mathrm{d}x$ та скористаємось рівністю (21).

$$\psi(0) = \lim_{y\to\infty} G(0, y) = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty [1 - F(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Звідси $\phi(0) = 1 - \psi(0) = \theta/(1+\theta)$.

Теорема

Ймовірність остаточного виживання $\phi(u)$ задовільняє таке рівняння

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)dF(x), \quad u \geq 0. \tag{23}$$

З (20) при $y \to \infty$ та (19)

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F(x) - \frac{\lambda}{c}\left[1 - F(u)\right], \quad u \geq 0. \tag{24}$$

У термінах ймовірності виживання $\phi(u) = 1 - \psi(u)$, (24) може бути переписано

$$\begin{aligned} -\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left[1-\phi(u)\right] - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \left[1-\phi(u-x)\right]\mathrm{d}F(x) - \frac{\lambda}{c}\left[1-F(u)\right] \\ = -\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \mathrm{d}F(x) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F(x) + \frac{\lambda}{c}F(u) \\ = -\frac{\lambda}{c}\phi(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi(u-x)\mathrm{d}F(x), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Аналітичний підхід до оцінювання певних розподілів величини вимог

У цьому розділі ми одержимо аналітичні вирази для ймовірності банкрутства. Для цього нам потрібно виключити інтегрування з правої частини (23). У цьому випадку ми отримаємо диференційне рівняння, яке легше буде розв'язати ніж інтегрально-диференційне. Вищесказане можливо зробити для випадку, коли в нас відомий розподіл кількості всіх вимог, які надійдуть.

(Експоненційний розподіл)

Припустимо, що $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}$, $x > 0$. Визначити $\phi(u)$.

У цьому випадку (23) набуває вигляду

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{\mu c}\int_0^u \phi(u-x)e^{-x/\mu}\mathrm{d}x.$$

Змінивши змінну інтегрування з x на $y = u - x$, отримаємо

$$\phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{\mu c}e^{-u/\mu}\int_0^u \phi(y)e^{y/\mu}\mathrm{d}y. \qquad (25)$$

Щоб позбавитися інтегрування в цій рівності, продиференціюємо її по u.

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c}\phi'(u) + \frac{\lambda}{\mu 2c} e^{-u/\mu} \int_0^u \phi(y) e^{y/\mu} \mathrm{d}y - \frac{\lambda}{\mu c}\phi(u).$$

Виразивши інтеграл із (25) і підставивши в останню рівність, одержимо

$$\phi''(u) = \frac{\lambda}{c}\phi'(u) - \frac{\lambda}{\mu c}\phi(u) + \frac{1}{\mu}\left[\frac{\lambda}{c}\phi(u) - \phi'(u)\right].$$

Спростивши її і розділивши на $\phi'(u)$, отримаємо

$$\frac{\phi''(u)}{\phi'(u)} = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right) = -\frac{\theta}{\mu(1+\theta)}.$$

Проінтегруємо по u, матимемо

$$\log \phi'(u) = \frac{\theta\mu}{\mu(1+\theta)} + K_1.$$

Скористаємось (25) та (22) за умови $u = 0$.

$$\phi'(0) = \frac{\lambda}{c}\frac{\theta}{1+\theta} = \frac{\lambda}{\lambda\mu(1+\theta}\frac{\theta}{1+\theta}$$

$$= \frac{\theta}{\mu(1+\theta)^2}.$$

Звідси

$$K_1 = \log\left[\frac{\theta}{\mu(1+\theta)^2}\right].$$

Тоді

$$\phi\prime(u) = \frac{\theta}{\mu(1+\theta)^2} \exp\left[-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)}\right].$$

Проінтегруємо по u. Тоді

$$\phi(u) = -\frac{1}{1+\theta} \exp\left[-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)}\right] + K_2.$$

Використавши (22), отримаємо $\phi(0) = \theta/(1+\theta)$, звідси $K_2 = 1$. Тому шукана ймовірність набуде вигляду

$$\phi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp\left[-\frac{\theta u}{\mu(1+\theta)}\right].$$

Теорема

Припустимо, що функція $k(x)$ задовільняє

$$k''(x) + bk'(x) + ck(x) = 0. \tag{26}$$

Тоді, якщо квадратне рівняння

$$r^2 + br + c = 0 \tag{27}$$

має дійсні, різні корені r_1 та r_2, тоді розв'язок (26) має вигляд

$$k(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x}, \tag{28}$$

де A_1 та A_2 – довільні сталі.

