Статистичні методи теорії ризику

© Ямненко Р.Є

КНУ імені Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
магістратура "Актуарна та фінансова математика"

І семестр 2012

Зміст

Метод максимальної вірогідності

Досить простий метод утворення оцінок невідомого параметра запропонував Р. Фішер, припустивши, що в експерименті спостерігають ті дані, які відповідають параметру, при якому ймовірність спостерігати ці дані максимальна.

Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – повторна вибірка із генеральної сукупності з функцією розподілу $F_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ та щільністю розподілу $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, а $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ – спостережені значення вибірки $\mathbf{X}$.

Функція вірогідності

Функцію

$$L = L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = f_{\boldsymbol{\theta}}(x_1) \ldots f_{\boldsymbol{\theta}}(x_n) \tag{1}$$

називають *функцією вірогідності*.

Для дискретних в.в., які набувають значення в множині $\{x_1, \ldots, x_n\}$ з розподілами $f_{\boldsymbol{\theta}}(x) = P(X_i = x)$, функція вірогідності має вигляд

$$L = L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = f_{\boldsymbol{\theta}}(x_1) \ldots f_{\boldsymbol{\theta}}(x_n).$$

ОМВ

Оцінкою максимальної вірогідності параметра $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ називають значення параметра, при якому функція вірогідності L набуває найбільшого значення.

Часто функція L досягає максимуму у внутрішній точці множини Θ і є диференційованою. Оскільки функція $\ln L$ при даних значеннях вибірки $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ досягає свого максимуму в тій самій точці, що й функція L, то для знаходження оцінки максимальної вірогідності можна розв'язати рівняння вірогідності

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$$

та вибрати серед коренів такі, для яких матриця

$$\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)$$

буде від'ємно визначеною.

ОМВ є асимптотично незміщеною та консистентною.

Принцип інваріантності

Якщо функція $a(\boldsymbol{\theta})\colon \Theta \to Q \subseteq \mathbb{R}^d$ є взаємно однозначною, а $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ – ОМВ параметра $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$, то $\hat{a}_n = a(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ буде ОМВ для $a(\boldsymbol{\theta})$. Цей простий принцип утворення оцінок максимальної вірогідності функцій від параметрів називають *принципом інваріантності*.

Приклад

Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – повторна вибірка з логнормального розподілу $LN(\theta_1, \theta_2^2)$. Оскільки $\ln X_i \sim N(\theta_1, \theta_2^2)$, то ОМВ параметрів θ_1 та θ_2^2 мають вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2n}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{1n})^2.$$

Оскільки

$$\mathsf{E}X_1 = m_1 = \exp\left\{\theta_1 + \frac{\theta_2^2}{2}\right\}, \mathsf{D}X = \mu_2 = m_1^2(\exp\{\theta_2^2\} - 1),$$

то ОМВ математичного сподівання m_1 та дисперсії μ_2 логнормального закону згідно з принципом інваріантності мають вигляд

$$\hat{m}_{1n} = \exp\{\hat{\theta}_{1n} + \frac{\hat{\theta}_{2n}^2}{2}\}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \exp\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2\},$$

$$\hat{\mu}_{2n} = \hat{m}_{1n}^2\left(\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2\right\} - 1\right).$$

Вправа

В.в. Y має розподіл Пуассона з параметром θ, але накладено обмеження на те, що нульова кількість подій не може відбутися. Розподіл Y називають усіченим в нулі розподілом Пуассона.

i) Покажіть, що закон розподілу Y має вигляд

$$\mathrm{P}(Y = y) = \frac{\theta^y e^{-\theta}}{y!(1 - e^{-\theta})}, \quad y = 1, 2, \ldots$$

ii) Знайти $\mathrm{E}Y$.

iii) Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ є повторною вибіркою з усіченого в нулі розподілу Пуассона. Покажіть, що ОМВ параметра θ можна визначити, як розв'язок такого рівняння: $\bar{X} - \theta - \frac{\theta e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} = 0$, причому ОМВ співпадає з оцінкою методом моментів.

Вправа

Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ є повторною випадковою вибіркою з рівномірного розподілу на інтервалі $[-\theta, \theta]$, де θ – невідоме додатне число. Зроблена вибірка розміру 5 дала такі значення: 0,87; $-0,43$; 0,12; $-0,92$ та $0,58$.

i) Побудуйте ескіз графіка функції вірогідності $L(\mathbf{X};\theta)$ відносно θ для цієї вибірки.

ii) Вкажіть значення оцінки максимальної вірогідності θ.

Вправа

Актуарій порадив застосовувати наступну щільність розподілу величини позовів як модель для певного типу позовів:
$f(x;\theta) = \frac{x^2}{2\theta^3} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$, $x > 0$, $\theta > 0$.

i) Обчисліть $\mathsf{E}X$, $\mathsf{E}X^2$ та $\mathsf{E}X^3$.

ii) Нехай $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ – повторна випадкова вибірка із n величин позовів. Знайдіть оцінку максимальної вірогідності параметра θ та покажіть, що вона є незміщеною.

Вправа

Коли новий позов надходить до офісу, то він проходить перший етап фільтрування з імовірністю θ, інакше його відхиляють. Якщо позов пройшов перший етап, то він незалежним чином проходить другий етап фільтрування з такими самими ймовірностями проходження далі чи відхилення.

i) Записати ймовірності того, що позов буде:
   (a) відхилено на першому етапі;
   (b) відхилено на другому етапі;
   (c) прийнято на обох етапах.
ii) У вибірці з n незалежних позовів, що надійшли до офісу, x_1 було відхилено на першому етапі, x_2 було відхилено на другому етапі та x_3 пройшли обидва етапи $(x_1 + x_2 + x_3 = n)$. Знайти оцінку максимальної вірогідності параметра θ.

Перестрахування: Загальні відомості

Перестрахування як явище виросло зі страхування морського транспорту. Кожне морське перевезення було ризиковим.

З поширенням використання позик під здійснення високоризикових морських перевезень позичальники домовлялися між собою про авансування вантажу судновласникові за високий процент, який згодом набрав форми страхової премії.

Через певний проміжок часу деякі підприємці стали постійно, повністю або частково брати на себе відповідальність за перевезення, здійснюючи їх перестрахування.

У XIX столітті перестрахування почало розвиватися в галузі покриття ризиків, пов'язаних з пожежами.

Основні поняття і визначення

Перестрахування — це страхування особливого виду. Зміст його полягає у передачі частини ризику (ризиків) у відповідальність іншому спеціалізованому страховику, тобто перестраховику.