Введемо нову функцію $m(x)$, яка задовільняє $k(x) = e^{r_1 x} m(x)$. Тоді

$$k'(x) = r_1 e^{r_1 x} m(x) + e^{r_1 x} m'(x)$$

і

$$k''(x) = r_1^2 e^{r_1 x} m(x) + 2 r_1 e^{r_1 x} m'(x) + e^{r_1 x} m''(x).$$

Підставивши в (26), отримаємо

$$0 = e^{r_1 x} m''(x) + 2 r_1 e^{r_1 x} m'(x) + r_1^2 e^{r_1 x} m(x) +$$

$$+ b[e^{r_1 x} m'(x) + r_1 e^{r_1 x} m(x)] + c e^{r_1 x} m(x).$$

Поділивши на $e^{r_1 x}$, отримаємо

$$0 = m''(x) + (b + 2r_1) m'(x) + (r_1^2 + b r_1 + c) m(x). \qquad (29)$$

Оскільки r_1 – корінь рівняння (28), то $r^2 + br + c = 0$, тому коефіцієнт біля $m(x)$ зникає. Також $r^2 + br + c = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$, і тому $b = -r_1 - r_2$. Тоді (29) можна переписати у вигляді

$$m''(x) + (r_1 - r_2)m'(x) = 0.$$

Звідси

$$m''(x)/m'(x) = r_2 - r_1.$$

Проінтегрувавши, отримаємо

$$\log m'(x) = (r_2 - r_1)x + \log C_1$$

чи

$$m'(x) = C_1 e^{(r_2 - r_1)x}.$$

Ще раз проінтегрувавши,

$$m(x) = A_1 + A_2 e^{(r_2 - r_1)x},$$

де $A_2 = C_1(r_2 - r_1)^{-1}$. Оскільки $k(x) = e^{r_1 x} m(x)$, то отримаємо (28).

Для зручності позначень введемо для довільного $n > 0$ функцію

$$r_n(u) = \int_0^u e^{nu}\phi(y)\mathrm{d}y. \tag{30}$$

Продемонструємо метод розв'язування на прикладі.

(Суміш експоненційних розподілів)

Як і в прикладі... нехай $\theta = 4/11$ та щільність розподілу числа вимог

$$F'(x) = e^{-3x} + \frac{10}{3} e^{-5x}, \quad x > 0.$$

Визначити $\phi(u)$.

У цьому випадку $F'(x) = \frac{1}{3}(3e^{-3x}) + \frac{2}{3}(5e^{-5x})$ і середнє $\mu = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{5}) = 11/45$. Тоді

$$c/\lambda = \mu(1+\theta) = 1/3.$$

А (23) набуває вигляду

$$\phi'(u) = 3\phi(u) - 3\int_0^u \phi(u-x)\{e^{-3x} + \frac{10}{3}e^{-5x}\}\mathrm{d}x =$$

$$= 3\phi(u) - 3e^{-3u}r_3(u) - 10e^{-5u}r_5(u) \qquad (31)$$

Тут ми змінили змінну інтегрування з x на $y = u - x$ та використали(30). Для того, щоб виключити невідомі функціїї $r_3(u)$ та $r_5(u)$ продиференціюємо (31).

$$\phi''(u) = 3\phi'(u) + 9e^{-3u}r_3(u) - 3\phi(u) + 50e^{-5u}r_5(u) - 10\phi(u).$$

Виключимо $10e^{-5u}r_5(u)$ з останньої рівності скориставшись (31). Отримаємо

$$\phi''(u) = 3\phi'(u) - 13\phi(u) + 9e^{-3u}r_3(u) +$$

$$+5[-\phi'(u) + 3\phi(u) - 3e^{-3u}r_3(u)]$$

$$\phi''(u) = -2\phi'(u) + 2\phi(u) - 6e^{-3u}r_3(u). \tag{32}$$

Продиференціюємо (32)

$$\phi'''(u) = -2\phi''(u) + 2\phi'(u) + 18e^{-3u} r_3(u) - 6\phi(u)$$

Виразимо $6e^{-3u} r_3(u)$ з (32)

$$\phi'''(u) = -2\phi''(u) + 2\phi'(u) - 6\phi(u) +$$
$$+3[-\phi''(u) - 2\phi'(u) + 2\phi(u)].$$

Спростивши отримаємо

$$\phi'''(u) + 5\phi''(u) + 4\phi'(u) = 0. \tag{33}$$

Рівняння (33) може бути розглянене як рівняння (26) відносно функціїї $\phi'(u)$. Корені характеристичного рівняння $r^2 + 5r + 4 = 0$, $r_1 = -1$ та $r_2 = -4$. Тоді

$$\phi'(u) = A_1 e^{-u} + A_2 e^{-4u}. \tag{34}$$

Підставимо $u = 0$ в (34) та (31) та скориставшись (22) отримаємо

$$A_1 + A_2 = \phi'(0) = 3\phi(0) = 3\theta(1+\theta)^{-1} = 4/5. \tag{35}$$

Проінтегрувавши (34),

$$\phi(u) = A_1 e^{-u} - (A_2/4)e^{-4u} + A_3. \tag{36}$$

Але з (18) $\phi(\infty) = 1$, тому $A_3 = 1$. І підставивши в (36) $u = 0$ та скориставшись (22), отримаємо

$$A_1 + A_2/4 = 1 - \phi(0) = (1+\theta)^{-1} = 11/15. \qquad (37)$$

Константи A_1 та A_2 повинні задовільняти (35) та (37). Тому $A_1 = 32/45$ і $A_2 = 4/45$. Тоді (36) набуде вигляду

$$\phi(u) = 1 - \frac{32}{45} e^{-u} - \frac{1}{45} e^{-4u}, \quad u \geq 0.$$

(Гама розподіл)

Як і в прикладі..., припустимо , що $\theta = 2$ і щільність розподілу кількості вимог

$$F'(x) = \beta^{-2} x e^{-x/\beta}, x > 0$$

Визначити $\phi(u)$.

Середнє $\mu = 2\beta$ і $c/\lambda = \mu(1+\theta) = 6\beta$. Тоді (23) набуде вигляду

$$6\beta\phi'(u) = \phi(u) - \beta^{-2}\int_0^u \phi(u-x)xe^{-x/\beta}\mathrm{d}x. \tag{38}$$

Змінимо змінну інтегрування з x на $y = u - x$

$$\int_0^u \phi(u-x)xe^{-x/\beta}\mathrm{d}x = e^{u/\beta}\int_0^u \phi(y)(u-y)e^{-y/\beta}\mathrm{d}y.$$

Проінтегруємо по частинам і скористаємось (30)

$$\int_0^u \phi(y)(u-y)e^{-y/\beta}\mathrm{d}y = (u-y)r_{1/\beta}(y)|_{y=0}^u + \int_0^u r_{1/\beta}(y)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^u r_{1/\beta}(y)\mathrm{d}y.$$

Тоді (38) можна переписати у вигляді

$$6\beta\phi'(u) = \phi(u) - \beta^{-2}e^{-u/\beta}\int_0^u r_{1/\beta}(y)\mathrm{d}y. \qquad (39)$$

Для виключення з цієї рівності інтеграла продиференціюємо її

$$6\beta\phi''(u) = \phi'(u) + \beta^{-3}e^{-u/\beta}\int_0^u r_{1/\beta}(y)\mathrm{d}y - \beta^{-2}e^{-u/\beta}r_{1/\beta}(y).$$

Виразивши $\beta^{-2}e^{-u/\beta}\int_0^u r_{1/\beta}(y)\mathrm{d}y$, з (39) отримаємо

$$6\beta\phi''(u) = -5\phi'(u) + \beta^{-1}\phi(u) - \beta^{-2}e^{-u/\beta}r_{1/\beta}(u). \qquad (40)$$

Для того, щоб виключити $r_{1/\beta}(y)$, продиференціюємо (40)

$$6\beta\phi'''(u) = -5\phi''(u) + \beta^{-1}\phi'(u) + \beta^{-3}e^{-u/\beta}r_{1/\beta}(u) - \beta^{-2}\phi(u).$$

Виразимо $beta^{-2}e^{-u/\beta}r_{1/\beta}(u)$ із (40) та одержимо

$$6\beta\phi'''(u) = -5\phi''(u) + \beta^{-1}\phi'(u) - \beta^{-2}\phi(u) +$$
$$+\beta^{-1}[-6\beta\phi''(u) - 5\phi'(u) + \beta^{-1}\phi(u)].$$

Це можна переписати у вигляді

$$\phi'''(u) + \frac{11}{6\beta}\phi''(u) + \frac{2}{3\beta 2}\phi'(u) = 0. \tag{41}$$

Рівняння (41) – це (26) відносно функції $\phi'(u)$.
Тоді

$$0 = r^2 + \frac{11}{\beta}r + \frac{2}{3\beta^2} = \left(r + \frac{1}{2\beta}\right)\left(r + \frac{4}{3\beta}\right)$$

За теоремою ??