Страховика, котрий безпосередньо працює зі страхувальниками щодо взяття на себе їхніх ризиків, називають *прямим страховиком*, або *страховиком, що передає ризики*.

Процес передачі частини взятих на себе ризиків іншим страховикам з метою створення такого страхового портфеля, який би забезпечував стійкість і рентабельність страхових операцій, називають *перестрахуванням*.

Перестраховик — це страховик, котрий надає страхову послугу прямому страховику. У свою чергу перестраховик може передати частину взятих на себе ризиків іншому страховику і т. д.

Процес передачі ризику називається *цедуванням ризику* або *страхувальною цесією*. Страховика, який передає ризик, називають *цедентом*, а того, що приймає цей ризик, — *цесіонарієм*.

Наступну передачу цесіонарієм (частково або повністю) ризику наступному перестраховику називають *ретроцесією*.

Страхове товариство, яке передає третьому учаснику ризик у наступне перестрахування, називається *ретроцедентом*, а товариство, яке бере на себе ретроцедований ризик, називається *ретроцесіонарієм*.

Цесіонарій немає ніяких зобов'язань щодо укладених цедентом договорів страхування.

Це означає, що страховик (цедент), котрий уклав договір із перестраховиком (цесіонарієм), залишається відповідальним перед страхувальником у повному обсязі. Він навіть не зобов'язаний інформувати страхувальника про передачу ризику в перестрахування.

Перестраховик зобов'язаний виплатити відшкодування цеденту пропорційно до його участі за умови, що цедент виплатив це відшкодування страхувальнику.

Цедент зобов'язаний інформувати цесіонарія про цедований ризик так само, як страхувальник зобов'язаний інформувати страховика про всі зміни, що відбуваються в ризику, який він передав страховику.

Функції перестрахування

Головна функція перестрахування — вторинний перерозподіл ризику.

Зміст її полягає в тому, що страховик може забезпечити страхувальнику тільки таку гарантію, яка відповідає його фінансовим можливостям.

Самотужки домогтися значних результатів страховику досить важко. Якісніше і в повнішому обсязі виконувати свої зобов'язання страховик може завдяки перестрахуванню, тобто через розподіл ризику між ним та іншими страховиками. За цих умов перестраховик бере на себе відносно значну частку ризику чи гарантії.

Частину ризику, яку цедент залишає за собою, називають *власним утриманням*.

На практиці найчастіше кілька перестраховиків беруть участь у покритті збитків (вони вступають у співпрацю на підставі контрактного документа або договору).

Як правило, на кожного перестрахувальника припадає різна частка покриття. Завдяки цьому страховик, котрий передає ризики в перестрахування, збільшує свої можливості щодо прийняття ризиків у десятки разів.

Допоміжні функції:

- перестрахування дає змогу брати на страхування дуже дорогі та унікальні ризики;
- воно сприяє запровадженню та поширенню нових видів страхування;
- перестрахування в перспективі створює умови для формування однорідного збалансованого портфеля, який необхідний страховику для надійного контролю своєї середньо- та довгострокової політики.

Якщо перерозподіл ризику здійснюється між компаніями з різних країн, то перестрахування набирає форми зовнішньої торгівлі, де об'єктом купівлі-продажу є страхові гарантії. Це "невидимий" експорт-імпорт.

Розрізняють активне та пасивне перестрахування.

Активне перестрахування полягає у прийнятті іноземних ризиків для покриття або продажу страхових гарантій.

Пасивне перестрахування — це передача ризиків іноземним страховикам (купівля страхових гарантій).

Головна його мета — передача відносно дрібних ризиків великій кількості перестраховиків у різних країнах. Завдяки цьому досягається стабільність страхового портфеля та встановлюються широкі контакти на ринку перестрахування

Види договорів перестрахування

В основі перестрахування лежить договір, згідно з яким одна сторона (цедент) передає повністю або частково страховий ризик (або групу ризиків) іншій стороні — перестраховику, котрий в свою чергу бере на себе зобов'язання відшкодовувати цеденту відповідну частину страхового покриття.

За способом взаємозобов'язань цедента та цесіонарія договори перестрахування бувають:

- факультативними;
- облігаторними;
- факультативно-облігаторними.

Факультативне перестрахування вважається найпростішим. Воно широко використовується за умови великих ризиків.

Договір факультативного перестрахування надає повну свободу цеденту у вирішенні питання щодо передачі (часткової чи повної) певного виду ризику та умов цієї передачі. Перестраховик може прийняти цю пропозицію або відхилити її.

Розмір перестрахувальних платежів за цим договором визначає ринок.

За цим же видом договорів цедент повинен передати частину ризику до початку відповідальності за нього.

Договір облігаторного перестрахування зобов'язує цедента передати перестраховику в межах певної частки всі ризики одного й того ж характеру, взяті на страхування в тій чи іншій країні, наприклад, ризики пожежі та непрямі ризики.

Передача таких часток ризиків перестраховику здійснюється тільки тоді, коли страхова сума перевищує визначену раніше власну участь страховика. Перестраховик за умовами даного виду договору зобов'язується прийняти всі ці ризики в перестрахування, не маючи можливості контролювати ні тарифікацію, ні виплати з ліквідації збитків.

Цей вид договору укладається на невизначений строк з правом його розірвання.

Факультативно-облігаторні договори перестрахування — це договори “відкритого покриття”.

За цією формою цедент вільний у виборі ризику (чи груп ризику), які він хоче передати перестраховику, а також у визначенні їхнього розміру. Перестраховик зобов’язується прийняти цедовані ризики на попередньо застережених цедентом умовах.

Перестрахові платежі за цим договором визначаються на індивідуальній основі за згодою сторін або пропорційно страховим платежам, отриманим при підписанні первинного договору страхування.

Небезпека для цесіонарія за облігаторним та факультативно-облігаторним договорами полягає у тому, що цедент може зробити селекцію ризиків у страховому портфелі і найнебезпечніші передати перестраховику.

Тому ці договори мають ґрунтуватися на довірі сторін.

Якщо участь перестраховика в кожному переданому йому покритті ризику визначається за заздалегідь обумовленим співвідношенням власної участі цедента, то таке перестрахування називають *пропорційним*.

У практиці пропорційного страхування використовують договори:

- квотні;
- ексцедентні;
- квотно-ексцедентні.

Квотний перестрахувальний договір передбачає передачу цесіонарію премії та збитків в однаковій пропорції в межах певного ліміту прийняття ризиків.

Якщо власне утримання цедента становить, скажімо, 30%, перестрахувальник отримує 70% премій, сплачених цеденту, і відшкодовує 70% його збитків.

Договір ексцедентного перестрахування ґрунтується на тому, що перестраховик бере на себе зобов'язання відповідати за полісами, які покривають суми, що перевищують ліміти власної участі страховика в покритті ризику.

В договорі передбачається кількість лімітів, які можуть бути передані перестрахувальнику.

Максимум власної участі страховика в покритті ризику називається *ексцедентом*. Перевищення цього ліміту передається в перестрахування.

Досить часто в договорі передбачаються різні ліміти, залежно від категорії ризику.

Квотно-ексцедентний договір поєднує засоби двох уже названих. Портфель за такими договорами перестраховується квотно, а перевищення сум страхування ризиків понад встановлену квоту (ліміт) у свою чергу підлягає перестрахуванню на засадах ексцедентного договору.

При пропорційних договорах страхові інтереси цедента та цесіонарія збігаються.

При *непропорційних* — цедент може домагатися певних результатів, а перестраховик — зазнати збитків.

Здебільшого ці договори діють у зв'язку з подіями, а не ризиками, їхня мета — захист цедента: від великих збитків; від суміщення збитків; від подій катастрофічного характеру (землетрус, ураган і т. ін.).

За цих умов перестраховик бере на себе суму збитку, яка перевищує власне утримання (або пріоритет) цедента в межах визначеної суми (ліміт перестрахувального покриття за договором). Пріоритет — власна участь цедента в покритті збитків.

Непропорційне перестрахування найчастіше використовується при страхуванні цивільної відповідальності власників транспортних засобів за збитки, спричинені третім особам в результаті ДТП, а також у тих випадках страхування, де немає верхньої межі відповідальності страховика. Системи перестрахування та розміри власного утримання залежать від галузі страхування.

Перестрахування на основі ексцедента сум доцільне для страхування від пожежі і поєднується з покриттям на базі ексцедента збитку в тому разі, якщо пожежа збігається з подіями катастрофічного характеру. При страхуванні автомобілів та цивільної відповідальності перестрахування здійснюється на основі ексцедента збитку.

Пропорційне перестрахування

При пропорційному перестрахуванні страховик сплачує фіксовану частку позову, якої б величини той не був. Якщо величина позову X, то компанія-страховик заплатить суму Y, де

$$Y = \alpha X, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Параметр α називають *рівнем утримання*. Цей термін вживають як при пропорційному, так і при ексцедентному страхуванні, але для різних видів перестрахування має різний зміст.

Виплата страховика при позові завбільшки X дорівнює αX, а виплата перестраховика становить $(1 - \alpha)X$. Розподіли цих величин легко знайти за допомогою простої заміни у формулі для функції розподілу $F(x)$.

Розподіл сумарних виплат

Розподіл кількості вимог для перестраховика такий самий, як і для страховика, оскільки обидва виплачують визначену частку кожного з індивідуальних позовів.

Для рівня утримання α величина індивідуального позову до страховика розподілена як αX_i (тобто $F_I(x) = F(x/\alpha)$, де $F(x)$ – функція розподілу в.в. X_i), а до перестраховика – як $(1-\alpha)X_i$ (тобто $F_R(x) = F(x/(1-\alpha))$).

Відповідно, і сумарні вимоги для страховика дорівнюють $S_I = \alpha S$, а для перестраховика – $S_R = (1 - \alpha S)$. Зокрема,

$$\mathrm{E}S_I = \alpha \mathrm{E}S, \; \mathrm{D}S_I = \alpha^2 \mathrm{D}S, \; M_{S_I} = \mathrm{E}e^{t\alpha S} = M_S(\alpha t).$$

Дисперсія сумарних вимог значно менша, що ще раз вказує на зменшення ризиків страховика за умов дії договору

Нехай страхова премія за кожним договором перестрахування дорівнює p, страховик отримує частку αp, перестраховик – $(1-\alpha)p$.

Припустимо, що початковий капітал страховика дорівнює $u > 0$, і було укладено n договорів страхування. Тоді ймовірність банкрутства страхової компанії за результатами року

$$\mathrm{P}(\alpha S > n\alpha p + u) = \mathrm{P}\left(S > np + \frac{u}{\alpha}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тобто з погляду страховика ефект договору перестрахування еквівалентний збільшенню в $\frac{1}{\alpha}$ разів початкового капіталу.

Перестрахування ексцеденту збитку

При *перестрахуванні ексцеденту збитку* компація-страховик оплачує кожен позов до величини M, яку називають *рівнем утримання*. Різницю між фактичною величиною позову і M оплачує перестраховик.

Договір перестрахування ексцеденту збитку можна описати так: якщо величина позову становить X, то компанія-страховик сплачує $Y = \min\{X, M\}$, а перестраховик – $Z = \max\{0, Z - M\} = (Z - M)_+$.

Такий вид перестрахування впливає на платоспроможність страховика у двох очевидних напрямках: зменшуються як середні виплати, так і дисперсія величини виплат. Ці два факти є простим наслідком того, що перестрахування ексцеденту збитку встановлює верхню межу для великих виплат.

Без перестрахування середнє значення виплат страховика дорівнює

$$\mathsf{E}X = \int_0^\infty x \mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty x f(x) \mathrm{d}x,$$

де $F(x)$ – функція розподілу, а $f(x)$ – щільність розподілу в.в. X (якщо існує).

Враховуючи рівень утримання M, вираз для математичного сподівання величини виплат Y страховика стає таким:

$$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}\min\{X, M\} = \int_0^M x \mathrm{d}F(x) + M\mathsf{P}(X > M)$$

$$= \int_0^M x f(x) \mathrm{d}x + M\mathsf{P}(X > M),$$

а для генератриси моментів

$$M_Y(t) = \mathsf{E}e^{tY} = \int_0^M e^{tx} \mathrm{d}F(x) + e^{tM}\mathsf{P}(X > M)$$

$$= \int_0^M e^{tx} f(x) \mathrm{d}x + e^{tM}\mathsf{P}(X > M).$$

Щоб уникнути труднощів, які мають місце при перестрахуванні ексцеденту збитку – неповний інтеграл в останніх формулах, використаємо метод, який дозволяє перетворити неповний інтеграл на повний. Маємо

$$\mathsf{E}Y = \int_0^\infty x f(x)\mathrm{d}x - \int_M^\infty x f(x)\mathrm{d}x + M\int_M^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \mathsf{E}X - \int_M^\infty (x-M)f(x)\mathrm{d}x = \mathsf{E}X - \int_0^\infty z f(z+M)\mathrm{d}z.$$

Отже, зменшення очікуваної (середньої) величини виплати дорівнює

$$\int_0^\infty z f(z+M)\mathrm{d}z.$$

Припустимо, що перестраховик поінформований лише про ті позови, величина яких перевищує рівень утримання M, і має дані стосовно $Z = X - M$. Якими будуть функція розподілу $F_Z(z)$ та щільність розподілу $f_Z(z)$ величини виплат перестраховика Z?