$$\phi'(u) = A_1 e^{-u/(2\beta)} + A_2 e^{-u4/(3\beta)}. \tag{42}$$

Підставимо $u = 0$ в (42) та (39) і використаємо (22)

$$A_1 + A_2 = \phi'(0) = \phi(0)/(6\beta) = 1/(9\beta). \tag{43}$$

Проінтегруємо (42)

$$\phi(u) = -2\beta A_1 e^{-u/(2\beta)} + \frac{3}{4}\beta A_2 e^{-u4/(3\beta)} + A_3 \tag{44}$$

Оскільки з (18) $\phi(\infty) = 1$, то $A_3 = 1$. Підставивши $u = 0$ в (44) та скориставшись (22), отримаємо

$$2\beta A_1 + \frac{3}{4}\beta A_2 = \frac{1}{3}. \tag{45}$$

З (43) та (45) отримаємо $A_1 = 1/(5\beta)$ та $A_2 = -4/(45\beta)$. Тоді

$$\phi(u) = 1 - \frac{2}{5}e^{-u/(2\beta)} + \frac{1}{15}e^{-4u/(3\beta)}, \quad u \geq 0.$$

Асимптотчна формула Крамера для ймовірності банкрутства

У цьому розділі виведено ще декілька рівностей для $\phi(u)$ за допомогою інтегрально-диференційного рівняння, але на відміну від попереднього розділу будемо його інтегрувати, а не диференціювати. Для початку покажемо, що

$$\int_0^t \int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}u = \int_0^t \psi(t-x)F(x)\mathrm{d}x. \qquad (46)$$

Для початку змінимо порядок інтегрування в лівій частині (46)

$$\int_0^t \int_0^u \psi(u-x)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}u = \int_0^t \int_x^t \psi(u-x)\mathrm{d}u\mathrm{d}F(x).$$

та змінимо змінну інтегрування з u на $y = u - x$

$$\int_0^t \int_x^t \psi(u-x)\mathrm{d}u\mathrm{d}F(x) = \int_0^t \int_0^{t-x} \psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}F(x).$$

Для зручності введемо нову функцію

$$\Lambda(x) = \int_0^x \psi(y)\mathrm{d}y.$$

Тоді
$$\int_0^t \int_0^{t-x} \psi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}F(x) = \int_0^t \Lambda(t-x)\mathrm{d}F(x).$$
Проінтегруємо (??) по u від 0 до t та використаємо (46)

$$\psi(0)-\psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t [1-F(u)]\,\mathrm{d}u - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t)\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)F(x)\mathrm{d}x.$$

Перейшовши від змінної u до x в першому інтегралі та від u до $x = t - u$ в другому, одержимо

$$\psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \psi(t-x)\,[1-F(x)]\,\mathrm{d}x + \psi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t [1-F(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Зауважимо, що

$$\psi(0) = (1+\theta)^{-1} = \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} [1 - F(x)]\,\mathrm{d}x.$$

Тоді

$$\psi(t) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{t} \psi(t-x)\,[1-F(x)]\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{c}\int_t^{\infty} [1-F(x)]\,\mathrm{d}x. \quad (47)$$

Рівняння (47) має різноманітне застосування. У загальному випадку $F(\cdot)$, його можна розв'язати наближено для визначення $\psi(x)$, цю проблему ми розглянемо більш детально в наступному розділі.

Теорема

Нехай $k > 0$ задовільняє (9). Тоді ймовірність банкрутства

$$\psi(u) \sim Ce^{-\kappa u}, \quad u \to \infty, \tag{48}$$

де

$$C = \frac{\theta\mu}{E(Xe^{\kappa X}) - \mu(1+\theta)}. \tag{49}$$

Для початку доведемо одне допоміжне твердження. Нехай $g(x)$ щільність додатньої випадкової велечини, а $a(x)$ задовільняє рівняння

$$a(x) = \int_0^x a(x-y)g(y)\mathrm{d}y + b(x), \quad x > 0. \tag{50}$$

Тоді

$$\lim_{x\to\infty} a(x) = \frac{\int_0^\infty b(y)\mathrm{d}y}{\int_0^\infty yg(y)\mathrm{d}y}. \tag{51}$$

Використавши (14), (51) можна переписати у вигляді

$$\psi(t) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^t \psi(t-x) f_e(x) \mathrm{d}x + \frac{1}{1+\theta} \int_t^\infty f_e(x) \mathrm{d}x. \qquad (52)$$

Помножимо обидві частини (52) на $e^{\kappa t}$, отримаємо

$$\psi_*(t) = \int_0^t \psi_*(t-x) g(x) \mathrm{d}x + \frac{e^{\kappa t} \int_t^\infty f_e(x) \mathrm{d}x}{1+\theta},$$

де $\psi_*(t) = e^{\kappa t} \psi(t)$ та $g(x) = e^{\kappa t} f_e(x)/(1+\theta)$.