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z < z) = \mathrm{P}(X < z+M|X > M) = \frac{\mathrm{P}(M < x < z + M)}{P(X > M)}$$

$$= \int_M^{z+M} \frac{f(x)}{1 - F(M)}\mathrm{d}x = \frac{F(z + M) - F(M)}{1 - F(M)}.$$

Диференціювання за z дає вираз для щільності Z:

$$f_Z(z) = \frac{f(z + M)}{1 - F(M)}, \quad z > 0. \qquad (2)$$

Величина позовів, які страховик виплачує за індивідуальними договорами перестрахування ексцеденту збитку з рівнем утримання M, дорівнює $Y_i = \min\{X_i, M\}$. Величина виплат перестраховика $Z_i = (X_i - M)_+$. Відповідно, сумарні виплати страховика можна зобразити, як

$$S_I = Y_1 + \cdots + Y_N, \tag{3}$$

а перестраховика, як

$$S_R = Z_1 + \cdots + Z_N. \tag{4}$$

Наприклад, коли кількість позовів N – пуассонівська в.в. з параметром λ, тоді S_I має складний розподіл Пуассона з параметром λ та індивідуальними позовами, розподіленими, як Y_i. Аналогічно, S_R має складний розподіл Пуассона з тим самим параметром λ та індивідуальними позовами, розподіленими, як Z_i.

Зауважимо, що при $F(M) > 0$ існує ненульова ймовірність (а саме, $F(M)$) того, що $Z_i = 0$. Інакше кажучи, позову до перестраховика може не бути. З практичної точки зору це означає, що визначення (4) є штучним: страховик буде знати всю кількість позовів N, що надійшли, а перестраховик – лише ту кількість позовів N_R, величина яких більша за рівень утримання M, оскільки страховик може повідомити його лише про ці позови.

Нехай

$$N_R = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}_{\{X_j > M\}} = I_1 + \cdots + I_N$$

визначає кількість позовів, за якими має платити перестраховик, де через N позначено загальну кількість позовів із портфелю страхових полісів, а I_j – індикаторна в.в., яка дорівнює одиниці, коли перестраховик здійснює виплату за j-им позовом, та нулю, коли цього не відбувається.

Позначимо через $\rho = \mathsf{P}(X_j > M)$ ймовірність того, що величина j-го позову перевищила рівень M. Який розподіл має N_R?

Оскільки $I_j = 1$ лише тоді, коли $X_j > M$, то

$$\mathsf{P}(I_j = 1) = \mathsf{P}(X_j > M) = \rho$$

та

$$\mathsf{P}(I_j = 0) = 1 - \rho.$$

Звідси отримуємо, що генератриса моментів в.в. I_j дорівнює

$$M_I(t) = \rho e^t + 1 - \rho.$$

Тоді генератриса моментів N_R має вигляд

$$M_{N_R}(t) = M_N(\ln M_I(t)).$$

Як приклад, розглянемо наступні три випадки.

1. Нехай N має біноміальний розподіл з параметрами n та $0 < \theta < 1$. Тоді генератриса моментів для N_R дорівнює

1. Нехай N має біноміальний розподіл з параметрами n та $0 < \theta < 1$. Тоді генератриса моментів для N_R дорівнює

$$M_{N_R}(t) = (\theta(\rho e^t + 1 - \rho) + 1 - \theta)^n = (\theta\rho e^t + 1 - \theta\rho)^n.$$

Таким чином, N_R має біноміальний розподіл з параметрами n та $\theta\rho$.

2. Коли N має розподіл Пуассона з параметром λ, то генератриса моментів N_R, як генератриса моментів складного пуассонівського розподілу, дорівнює

1. Нехай N має біноміальний розподіл з параметрами n та $0 < \theta < 1$. Тоді генератриса моментів для N_R дорівнює

$$M_{N_R}(t) = (\theta(\rho e^t + 1 - \rho) + 1 - \theta)^n = (\theta\rho e^t + 1 - \theta\rho)^n.$$

   Таким чином, N_R має біноміальний розподіл з параметрами n та $\theta\rho$.
2. Коли N має розподіл Пуассона з параметром λ, то генератриса моментів N_R, як генератриса моментів складного пуассонівського розподілу, дорівнює

$$M_{N_R}(t) = \exp\{\lambda((\rho e^t + 1 - \rho) - 1)\} = \exp\{\lambda\rho(e^t - 1)\}.$$

   Отже, N_R також має розподіл Пуассона, але з параметром $\lambda_R = \lambda\rho$.
3. Якщо N має від'ємний біноміальний розподіл з параметрами k та θ, то

$$M_{N_R}(t) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)(\rho e^t + 1 - \rho)}\right)^k$$

$$= \left(\frac{\frac{\theta}{\theta+\rho-\theta\rho}}{1-\left(1-\frac{\theta}{\theta+\rho-\theta\rho}\right)e^t}\right)^k .$$

Як бачимо, і N_R має складний біноміальний розподіл з параметрами k та $\theta_R = \frac{\theta}{\theta+\rho-\theta\rho}$.

У всіх трьох випадках кількість виплат перестраховика має той самий тип розподілу, що й загальна кількість позовів, але з іншими значеннями параметрів.

Вправа

Річні сумарні позови мають складний розподіл Пуассона з параметром $\lambda = 10$. Індивідуальні позови розподілені рівномірно на $(0, 2\,000)$. Страховик уклав договір перестрахування ексцеденту збитку з рівнем утримання $= 1\,600$.

Обчисліть математичне сподівання та дисперсію для сумарних виплат як страховика, так і перестраховика, використовуючи обидва підходи.

Вправа

Страхова компанія має портфель із 10 000 полісів страхування будівель від ризику втрат, спричинених повенями.

і) Наведіть умови, за яких річну кількість позовів за портфелем можна змоделювати за допомогою біноміального розподілу з параметрами $n = 10\ 000$ та p.

Припустимо, що ці умови задовольняються і $p = 0,03$. Величини індивідуальних позовів нормально розподілені з середнім 400 та стандартним відхилом 50. Страховик хоче укласти договір пропорційного перестрахування з таким рівнем утримання α, щоб ймовірність того, що сумарні виплати за портфелем після перестрахування перевищать 120 000, дорівнювала 0,01.

ii) Обчислити α, припускаючи, що річні сумарні виплати можна апроксимувати за допомогою нормального розподілу.
Договір перестрахування укладено з компанією, яка використовує 15%-е навантаження на премії.

iii) Обчисліть розмір річної премії, нарахованої перестраховиком.

Як альтернативний варіант, перестраховик пропонує договір перестрахування ексцеденту збитку з рівнем утримання M і такою самою річною премією. Перестраховик використовує таке саме навантаження 15% для підрахунку величини премії за цим договором.

iv) Покажіть, що рівень утримання M приблизно дорівнює 358,50. (Вказівка: скористайтесь наступним результатом: якщо $f(x)$ – щільність нормального розподілу з параметрами μ та σ^2, то

$$\int_L^U x f(x)\mathrm{d}x = \mu(\Phi(U') - \Phi(L')) - \sigma(\varphi(U') - \varphi(L')),$$

де $L' = \frac{L-\mu}{\sigma}$ та $U' = \frac{U-\mu}{\sigma}$, $\Phi(z)$ – функція розподілу стандартної нормальної в.в. $N(0,1)$ зі щільністю $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.)

Розв'язок.

i) Необхідні умови:

- ризик втрат від повеней є сталим і дорівнює p для кожної будівлі;
- за кожним полісом може бути лише один позов протягом року;
- ризик втрат від повеней не залежить від будівлі.

ii) Нехай X_i – величина i-го індивідуального позову. Тоді середні виплати і дисперсія страховика дорівнюють $\mathsf{E}(\alpha X_i) = \alpha \mathsf{E} X_i = 400\alpha$, $\mathsf{D}(\alpha X_i) = \alpha^2 \mathsf{D} X = (50\alpha)^2$. Нехай S_I відображає сумарні річні виплати страховика. Тоді S_I має складний біноміальний розподіл, та

$$\begin{aligned} \mathsf{E} S_I &= 10\ 000 \cdot 0,03 \cdot 400\alpha = 120\ 000\alpha, \\ \mathsf{D} S_I &= 10\ 000 \cdot 0,03 \cdot (50\alpha)^2 + 10\ 000 \cdot 0,03 \cdot 0,97 \cdot (400\alpha)^2 \\ &= 47\ 310\ 000\alpha^2 = (6\ 878,23\alpha)^2. \end{aligned}$$

Значення α треба вибрати так, щоб $\mathsf{P}(S_I > 120\ 000) = 0,01$.
Стандартизуємо в.в. S_I:

$$\mathsf{P}\left(\frac{S_I - 120\ 000\alpha}{6\ 878,23\alpha} > \frac{120\ 000 - 120\ 000\alpha}{6\ 878,23\alpha}\right) = 0,01.$$

Оскільки 99%-квантиль стандартного нормального розподілу дорівнює 2,3263, отримуємо рівняння

$$\frac{120\ 000 - 120\ 000\alpha}{6\ 878,23\alpha} = 2,3263,$$

звідки $\alpha = 0,882$.

iii) Середні річні виплати перестраховика дорівнюють $(1-\alpha)400 = 47,20$. Величина премій, отриманих перестраховиком за рік, враховуючи 15% навантаження, становить $10\ 000 \cdot 0,03 \cdot 47,20 \cdot 1,15 = 16\ 284$.

iv) Нам треба показати, що використання рівня утримання 358,50 для обчислення величини премії у договорі перестрахування ексцеденту збитку дасть таку саму відповідь як і для угоди пропорційного перестрахування з частини ii).

Обчислимо спочатку середню величину індивідуального позову, сплаченого перестраховиком.

$$\int_{358{,}50}^{\infty}(x-358,50)f(x)\mathrm{d}x$$

$$= 400\left(1-\Phi\left(\frac{358,50-400}{50}\right)\right) - 50\left(0-\varphi\left(\frac{358,50-400}{50}\right)\right) -$$

$$-358,50\left(1-\Phi\left(\frac{358,50-400}{50}\right)\right)$$

$$= 400\cdot(1-\Phi(-0,83)) + 50\varphi(-0,83) - 358,50\cdot(1-\Phi(-0,83))$$

$$= 400 \cdot 0,79673 + 50\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{0,83^2}{2}} - 358,50 \cdot 0,79673 = 47,20.$$

Отже, величина сумарних нарахованих річних премій становить $10\ 000 \cdot 0,03 \cdot 47,20 \cdot 1,15 = 16\ 284$, що дорівнює величині сумарних премій за договором пропорційного перестрахування.

Перестрахування ексцеденту збитковості

Перестрахування сумарних виплат із заданим рівнем утримання d називають *перестрахуванням ексцеденту збитковості* або *перестрахуванням, що зупиняє виплати*.

Нехай S_I та S_R позначають сумарні виплати страховика та перестраховика відповідно. Тоді якщо сумарна величина всіх позовів, поданих до страхової компанії, дорівнює S, то $S_I = \min\{S, d\}$, а $S_R = \max\{0, S - d\} = (S - d)_+$.

Для довільного типу розподілу в.в. S

$$\mathsf{E}S_I = \int_0^\infty \min\{x, d\}\mathrm{d}F_S(x) = \int_0^d x\mathrm{d}F_S(x) + d\mathsf{P}(S > d);$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}S_R &= \int_0^\infty \max\{0, x-d\}\mathrm{d}F_S(x) = \int_d^\infty (x-d)\mathrm{d}F_S(x) \\
&= \int_d^\infty (d-x)\mathrm{d}(1-F_S(x)) \\
&= (d-x)(1-F_S(x))\Big|_d^\infty + \int_d^\infty (1-F_S(x))\mathrm{d}x \\
&= \int_d^\infty (1-F_S(x))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Зокрема, якщо розподіл S абсолютно неперервний, то

$$\mathsf{E}S_I = \int_0^d x f_S(x)\mathrm{d}x + d\mathsf{P}(S > d),\ \mathsf{E}S_R = \int_d^\infty (x-d) f_S(x)\mathrm{d}x,$$

а якщо дискретний, то

$$\mathrm{E}S_I = \sum_{x=0}^{d} x\mathrm{P}(S = x)\mathrm{d}x + d\mathrm{P}(S > d), \; \mathrm{E}S_R = \sum_{x>d} (x-d)\mathrm{P}(S = x).$$

Вправа

Річні сумарні виплати страхової компанії описуються складним від'ємним біноміальним розподілом. Середнє число страхових випадків за рік дорівнює 9, а його стандартний відхил становить 6. Величина індивідуальних позовів може дорівнювати лише 1 або 3 з імовірностями $\frac{1}{3}$ та $\frac{2}{3}$ відповідно. Компанія уклала договір перестрахування ексцеденту сумарних виплат з рівнем власного утримання $d = 3$.