Тут $\psi_*(t)$ задовільняє (50) з $b(t) = e^{\kappa t}\int_t^\infty f_e(x)\mathrm{d}x/(1+\theta)$. Тоді з (51)

$$\lim_{x\to\infty}\psi_*(x) = \frac{\int_0^\infty b(y)\mathrm{d}y}{\int_0^\infty yg(y)\mathrm{d}y}. \tag{53}$$

$$\int_0^\infty b(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{1+\theta}\int 0^\infty e^{\kappa y}\left[\int_y^\infty f_e(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{1+\theta}\left[\frac{1}{\kappa}e^{\kappa y}\int_y^\infty f_e(x)\mathrm{d}x\Big|_{y=0}^\infty + \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty e^{\kappa y}f_e(y)\mathrm{d}y\right],$$

де $0 \le e^{\kappa y}\int_y^\infty f_e(x)\mathrm{d}x \le \int_y^\infty e^{\kappa x}f_e(x)\mathrm{d}x$ та права частина прямує до 0 при $y \to \infty$ з (13), тоді

$$\int_0^{\infty} b(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{1+\theta}\left(-\frac{1}{\kappa}+\frac{1+\theta}{\kappa}\right) = \frac{\theta}{\kappa(1+\theta)}.$$

Також

$$\int_0^{\infty} yg(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{1+\theta}\int_0^{\infty} ye\kappa y f_e(y)\mathrm{d}y.$$

Проінтегрумо по частинах

$$\int_0^{\infty} ye\kappa y f_e(y)\mathrm{d}y = \frac{y}{\kappa}e^{\kappa y} f_e(y)|_{y=0}^{\infty} -$$

$$-\frac{1}{\kappa}\ int_0^{\infty} e\kappa y f_e(y)\mathrm{d}y + \frac{1}{\mu\kappa}\int_0^{\infty} ye^{\kappa y}\mathrm{d}F(y).$$

Оскільки $\mathsf{E}(Xe^{\kappa X}) = \int_0^\infty xe^{\kappa x}\mathrm{d}F(x) < \infty$, тоді $\lim_{y\to\infty} ye^{\kappa y} f_e(y) = 0$, тому

$$0 \le ye^{\kappa y} f_e(y) = \frac{ye^{\kappa y}}{\mu}\int_y^\infty \mathrm{d}F(x) \le \frac{1}{\mu}\int_y^\infty xe^{\kappa x}\mathrm{d}F(x).$$

Перші три із вище вказаних членів 0 і другий за (13), тому

$$\int_0^\infty yg(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{1+\theta}\left[-\frac{1+\theta}{\kappa} + \frac{\mathsf{E}(Xe^{\kappa X})}{\mu\kappa}\right] = \frac{\mathsf{E}(Xe^{\kappa X}) - \mu(1+\theta)}{\mu\kappa(1+\theta)}.$$

Тоді (53) можна переписати

$$\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\psi(u) = \frac{\theta/[\kappa(1+\theta)]}{[\mathsf{E}(Xe^{\kappa X}) - \mu(1+\theta)]/[\mu\kappa(1+\theta)]} =$$
$$= \frac{\mu\theta}{\mathsf{E}(Xe^{\kappa X}) - \mu(1+\theta)}.$$

Що доводить теорему.
Отриманий результат є додатком до нерівності, наведеної в теоремі 2.1 для великих u.

Приклад (Експоненційний розподіл)

Якщо $F(x) = 1 - e^{-x/\mu}, x > 0$, визначимо асимптотичну формулу ймовірності банкрутства

У прикладі **??** ми отримали, що $k = \theta/\{\mu(1+\theta)\}$ та $\mathsf{E}(e^{tX}) = (1-\mu t)^{-1}$. Таким чином,

$$\mathsf{E}(Xe^{Xt}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\mu t)^{-1} = \mu(1-\mu t)^{-2}.$$

Також

$$\mathsf{E}(Xe^{X\kappa}) = \mu(1-\mu\kappa)^{-2} = \mu\{1-\theta(1+\theta)^{-1}\}^{-2} = \mu(1+\theta)^2.$$

Тоді з (49)

$$C = \frac{\mu\theta}{\theta(1+\theta)^2 - \mu(1+\theta)} = \frac{\theta}{(1+\theta)(1+\theta-1)} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Асимптотична формула (48) набуває вигляду

$$\psi(u) \sim \frac{1}{1+\theta} \exp\left[\frac{-\theta\mu}{\mu(1+\theta)}\right], \quad u \to \infty.$$