Обчисліть величину очікуваних виплат перестраховика.

Відповідь: $\mathrm{E}S_R = 18\frac{39}{512}$.

У випадку, коли сумарні виплати нульові на деякому інтервалі значень, спростити обчислення може наступний результат.

Теорема

Припустимо, що $P(a < S < b) = 0$ для деяких дійсних чисел $a < b$. Тоді, якщо рівень утримання $d \in [a, b]$, має місце рівність

$$ES_R = E(S-d)_+ = \frac{b-d}{b-a}E(S-a)_+ + \frac{d-a}{b-a}E(S-b)_+,$$

тобто середні виплати перестраховика можна обчислити за допомогою лінійної інтерполяції.

Доведення.

За припущенням, $F_S(x) = F_S(a)$, $a \leq x < b$. Тоді

$$\mathrm{E}(S-d)_+ = \int_d^\infty (1 - F_S(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^\infty (1 - F_S(x))\mathrm{d}x - \int_a^d (1 - F_S(x))\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{E}(S-a)_+ - \int_a^d (1 - F_S(a))\mathrm{d}x = \mathrm{E}(S-a)_+ - (d-a)(1 - F_S(a)).$$

Покладемо $d = b$

$$\mathrm{E}(S-b)_+ = \mathrm{E}(S-a)_+ - (b-a)(1 - F_S(a)),$$

$$1 - F_S(a) = \frac{\mathrm{E}(S-a)_+ - \mathrm{E}(S-b)_+}{b-a}.$$

У дискретному випадку можливе інше спрощення, за умови, що значення S розташовані на рівновіддалених точках.

Теорема

Припустимо, що $P(S = kh) = g_k \geq 0$ *для деякого фіксованого* $h > 0$ *і* $k = 0, 1, \ldots$ *та* $P(S = x) = 0$ *для всіх інших* x. *Тоді для* $d = jh$

$$E(S - d)_+ = h \sum_{m=0}^{\infty} (1 - F_S((m + j)h)).$$

Доведення.

$$
\mathrm{E}(S-d)_+ = \sum_{x>d}(x-d)\mathrm{P}(S=x) = \sum_{k=j}^{\infty}(kh-jh)g_k
$$

$$
= h\sum_{k=j}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-j-1} g_k = h\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+j+1}^{\infty} g_k
$$

$$
= h\sum_{m=0}^{\infty}(1-F_S((m+j)h)).
$$

□

Наслідок

$$
E(S-(j+1)h)_+ = E(S-jh)_+ - h(1-F_S(jh)).
$$

Ексцедентні поліси страхування: умовна та безумовна франшизи

Страхові поліси з ексцедентом є загальновживаними в практиці різних видів страхування майна та автотранспорту, а також у страхуванні від нещасних випадків чи катастроф.

За умовами таких договорів застрахований згоден самостійно нести весь тягар відшкодування збитків до певної межі L, яку називають *ексцедентом* або (в українській страховій термінології) *франшизою*.

Франшиза – це передбачена договором частина збитків, яку не компенсує страховик у випадку настання страхової події.

Розрізняють умовну та безумовну франшизи:

- *умовна франшиза* засвідчує право звільнення страховика від відповідальності за збитки, якщо їхня величина не перевищує величини франшизи; збитки повинні бути відшкодовані повністю, якщо їхня величина перевищує франшизу;
- *безумовна франшиза* вказує на те, що відповідальність страховика визначається величиною збитків мінус франшиза.

Зокрема, якщо величина збитків $X > L$, то власник поліса подає позов лише величиною $X - L$ у випадку безумовної франшизи та позов повної величини X у разі умовної франшизи.

Нехай Y – це величина, яку фактично виплатив страховик за договором з безумовною франшизою L. Тоді $Y = \max\{0, X - L\}$ і позиція страховика аналогічна позиції перестраховика при перестрахуванні ексцеденту збитку, а позиція власника поліса стосовно збитків аналогічна відповідній позиції страховика.

Зрозуміло, що страхова премія за ексцедентним полісом має бути меншою, ніж премія для поліса без ексцеденту.

Приклад

Припустимо, що на індивідуальні позови встановлено франшизу d. Однак з перебігом року виявилось, що власник страхового поліса може заплатити не більше u. Побудуйте звичайну модель для сумарних виплат страхової компанії та вкажіть, чому для неї не виконуються припущення.

Позначимо через X_j величину j-го позову. Нехай $W_j = min\{X_j, d\}$ – це величина, сплачена власником поліса згідно з франшизою, а $Y_j = X_j - W_j$ – величина, сплачена страховиком. Тоді $R = W_1 + \cdots + W_N$ дорівнює загальній сумі, яку сплачує власник поліса, допоки в нього є гроші.

Відповідно до цього власником поліса фактично сплатить $R_u = \min\{R, u\}$. Нехай $S = X_1 + \cdots + X_N$ – загальні втрати, тоді сумарні виплати страховика дорівнюватимуть $T = S - R_u$.

Зауважимо, що розподіли S та R_u ґрунтуються на н.о.р. розподілах індивідуальних позовів.

Для знаходження розподілів S та R_u можна використати описані раніше аналітичні методи. Однак оскільки ці в.в. залежні між собою, то не можна використати згортку для отримання розподілу T.

Також неможливо записати T як суму н.о.р. змінних. На початку року T може бути сумою н.о.р. Y_j, але після моменту вичерпання грошей наступні Y_j будуть замінені на X_j.

Вправа

Кількість позовів за портфелем страхових полісів має розподіл Пуассона з середнім 200. Величини індивідуальних позовів ексконенційно розподілені з середнім 40. Страхова компанія обчислює премії, використовуючи 40% навантаження на ризик, та розглядає наступні варіанти щодо укладання угоди перестрахування.

(A) Не укладати договір перестрахування

(B) Перестрахування індивідуального ексцеденту збитку з рівнем утримання 60 у перестраховика, який обчислює премії, використовуючи 55% навантаження на ризик.

(C) Пропорційне перестрахування з рівнем утримання 75% у перестраховика, який обчислює премії, використовуючи 45% навантаження на ризик.

Вправа

Обчислити

i) очікуваний прибуток страхової компанії за кожним варіантом;

ii) для кожного типу угоди ймовірність того, що страховик отримає прибуток не менший за 2000, використовуючи нормальну апроксимацію.

Вправа

Обчислити

i) очікуваний прибуток страхової компанії за кожним варіантом;

ii) для кожного типу угоди ймовірність того, що страховик отримає прибуток не менший за 2000, використовуючи нормальну апроксимацію.

Відповідь: i) A: 3200, B: 2218,227, C: 2300; ii) A: 0,06681, B: 0,34082, C: 0,30854.

Вправа

Позови за портфелем полісів загального страхування мають розподіл Парето зі щільністю $f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x > \alpha$. Укладено договір перестрахування ексцеденту збитку з утриманням M, $M > \lambda$.

i) (a) Покажіть, що $\mathrm{P}(X > x) = \left(\frac{\lambda}{x}\right)^\alpha$, $x > \lambda$.

(b) Отримайте вираз для очікуваної величини, сплаченої перестраховиком за умови, що до позову було залучено перестраховика.

ii) Останнього року надійшло 10 позовів, з яких до 4 було залучено перестраховика. Позови, для покриття яких було залучено перестраховика, позначено $\{x_i : i = 1, 2, 3, 4 \ (x_i > M)\}$. Запишіть функцію вірогідності для цих даних.

Відповідь: $\frac{M}{\lambda-1}$; $\left(1-\left(\frac{\lambda}{M}\right)\right)^6 \alpha^4 \lambda^{4\alpha} \left(\prod_{i=1}^4 x_i\right)^{-\alpha-1}$.

Вправа

Страхова компанія C моделює величину втрат за кожним полісом зі свого портфелю як такі, що мають середнє та стандартний відхил рівні $\$500$. Аналітик припускає, що величина втрат має експоненційний розподіл. У портфелі є 300 полісів, і C очікує, що від 30% цих полісів щороку надходитимуть позови.
C вивчає угоду перестрахування, за якою перестраховик покриватиме ексцес індивідуального збитку понад $\$2500$ за кожним позовом із портфелю. Перестрахова компанія R пропонує забезпечити покриття на наступний рік за річну премію $\$300$. C просить вашої поради, приймати цю пропозицію або ні.

i) Обчисліть сумарну величину позовів, передану перестраховику R за всім портфелем.
ii) Прокоментуйте вашу відповідь в i) щодо того, чи порадили б ви C укладати перестрахову угоду з R та чому.
iii) Інший аналітик вважає, що позови мають логнормальний розподіл. Обчисліть очікувану сумарну величину позовів, передану перестраховику R за цим припущенням.
iv) Прокоментуйте вашу відповідь в iii).

i) Обчисліть сумарну величину позовів, передану перестраховику R за всім портфелем.
ii) Прокоментуйте вашу відповідь в i) щодо того, чи порадили б ви C укладати перестрахову угоду з R та чому.
iii) Інший аналітик вважає, що позови мають логнормальний розподіл. Обчисліть очікувану сумарну величину позовів, передану перестраховику R за цим припущенням.
iv) Прокоментуйте вашу відповідь в iii).

Відповідь i) $\$202,14$; iii) $\$527$.

Вправа

Величина збитку X за певним видом страхових полісів має розподіл Парето зі щільністю $f(x)$, де

$$f(x) = \frac{3 \cdot 400^3}{(400 + x)^4}, \quad x > 0.$$

Власний рівень утримання власника поліса (тобто безумовна франшиза) за цими полісами становить $\$100$.

i) Обчисліть очікувану величину позову, сплачену страховою компанією.

ii) Порівняйте відповідь в i) з очікуваними втратами EX.

Вправа

Страхова компанія має портфель полісів, щодо кожного з яких укладено договір перестрахування ексцеденту збитку з рівнем утримання $M > 0$. Позови, які подані до прямого страховика та позначені через X, мають розподіл Парето з функцією розподілу

$$F(x; \lambda) = 1 - \left(\frac{200}{200 + x}\right)^{\lambda}.$$

Всього за цим портфелем подано n позовів. З них l мали величини менші за рівень утримання. Величини менші за утримання є $\{x_i\colon i = 1, 2, \ldots, l\}$. Відоме значення статистики $\sum_{i=1}^{l} \ln(200 + x_i) = y$.

i) Покажіть, що оцінка максимальної вірогідності параметра α, дорівнює

$$\hat{\alpha} = \frac{l}{(n-l)\ln(200+M) - n\ln 200 + y}.$$

ii) З досвіду минулого року відома така інформація: $M = 600$, $n = 500$, $l = 400$, $y = 2209,269$.

(a) Використовуючи результат пункту i), перевірте, що значення оцінки максимальної вірогідності $\hat{\alpha} = 1,75$.

(b) Припускаючи, що $\alpha = 1,75$, оцініть середні величини, сплачені страховиком та перестраховиком за позовом, поданим протягом року.

Вправа

i) В.в. X має логнормальний розподіл із параметрами μ та σ та зі щільністю $f(x)$. Показати, що для $a > 0$

$$\int_a^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln a - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right)\right),$$

де Φ – функція розподілу стандартного нормального розподілу.

ii) Позови за певним видом страхування мають логнормальний розподіл із середнім 9,070 та стандартним відхилом 10,132 (у тис. $\$$). Для довільного року від 20% полісів очікують виникнення позову.

Величина збитку X за певним видом страхових полісів має розподіл Парето зі щільністю $f(x)$, де

$$f(x) = \frac{3 \cdot 400^3}{(400 + x)^4}, \quad x > 0.$$

Власний рівень утримання власника поліса (тобто безумовна франшиза) за цими полісами становить $\$100$.

i) Обчисліть очікувану величину позову, сплачену страховою компанією.

ii) Порівняйте відповідь в i) з очікуваними втратами EX.

Відповідь. i) 250; ii) очікувана величина позову більша внаслідок важкого хвосту розподілу.

Вправа

Страхова компанія має 200 полісів у портфелі та хоче укласти договір перестрахування ексцеденту збитку для усіх полісів з портфелю. Перестраховик встановив премії для двох рівнів перестрахування наступним чином (числа у тис. $\$$):

Рівень утримання	Премія
25	48,5
30	38,2

(a) Для кожної перестрахової угоди обчисліть імовірність того, що поданий позов залучатиме перестраховика.

(b) Досліджуючи середню величину кожного позову, передану перестраховику, обчисліть, який із рівнів утримання дає більший прибуток (ігноруючи ставлення страховика до ризику).

(c) Страховик очікує, що в наступному році інфляція збільшить середнє та стандартний відхил величини позовів за портфелем на 8%, припускаючи, що все інше залишиться незмінним. Якщо перестраховик встановить такі самі премії, що й раніше, який із рівнів утримання дасть більший прибуток наступного року?

(a) Для кожної перестрахової угоди обчисліть імовірність того, що поданий позов залучатиме перестраховика.

(b) Досліджуючи середню величину кожного позову, передану перестраховику, обчисліть, який із рівнів утримання дає більший прибуток (ігноруючи ставлення страховика до ризику).

(c) Страховик очікує, що в наступному році інфляція збільшить середнє та стандартний відхил величини позовів за портфелем на 8%, припускаючи, що все інше залишиться незмінним. Якщо перестраховик встановить такі самі премії, що й раніше, який із рівнів утримання дасть більший прибуток наступного року?

Відповідь. ii) (a) 0,0574; 0,0376; (b) 30; (c) 25.

Вправа

Останні 10 позовів, які надійшли від певного класу страхових полісів, були такими:

1330	201	111	2368	617
309	35	4685	442	843

i) Припускаючи, що позови відповідають логнормальному розподілу з параметрами μ та σ^2, отримайте оцінки максимальної вірогідності цих параметрів.

ii) Припускаючи, що позови надходять з розподілу Парето з параметрами α та λ, отримайте оцінки цих параметрів методом моментів.

iii) Припускаючи, що позови відповідають розподілу Вейбулла з параметрами c та γ, застосуйте метод квантилів (оснований на 25%-му та 75%-му квартилях) для оцінювання цих параметрів.

iv) Страхова компанія уклала договір перестраховування ексцеденту індивідуального збитку з рівнем утримання 3000. Оцініть частку позовів, для покриття яких буде залучено перестраховика, використовуючи всі описані вище моделі.

iii) Припускаючи, що позови відповідають розподілу Вейбулла з параметрами c та γ, застосуйте метод квантилів (оснований на 25%-му та 75%-му квартилях) для оцінювання цих параметрів.

iv) Страхова компанія уклала договір перестраховування ексцеденту індивідуального збитку з рівнем утримання 3000. Оцініть частку позовів, для покриття яких буде залучено перестраховика, використовуючи всі описані вище моделі.

Відповідь. i) $\hat{\mu} = 6,197$, $\hat{\sigma}^2 = 1,911$; ii) $\hat{\alpha} = 5,51013$, $\hat{\lambda} = 4934,5$; iii) $\hat{\gamma} = 0,81022$, $\hat{c} = 0,00481$; iv) логнормальний: 0,09527; Парето: 0,073011; Вейбулла: 0,047542.

Вправа

Страхова компанія C моделює таку величину збитків для кожного позову зі свого портфелю полісів, щоб середнє та стандартний відхил дорівнювали $\$500$. Аналітик припускає, що збитки мають експоненційний розподіл. Всього у портфелі 200 полісів, і C очікує, що за 30% з них щороку виникатиме позов.

C розглядає можливість укладання перестрахової угоди, за якою перестраховик сплачуватиме перевищення понад $\$2500$ для кожного індивідуального позову, що надійшов із портфелю. Перестрахова компанія R пропонує покриття на наступний рік за річну премію завбільшки $\$300$. C просить Вашої поради, приймати цю пропозицію чи ні.

i) Обчисліть очікувану величину позову, цедовану до R, за всім портфелем.

ii) Прокоментуйте відповідь в i) та вкажіть основні пункти, на які Ви наголосите, коли будете радити C приймати пропозицію R чи ні.

iii) Інший аналітик вважає, що збитки мають логнормальний розподіл. Обчисліть очікувану величину позову, цедовану до R, за цього припущення. (Вказівка: для логнормального розподілу:

$$\int_M^\infty xf(x)\mathrm{d}x = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln M-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right),$$

де Φ – функція розподілу стандартної нормальної в.в.)

iv) Прокоментуйте відповідь у iii).

Відповідь. i) 202,14; ii) страховик платитиме премію, що на 48,4% більша ніж очікувана величина відповідного цедованого ризику. Це може бути прийнятним залежно від схильності страховика до ризику; iii) 527; iv) приймати пропозицію.

Вправа

i) Покажіть, що

$$\int_M^\infty x f(x)\mathrm{d}x = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{\ln M-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)\right),$$

де

$$f(x)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

ii) Припускають, що величини збитків X, які надходять від портфелю полісів загального страхування, є незалежно розподіленими з середнім $\$800$ та стандартним відхилом $\$1200$. Визначте значення параметрів логнормального розподілу з такими середнім і стандартним відхилом.

iii) Компанія хоче придбати перестрахове покриття і має вирішити, купувати перестрахування ексцеденту збитку чи пропорційне. Величини, сплачені прямим страховиком та перестраховиком позначено відповідно

$$X_I^{\text{проп}} = (1-k)X, \quad X_R^{\text{проп}} = kX$$

та

$$X_I^{\text{ексц}} = \min\{X, d\}, \quad X_R^{\text{ексц}} = (X-d)_+.$$

Використовуючи розподіл збитків, вказаний у ii), обчисліть значення k таке, що $\mathsf{E}X_I^{\text{проп}} = 0,7\mathsf{E}X$, та покажіть, що коли $d = 1189,4$, то $\mathsf{E}X_I^{\text{ексц}} = 0,7\mathsf{E}X$.

iv) Використовуючи значення k та d з iii), обчисліть $\mathsf{D}X_I^{\text{проп}}$ та $\mathsf{D}X_I^{\text{ексц}}$.

Відповідь: ii) $\mu = 6,095$, $\sigma^2 = 1,1787$; iii) $k = 0,3$; iv) $\mathrm{D}X_I^{\text{проп}} = 705600$, $\mathrm{D}X_I^{\text{ексц}} = 158530$; v) середні значення однакові, внаслідок важкого хвосту логнормального розподілу дисперсія для ексцеденту збитку менша.